

Artur Marek Ankowski

Kwazielastyczne zderzenia neutrin z nukleonami
i jądrami atomowymi

praca magisterska napisana
pod kierunkiem prof. Jana Sobczyka

wrzesień 2004
IFT Uniwersytetu Wrocławskiego

Wstęp

Gdy w 1930 r. Wolfgang Pauli wprowadził neutrino do wyjaśnienia widma elektronów w rozpadzie β , nie spodziewał się, że zostanie ono kiedykolwiek zaobserwowane. Bezpośredniego potwierdzenia istnienia tej cząstki dokonali F. Reines i C.L. Cowan Jr. w 1956 roku (wykrywając antyneutrino). Wiadomo było, że reakcje jądrowe w Słońcu produkują neutrino, jednak pomiar ich strumienia prowadzony w latach 1967–1995 przez zespół R. Daviesa Jr. w kopalni w Homestake dostarczył ważnych danych: rejestrowana ilość cząstek była około trzy razy mniejsza, niż przewidywana przez standardowy model Słońca autorstwa J.N. Bahcalla. Model ten znalazł potwierdzenia w badaniach heliosejsmologicznych, jednak doświadczenie Daviesa także nie wykazywało błędu. Tę rozbieżność nazwano „problemem neutrin słonecznych”.

W roku 1990 wraz z niezależnym potwierdzeniem wyników z Homestake w detektorze Kamiokande rozpoczął się okres intensywnego rozwoju fizyki neutrin. Eksperymenty galowe GALLEX i GNO w Gran Sasso oraz SAGE w Baksanie dały podobne rezultaty. Rozstrzygnięcie przyniosło doświadczenie w Sudbury Neutrino Observatory, które, dzięki możliwości niezależnego zliczania każdego zapachu neutrin, pozwoliło stwierdzić, że całkowity strumień neutrin zgadza się z przewidywaniami standardowego modelu Słońca, jednak w trakcie podróży na Ziemię neutrino zmieniają swój zapach — mają miejsce „oscylacje neutrin”. Taką możliwość rozważali już w 1969 roku V. Gribov i B. Pontecorvo, zaś teorię oscylacji w materii, znaną jako „efekt MSW”, rozwinęli S.P. Mikheyev i A.Y. Smirnov (1985 r.) oraz L. Wolfenstein (1978 r.). W kolejnych eksperymentach zaobserwowano oscylacje dla neutrin atmosferycznych (SuperKamiokande) i akceleratorowych (KamLAND).

Ze względu na bardzo słabe oddziaływanie neutrino mogą w przyszłości stać się narzędziem do badania w wielu dziedzinach, np. w astrofizyce.

Jedynym sposobem obserwowania cząstek obojętnych elektrycznie jest detekcja ich zderzeń z innymi cząstkami, dlatego dla eksperymentów neutrinowych kluczowe znaczenie ma znajomość prawdopodobieństwa rozpraszania. W tej pracy zajmiemy się pewną klasą zderzeń neutrin z nukleonami i jądrami atomowymi, najistotniejszą w planowanych doświadczeniach.

Rozdział 1

Wprowadzenie

Najdokładniejszy opis procesów rozpraszania, jakim dysponujemy, dany jest przez model standardowy. W jego obrębie neutrino uczestniczą jedynie w oddziaływaniach słabych. Oddziaływania słabe mogą być realizowane przez prądy neutralne, czyli wymianę neutralnych bozonów Z^0 , lub przez prądy naładowane — wymianę bozonów W^\pm . Zderzenia czysto leptonowe znane są dokładnie, dlatego zawężymy nasze rozważania do procesów półleptonowych. Przy takim rozpraszaniu przez prądy neutralne w stanie początkowym i końcowym obecne jest neutrino, a przy prądach naładowanych neutrino przechodzi w odpowiadający mu zapachem naładowany lepton. W przeciwieństwie do oddziaływań przez prądy neutralne, przy oddziaływaniach przez prądy naładowane występuje energia progowa układu, poniżej której zderzenia nie występują. Wiąże się to z koniecznością wyprodukowania masywnego leptonu, więc jest szczególnie dobrze widoczne w przypadku neutrino taonowego. Neutrino słoneczne mają niską energię (poniżej 20 MeV), zatem rozpraszanie z udziałem bozonów W^\pm może wystąpić dla słonecznych neutrin elektronowych, ale nie dla powstających w wyniku oscylacji neutrin mionowych. Prądy naładowane są istotne dla wszystkich neutrin atmosferycznych i wytwarzanych sztucznie w akceleratorach.

W niniejszej pracy będziemy rozważali zderzenia kwazielastyczne. Termin ten łatwo jest zdefiniować w przypadku rozpraszania neutrino na swobodnym nukleonie: to proces, w którego wyniku neutrino przekształca się w lepton naładowany, a nukleon zmienia stan ładunkowy i nie powstają żadne dodatkowe cząstki, co przedstawia Rys. 1.1 na str. 2. Ze względu na zasady zachowania protony mogą zderzać się kwazielastycznie tylko z antyneutrinami, a neutrony — tylko z neutrinami. Analogiczne oddziaływanie przez prądy neutralne określa się mianem elastycznego, patrz Rys. 1.2 (symbol N oznacza nukleon). Dla rozpraszania na jądrze sytuacja się komplikuje, bo pojęcie zderzenia kwazielastycznego jest stosowane do różnych procesów. W środowisku fizyków zajmujących się oddziaływaniem elektronów tę nazwę odnosi się do przybliżenia prawie (kwazi-) swobodnych nukleonów w jądrze, a samo zderzenie z elektronami przebiega elastycznie. Podobny zakres ma ten termin przy rozpraszaniu neutrin z wymianą bozonu Z^0 . W przypadku



Rys. 1.1 Oddziaływania przez prądy naładowane



Rys. 1.2 Oddziaływania przez prądy neutralne

kwazielastycznych zderzeń neutrin z udziałem prądów naładowanych są to oddziaływania z jądrami atomowymi, w których elementarny proces przebiega tak, jak dla swobodnego nukleonu. My będziemy używali pojęcia oddziaływań kwazielastycznych właśnie w ostatnim sensie. Wspólny mianownik dla wszystkich definicji stanowi milczące założenie, że przekaz pędu i energii jest na tyle mały, że można nie uwzględniać wewnętrznej budowy nukleonu. Przy niskich energiach oddziałującego układu, kiedy przekazana energia nie wystarcza do wyprodukowania rezonansu hadronowego, zderzenia kwazielastyczne to jedyny możliwy kanał; przy wyższych to tylko jeden z wielu realizowanych scenariuszy, więc ze wzrostem energii staje się on coraz mniej znaczący.

Zastanówmy się nad możliwością doświadczalnej weryfikacji obliczeń dotyczących rozpraszania wiązki neutrin. Aby zarejestrować zajście oddziaływania przez prądy neutralne, konieczna jest obserwacja zmiany pędu lub energii *pojedynczego* nukleonu, co nastęrcza poważnych trudności. Realizuje się to pośrednio: przez stwierdzenie emisji kwantów γ , towarzyszących wychwytowi nukleonu wybitego z tarczy; taka metoda ma jednak niewielką czułość. Przy rozpraszaniu z udziałem prądów naładowanych sytuacja jest dużo łatwiejsza, bo wystarczy wykryć powstanie naładowanego leptonu, którego droga swobodna jest większa (nie dotyczy to taonu, który identyfikuje się po produktach rozpadu). W tym celu można wykorzystać fakt, że każda naładowana cząstka traci energię na jonizację i wzbudzenie atomów ośrodka, w którym się porusza, co ilościowo określa wzór Bethego–Blocha (patrz Sz. Szczeniowski [1] str. 109 lub [2] str. 242). Jeśli lepton przemieszcza się w cieczy o odpowiednio dużym współczynniku załamania, do jego detekcji może posłużyć

promieniowanie Czerenkowa (por. Sz. Szczeniowski [1] § 19 lub [2] str. 242 i rozdz. 28). Detekcja oddziaływań przez wymianę bozonów W^\pm obarczona jest mniejszym błędem, więc mają one większe znaczenie i w obliczeniach zajmujemy się tylko nimi. Drugi ważny aspekt eksperymentów to wybór tarczy, z którą mają zderzać się neutrina. Prawdopodobieństwo oddziaływania jest bardzo małe, więc ilość obserwowanych centrów rozpraszania, która zagwarantuje znaczącą częstość zderzeń, musi być ogromna. Ze względów praktycznych eksperymenty przeprowadza się na jądrach atomowych, choć od strony teoretycznej zderzenia ze swobodnymi nukleonami są prostsze. Modelowanie oddziaływań z jądrami ma zatem szczególne znaczenie, bo umożliwia kontakt między fizyką teoretyczną a doświadczalną. Skupimy się na zderzeniach z jądrami tlenu ^{16}O , jednak zastosowane w tej pracy podejście można wykorzystać do dowolnego jądra atomowego, którego liczba neutronów równa się liczbie protonów. Rozpraszanie na tlenie jest istotne dla neutrin atmosferycznych i wytworzonych sztucznie, gdy tarczę stanowi woda, jak na przykład w eksperymentach AMANDA (Antarctic Muon and Neutrino Detector Array) i K2K (KEK to Kamioka).

Przekrój czynny

Do opisu zderzeń stosuje się pojęcie przekroju czynnego. Aby dobrze zrozumieć, co jest przez niego określane, przeanalizujemy rozpraszanie jednorodnej wiązki cząstek na makroskopowej tarczy. Najpierw rozważmy, co dzieje się przy przejściu przez cienką warstwę izotropowej materii o powierzchni S i infinitezymalnej grubości δx , jak na Rys. 1.3 na str. 4. Przejście bez oddziaływania to zdarzenie przeciwne do rozproszenia, więc ich prawdopodobieństwa sumują się do jedynki. Prawdopodobieństwo zderzenia jest proporcjonalne do liczby centrów rozpraszania na jednostkę powierzchni. Liczba centrów w warstwie to iloczyn gęstości objętościowej centrów n i objętości warstwy $S\delta x$. Zatem prawdopodobieństwo przejścia przez cienką warstwę p_{trans} możemy zapisać

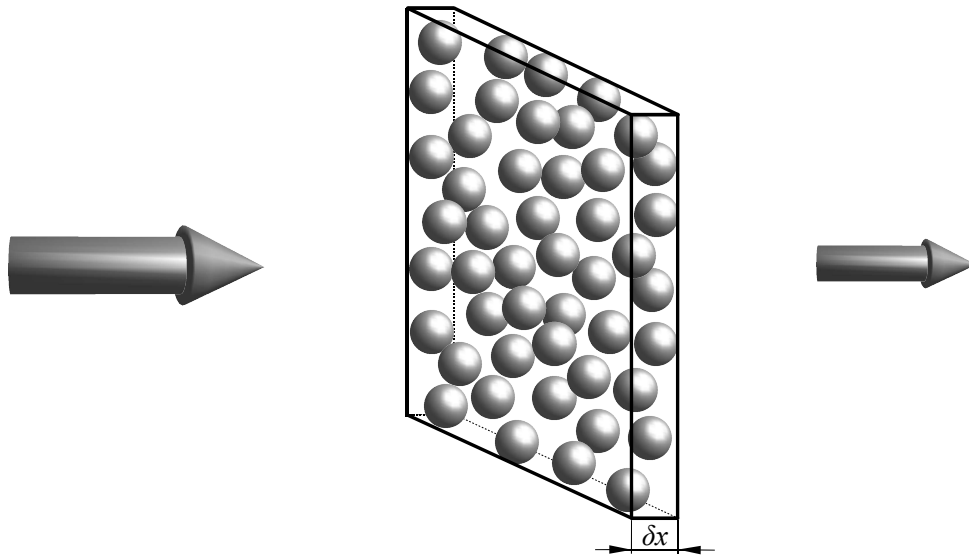
$$p_{\text{trans}} = 1 - \sigma n \delta x,$$

wprowadzając współczynnik proporcjonalności σ , którym jest właśnie przekrój czynny. Teraz złożymy razem N cienkich warstw, żeby otrzymać tarczę o makroskopowych rozmiarach, patrz Rys. 1.4. Prawdopodobieństwo przejścia P_{trans} przez taki układ jest iloczynem prawdopodobieństw przejścia przez każdą warstwę:

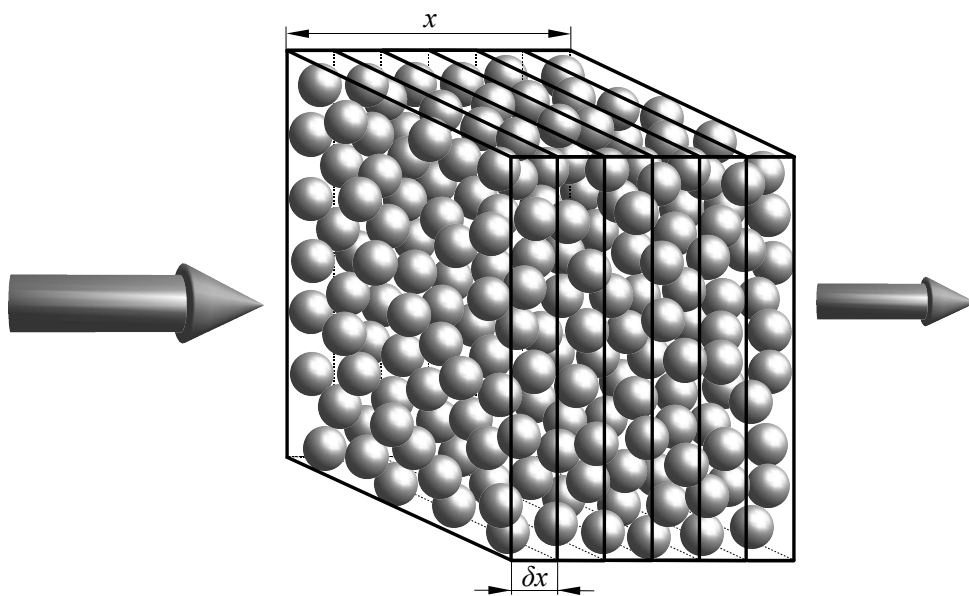
$$P_{\text{trans}} = (1 - \sigma n \delta x)^N.$$

Wyraźmy δx przez x , czyli całkowitą grubość N warstw:

$$P_{\text{trans}} = \left(1 - \sigma n \frac{x}{N}\right)^N.$$



Rys. 1.3



Rys. 1.4

Skoro δx jest infinitezymalnie małe, a x to makroskopowe rozmiary tarczy, więc musi zachodzić $N \rightarrow \infty$. Z definicji podstawy logarytmów naturalnych możemy zapisać

$$P_{\text{trans}} = e^{-\sigma n x}.$$

W oddziaływaniach słabych już trzeci wyraz rozwinięcia w szereg jest zaniebdywalnie mały:

$$P_{\text{trans}} = 1 - \sigma n x.$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo zderzenia wynosi

$$P = \sigma n x.$$

Częstość zderzeń, czyli tzw. szybkość przejścia, otrzymamy, gdy podzielimy prawdopodobieństwo zderzenia przez czas przejścia cząstki przez tarczę:

$$\frac{P}{T} = \sigma n \frac{x}{T}.$$

Iloraz x/T to prędkość cząstki względem tarczy u_{rel} . Wprowadzając strumień centrów rozpraszania $\phi_s = n u_{\text{rel}}$ możemy zapisać

$$\frac{P}{T} = \sigma \phi_s.$$

Otrzymana zależność pozwala określić przekrój czynny jako szybkość przejścia na jednostkę strumienia:

$$\sigma = \frac{P}{T \phi_s}.$$

W teorii pola rozproszenie opisuje się jako przejście układu od stanu początkowego Ψ_i^+ dla czasu $t \rightarrow -\infty$ do stanu końcowego Ψ_f^- dla $t \rightarrow +\infty$. W stanie początkowym Ψ_i^+ cząstki oddalone są od siebie na tyle, że nie oddziałują, do interakcji dochodzi w mikroskopowym obszarze, a produkty zderzenia w stanie końcowym Ψ_f^- dzieli ponownie makroskopowa odległość, która uniemożliwia oddziaływanie. Amplituda przejścia między tymi stanami zadaje elementy macierzy przejścia S :

$$S_{fi} \doteq \langle \Psi_f^- | \Psi_i^+ \rangle.$$

Przy niewielkim zasięgu oddziaływań, co zachodzi dla oddziaływań słabych, można przyjąć, że w stanie początkowym cząstki są swobodne; jest to przybliżenie Borna. W macierzy S wyodrębnijmy część \mathcal{M}_{fi} odpowiadającą za oddziaływanie:

$$S_{fi} = \delta(i - f) - 2\pi i \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{M}_{fi},$$

pozostałą część zapisałiśmy skrótowo deltą Diraca; należy przez nią rozumieć iloczyn delty Kroneckera dla każdego dyskretnego stopnia swobody i delty Diraca dla każdego ciągłego stopnia swobody. Jeśli stan końcowy jest różny od początkowego, to S_{fi} redukuje się do

$$S_{fi} = -2\pi i \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{M}_{fi}. \quad (1.1)$$

W tej pracy będziemy rozpatrywali przypadki z dwiema cząstkami w stanie początkowym, a wtedy prawdopodobieństwo przejścia wyraża się wzorem

$$P = \int dp_f (2\pi)^2 \left[\frac{(2\pi)^3}{V_{\text{lab}}} \right]^2 \frac{V_{\text{lab}} T}{(2\pi)^4} \delta^4(p_i - p_f) |\mathcal{M}_{fi}|^2,$$

por. podrozdział 3.4 podręcznika S. Weinberga [3]. Skoro zderzają się dwie cząstki, to gęstość jednej w położeniu drugiej jest równa odwrotności objętości laboratorium, więc strumień cząstek wynosi

$$\phi_s = \frac{u_{\text{rel}}}{V_{\text{lab}}},$$

zatem przekrój czynny — szybkość przejścia na jednostkę strumienia — wyraża się jako

$$\sigma = \int dp_f \frac{(2\pi)^4}{u_{\text{rel}}} \delta^4(p_i - p_f) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (1.2)$$

Jest to funkcja stanu początkowego i końcowego. Jeśli zsumuje się po wszystkich możliwych stanach końcowych, to otrzyma się wielkość zależną tylko od stanu początkowego — inkluzywny przekrój czynny. Dla neutrin rośnie on liniowo z energią (por. [2] str. 312), więc ze wzrostem energii oddziałującego układu procesy kwazielastyczne mają coraz mniejsze znaczenie, bo ich przekrój czynny jest stały.

Rozdział 2

Swobodny nukleon

Przed przystąpieniem do wyliczania przekroju czynnego neutrino na zderzenie z jądrem musimy dysponować wynikami dla zderzenia ze swobodnym nukleonem, więc ten rozdział poświęcimy ich otrzymaniu. Dla ustalenia uwagi obliczenia przeprowadzimy dla rozproszenia neutrino na neutronie. W stanie początkowym obecne są neutrino o czteropędzie k i neutron o czteropędzie p , zaś w stanie końcowym — lepton naładowany o czteropędzie k' i proton o czteropędzie p' , ilustrujemy to na Rys. 2.1. W formalizmie przestrzeni Focka stan początkowy możemy wyrazić jako

$$|\Psi_i^+\rangle = |k\rangle_\nu |p\rangle_n \otimes |0\rangle_l \otimes |0\rangle_p,$$

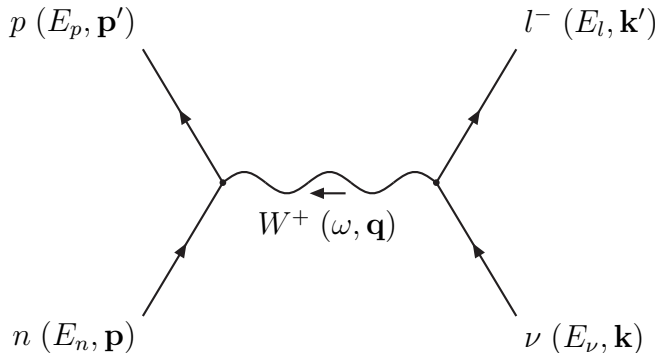
a stan końcowy jako

$$\langle\Psi_f^-| = \langle 0|_\nu \otimes \langle 0|_n \otimes \langle k'|_l \otimes \langle p'|_p.$$

Pędy końcowe z równania (1.2) to w rozważanym oddziaływaniu pęd protonu i leptonu naładowanego, więc przekrój czynny wyraża się wzorem

$$\sigma = \int d^3k' d^3p' \delta^4(p + k - p' - k') \frac{(2\pi)^4}{u_{\text{rel}}} \frac{1}{2} \sum_{\text{spiny}} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (2.1)$$

z czynnikiem $\frac{1}{2}$ wynikającym z uśrednienia po początkowych spinach neutronu. Neutrino nie „produkuje” takiego czynnika, bo przy rozpatrywanych



Rys. 2.1

przez nas energiach jest całkowicie spolaryzowane, więc tylko jeden spin wnosi wkład do sumy. Musimy wyliczyć \mathcal{M}_{fi} . Reguły Feynmana w przestrzeni pędów pozwalają stwierdzić, że

$$S_{fi} = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m_l}{E_l}} \sqrt{\frac{m_\nu}{E_\nu}} \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle \cdot \frac{(-ig)}{2\sqrt{2}} (2\pi)^4 \delta^4(p - p' + q) \frac{i(\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / m_W^2)}{(2\pi)^4 (m_W^2 - q^2)} \frac{(-ig)}{2\sqrt{2}} (2\pi)^4 \delta^4(k - k' - q) \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{M}{E_p}} \sqrt{\frac{M}{E_n}} \langle p(\mathbf{p}', s') | j_\nu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle d^4q,$$

co po scałkowaniu względem czteropędu q daje

$$S_{fi} = \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle \langle p(\mathbf{p}', s') | j_\nu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle \cdot \frac{-i}{(2\pi)^2} \frac{g^2}{4(\sqrt{2})^2} \delta^4(p + k - p' - k') \frac{\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / m_W^2}{m_W^2 - q^2}.$$

W przybliżeniu ścisłej symetrii $SU(2) \times SU(2)$ prąd osiowy jest zachowany, więc cały prąd oddziaływania jest zachowany:

$$q^\nu \langle p(\mathbf{p}', s') | j_\nu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle = 0$$

(por. podręcznik Weinberga podrozdział 10.6 w [3] i 19.4 w [4]). Prowadzi to do uproszczenia

$$\frac{\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / m_W^2}{m_W^2 - q^2} \longrightarrow \frac{\eta^{\mu\nu}}{m_W^2 - q^2},$$

co dla $|q^2| \ll m_W^2 = (80,4 \text{ GeV})^2$ redukuje się następująco

$$\frac{\eta^{\mu\nu}}{m_W^2 - q^2} \longrightarrow \frac{\eta^{\mu\nu}}{m_W^2},$$

więc na S_{fi} otrzymujemy wyrażenie

$$S_{fi} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{g^2 / m_W^2}{4(\sqrt{2})^2} \delta^4(p + k - p' - k') \cdot \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle.$$

W ten sposób przeszliśmy do teorii Fermiego, w której oddziaływania odbywają się bez wymiany cząstki pośredniczącej. Diagramy oddziaływań kwazielastycznych w jej obrębie przedstawia Rys. 2.2. W dalszych obliczeniach



Rys. 2.2 Oddziaływania w teorii Fermiego

będziemy nadal korzystali ze zmiennej q , traktując ją tylko jako przekaz czteropędu $q = k - k' = p' - p$. Ze względów historycznych w oddziaływaniach słabych korzysta się ze stałej Fermiego

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}m_W^2},$$

która umożliwia zapisanie S_{fi} jako

$$S_{fi} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \delta^4(p + k - p' - k') \cdot \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle.$$

Porównując otrzymany wynik z (1.1) znajdujemy wyrażenie na \mathcal{M}_{fi} :

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} A_\mu^{\text{lept}} &\doteq \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle, \\ A_{\text{hadr}}^\mu &\doteq \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

dzięki którym możemy przepisać element macierzowy \mathcal{M}_{fi} jako

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} A_\mu^{\text{lept}} A_{\text{hadr}}^\mu.$$

W równaniu (2.1) występuje kwadrat modułu \mathcal{M}_{fi} zsumowany po spinach wszystkich cząstek:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spiny}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{G_F^2}{2} \prod_j \frac{m_j}{E_j} \sum_{\text{spiny}} A_\mu^{\text{lept}} A_{\text{hadr}}^\mu (A_\nu^{\text{lept}})^* (A_{\text{hadr}}^\nu)^* \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{G_F^2}{2} \prod_j \frac{m_j}{E_j} \sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{lept.}}} A_\mu^{\text{lept}} (A_\nu^{\text{lept}})^* \sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{hadr.}}} A_{\text{hadr}}^\mu (A_{\text{hadr}}^\nu)^*. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy tak zwany tensor leptonowy

$$L_{\mu\nu} \doteq \frac{m_l m_\nu}{2} \sum_{\text{spiny}} A_\mu^{\text{lept}} (A_\nu^{\text{lept}})^* \quad (2.3)$$

i tensor hadronowy

$$H^{\mu\nu} \doteq \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{\text{spiny}} A_{\text{hadr}}^\mu (A_{\text{hadr}}^\nu)^*, \quad (2.4)$$

które umożliwiają zwarty zapis

$$\sum_{\text{spiny}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^6} \prod_j \frac{1}{E_j} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

W (2.3) i (2.4) do tensorów włączyliśmy stałe, żeby uprościć ich końcową postać. Teraz możemy wyrazić przekrój czynny następująco:

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2} \frac{1}{u_{\text{rel}}} \int d^3 k' d^3 p' \delta^4(p + k - p' - k') \prod_j \frac{1}{E_j} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Równanie (2.2) zawiera definicję A_{hadr}^μ , którą w notacji macierzowej zapiszemy

$$A_{\text{hadr}}^\mu = \cos \theta_C \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Gamma^\mu u(\mathbf{p}, s),$$

gdzie Γ^μ to macierz wierzchołka oddziaływania słabego nukleonów, a θ_C jest kątem Cabibbo. Posługujemy się teorią efektywną do opisu cząstek złożonych, więc nie znamy jawnej postaci Γ^μ . Ilość czynników, które muszą być wyznaczone doświadczalnie możemy jednak ograniczyć ze względu na transformację Lorentza. Czynniki A_{hadr}^μ rozkłada się na sumę lorentzowskiego czterowektora i lorentzowskiego czterowektora osiowego (patrz np. podręcznik Weinberga [3] podrozdz. 10.6 i [4] podrozdz. 19.4). Obie składowe w ogólnym przypadku zależą od p'^μ i p^μ , czyli równoważnie od $(p' + p)^\mu$ i $(p' - p)^\mu = q^\mu$. Oznacza to, że macierz Γ^μ można wyrazić przez iloczyny bazowych pędów, macierzy gamma, macierzy sigma, γ_5 i symboli Levi-Civity. Liczbę niezależnych wyrażeń redukuje się korzystając z równania Diraca, bo uczestniczące w oddziaływaniu nukleony są na powłoce masy. W ten sposób otrzymujemy postać Γ^μ z dokładnością do skalarnych współczynników. Jedyne skalar, jaki można zbudować z bazowych pędów, to iloczyn $p \cdot p'$, który z kolei wyraża się przez q^2 . Stąd współczynniki — funkcje skalarne nazywane czynnikami postaci (ang. *form factors*) — zależą tylko od q^2 . Z możliwych rozkładów wybierzemy podany w pracy C.H. Llewellyna Smitha [5] na str. 300¹:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_V^1(q^2) + i\sigma^{\mu\kappa} q_\kappa \frac{\xi F_V^2(q^2)}{2M} + \gamma^\mu \gamma_5 F_A(q^2) + \gamma_5 \frac{q^\mu F_P(q^2)}{M}.$$

¹ Żeby uprościć obliczenia, pomijamy człony „drugiej klasy”. Nie ma przesłanek doświadczalnych, że powinny być uwzględniane.

Z funkcji F_V^2 wyłączyliśmy stałą

$$\xi = \mu_p - \mu_n - 1,$$

gdzie μ_p to moment magnetyczny protonu, a μ_n — neutronu. Występująca w Γ^μ litera M oznacza „masę nukleonu” — średnią arytmetyczną mas protonu i neutronu: $(m_n + m_p)/2 \approx 938,92$ MeV. Zauważmy, że M^2 doskonale przybliżyła iloczyn $m_n m_p$:

$$\frac{M^2 - m_n m_p}{m_n m_p} = \frac{(m_n - m_p)^2}{4m_n m_p} \approx 4,74 \cdot 10^{-7},$$

dlatego w obliczeniach nie będziemy rozróżniali mas nukleonów. W rozkładzie Γ^μ występuje macierz sigma; wyrugujemy ją wykonując rozkład Gordona. Zapiszmy równanie Diraca dla spinoru neutronu:

$$(p_\kappa \gamma^\kappa - m_n)u(\mathbf{p}, s) = 0,$$

i dirakowskiego sprzężenia spinoru protonu:

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s')(p'_\kappa \gamma^\kappa - m_p) = 0.$$

Na ich mocy spełniona jest tożsamość

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[(p'_\kappa \gamma^\kappa - m_p) \gamma^\mu + \gamma^\mu (p_\kappa \gamma^\kappa - m_n) \right] u(\mathbf{p}, s) = 0,$$

którą można zapisać także jako

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[p'_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\mu + p_\kappa \gamma^\mu \gamma^\kappa - (m_n + m_p) \gamma^\mu \right] u(\mathbf{p}, s) = 0.$$

Występujący w nawiasie kwadratowym iloczyn macierzy gamma wyrazimy przez ich komutator:

$$\gamma^\kappa \gamma^\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\kappa) = \frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\kappa + 2\eta^{\kappa\mu}) = -i\frac{i}{2}[\gamma^\kappa, \gamma^\mu] + \eta^{\kappa\mu}$$

i wreszcie przez macierz sigma (patrz Dodatek A):

$$\gamma^\kappa \gamma^\mu = \eta^{\kappa\mu} + i\sigma^{\mu\kappa},$$

analogicznie

$$\gamma^\mu \gamma^\kappa = \eta^{\mu\kappa} - i\sigma^{\mu\kappa}.$$

Zastosowanie otrzymanych związków prowadzi do równości

$$p'_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\mu + p_\kappa \gamma^\mu \gamma^\kappa = p'_\kappa \eta^{\kappa\mu} + p_\kappa \eta^{\mu\kappa} + i(p' - p)_\kappa \sigma^{\mu\kappa} = p'^\mu + p^\mu + iq_\kappa \sigma^{\mu\kappa},$$

z której wynika równanie

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') i q_\kappa \sigma^{\mu\kappa} u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[2M\gamma^\mu - (p' + p)^\mu \right] u(\mathbf{p}, s).$$

Skorzystanie z niego umożliwia przepisanie macierzy prądu hadronowego w postaci

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu (F_V^1 + \xi F_V^2) - \frac{(p + p')^\mu \xi F_V^2}{2M} + \gamma^\mu \gamma_5 F_A + \gamma_5 \frac{q^\mu F_P}{M}, \quad (2.6)$$

która posłuży nam do dalszych obliczeń.

Wyliczenie $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$

Teraz przystąpmy do obliczenia tensora hadronowego $H^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{s, s'} \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\nu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle^* \\ &= \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{s, s'} \left(\cos \theta_C \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) \right) \left(\cos \theta_C \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Gamma^\nu u(\mathbf{p}, s) \right)^* \\ &= M^2 \sum_{s, s'} \left(\bar{u}(\mathbf{p}', s') \Gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) \right) \left(u^\dagger(\mathbf{p}, s) \gamma_0 \Gamma^\nu u(\mathbf{p}', s') \right)^*. \end{aligned}$$

Rozpiszmy na komponenty wyrażenie w drugim dużym nawiasie:

$$\begin{aligned} u^\dagger(\mathbf{p}', s') \gamma_0 \Gamma^\nu u(\mathbf{p}, s) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left(\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{p}', s') \right)_\alpha \left(\gamma_0 \Gamma^\nu \right)_{\alpha\beta} \left(u(\mathbf{p}, s) \right)_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left(u(\mathbf{p}, s) \right)_\beta^* \left(\gamma_0 \Gamma^\nu \right)_{\alpha\beta} \left(\mathbf{u}(\mathbf{p}', s') \right)_\alpha, \end{aligned}$$

bo w tej postaci łatwo jest wykonać jego sprzężenie zespolone:

$$\begin{aligned} \left(u^\dagger(\mathbf{p}', s') \gamma_0 \Gamma^\nu u(\mathbf{p}, s) \right)^* &= \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left(u(\mathbf{p}', s') \right)_\alpha \left(\gamma_0 \Gamma^\nu \right)_{\alpha\beta}^* \left(u(\mathbf{p}, s) \right)_\beta^* \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left(u(\mathbf{p}, s) \right)_\beta^* \left(\gamma_0 \Gamma^\nu \right)_{\alpha\beta}^* \left(\mathbf{u}(\mathbf{p}', s') \right)_\alpha \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left(\mathbf{u}^\dagger(\mathbf{p}, s) \right)_\beta \left((\gamma_0 \Gamma^\nu)^\dagger \right)_{\beta\alpha} \left(u(\mathbf{p}', s') \right)_\alpha. \end{aligned}$$

Powróćmy do notacji macierzowej:

$$\left(u^\dagger(\mathbf{p}', s')\gamma_0\Gamma^\nu u(\mathbf{p}, s)\right)^* = u^\dagger(\mathbf{p}, s)(\gamma_0\Gamma^\nu)^\dagger u(\mathbf{p}', s').$$

Między $u^\dagger(\mathbf{p}, s)$ a $(\gamma_0\Gamma^\nu)^\dagger$ wstawmy jednostkową macierz w postaci $(\gamma_0)^2$ i zapiszmy przy pomocy sprzężeń Diraca:

$$\left(u^\dagger(\mathbf{p}', s')\gamma_0\Gamma^\nu u(\mathbf{p}, s)\right)^* = \bar{u}(\mathbf{p}, s)\gamma_0(\gamma_0\Gamma^\nu)^\dagger u(\mathbf{p}', s').$$

Macierz γ_0 jest hermitowska (patrz Dodatek A), więc $(\gamma_0\Gamma^\nu)^\dagger = \Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0$:

$$\left(\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Gamma^\nu u(\mathbf{p}, s)\right)^* = \bar{u}(\mathbf{p}, s)\gamma_0\Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0 u(\mathbf{p}', s'). \quad (2.7)$$

Ostatnia równość pozwala wyrazić tensor hadronowy jako

$$H^{\mu\nu} = M^2 \sum_{s, s'} \bar{u}(\mathbf{p}', s')\Gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)\bar{u}(\mathbf{p}, s)\gamma_0\Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0 u(\mathbf{p}', s'),$$

zaś własność rozwiązań równania Diraca o dodatniej częstotliwości (A.5):

$$\sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s)\bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) = \left(\frac{p_\mu\gamma^\mu + M}{2M}\right)_{\alpha\beta},$$

umożliwia przekształcenie go następująco:

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= M^2 \sum_{s'} \bar{u}(\mathbf{p}', s')\Gamma^\mu \frac{p_\kappa\gamma^\kappa + M}{2M} \gamma_0\Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0 u(\mathbf{p}', s') \\ &= M^2 \sum_{s'} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}', s') \left(\Gamma^\mu \frac{p_\kappa\gamma^\kappa + M}{2M} \gamma_0\Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0\right)_{\alpha\beta} u_\beta(\mathbf{p}', s') \\ &= M^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left(\Gamma^\mu \frac{p_\kappa\gamma^\kappa + M}{2M} \gamma_0\Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0\right)_{\alpha\beta} \left(\frac{p'^\sigma\gamma_\sigma + M}{2M}\right)_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Tensor $H^{\mu\nu}$ w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$H^{\mu\nu} = M^2 \text{Tr} \left(\Gamma^\mu \frac{p_\kappa\gamma^\kappa + M}{2M} \gamma_0\Gamma^{\nu\dagger}\gamma_0 \frac{p'^\sigma\gamma_\sigma + M}{2M}\right). \quad (2.8)$$

Wyliczenie śladu i podstawienie $p' = p + q$ (patrz Dodatek B.2) daje

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[8p^\mu p^\nu w_1 + 4(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)w_1 - 2q^\mu q^\nu w_2 + 2\eta^{\mu\nu} w_3 + 8i\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\kappa q_\lambda w_4 \right],$$

ze współczynnikami w_i danymi równaniami (B.4). W Dodatku B.1 otrzymaliśmy tensor leptonowy:

$$L_{\mu\nu} = 2k_\mu k_\nu - (k_\mu q_\nu + q_\mu k_\nu) + \frac{1}{2}(q^2 - m_l^2)\eta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma,$$

więc możemy przystąpić do kontrakcji obu tensorów. Najpierw wykonajmy zwiężenia cząstkowe:

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(4p \cdot k p \cdot k - 4p \cdot k p \cdot q + M^2(q^2 - m_l^2)), \\
(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) L_{\mu\nu} &= 4p \cdot k k \cdot q - (2p \cdot k q^2 + 2p \cdot q k \cdot q) + p \cdot q(q^2 - m_l^2), \\
q^\mu q^\nu L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(4k \cdot q k \cdot q - 4k \cdot q q^2 + q^2(q^2 - m_l^2)), \\
\eta^{\mu\nu} L_{\mu\nu} &= -2k \cdot q + 2(q^2 - m_l^2), \\
i\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\kappa q_\lambda L_{\mu\nu} &= -\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\kappa q_\lambda \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma = -2(\delta_\sigma^\kappa \delta_\rho^\lambda - \delta_\rho^\kappa \delta_\sigma^\lambda) p_\kappa q_\lambda k^\rho q^\sigma \\
&= 2p \cdot k q^2 - 2p \cdot q k \cdot q.
\end{aligned}$$

Przy kontrakcji epsilonów skorzystaliśmy z (A.1). Wyliczmy, ile wynoszą występujące w zwiężeniach cząstkowych iloczyny skalarne $p \cdot q$ oraz $k \cdot q$. W tym celu skorzystajmy z ostatniej równości w (B.3), którą można zapisać też

$$2p^2 - 2p \cdot p' = q^2,$$

a po wyodrębnieniu przekazu pędu $q = p' - p$

$$p \cdot q = -\frac{1}{2}q^2. \quad (2.9)$$

Przekaz pędu wyraża się również $q = k - k'$, zatem

$$q^2 = k^2 - 2k \cdot k' + k'^2 = 2k \cdot (k - k') - k^2 + k'^2 = 2k \cdot q - m_\nu^2 + m_l^2.$$

Masę neutrina zaniedbujemy w porównaniu z masą leptonu naładowanego, więc iloczyn $k \cdot q$ wynosi

$$k \cdot q = \frac{1}{2}(q^2 - m_l^2). \quad (2.10)$$

Wstawienie (2.9) i (2.10) do zwiężeń cząstkowych daje w wyniku

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(4p \cdot k p \cdot k + 2p \cdot k q^2 + M^2(q^2 - m_l^2)), \\
(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) L_{\mu\nu} &= -2m_l^2 p \cdot k, \\
q^\mu q^\nu L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}m_l^2(m_l^2 - q^2), \\
\eta^{\mu\nu} L_{\mu\nu} &= q^2 - m_l^2, \\
i\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\kappa q_\lambda L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}q^2(4p \cdot k + q^2 - m_l^2),
\end{aligned}$$

więc kontrakcja tensora leptonowego z hadronowym ma postać

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[4w_1(4p \cdot k p \cdot k + 2p \cdot k q^2 + M^2(q^2 - m_l^2)) - 8m_l^2 w_1 p \cdot k \right. \\
&\quad \left. + m_l^2 w_2 (q^2 - m_l^2) + 2w_3 (q^2 - m_l^2) + 4w_4 q^2 (4p \cdot k + q^2 - m_l^2) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[w_1 (16p \cdot k p \cdot k + 8p \cdot k (q^2 - m_l^2)) + 4w_1 M^2 (q^2 - m_l^2) \right. \\
&\quad \left. + (q^2 - m_l^2)(m_l^2 w_2 + 2w_3) + 4w_4 q^2 (4p \cdot k + q^2 - m_l^2) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[w_1 (4p \cdot k + q^2 - m_l^2)^2 - w_1 (q^2 - m_l^2)^2 + 4w_1 M^2 (q^2 - m_l^2) \right. \\
&\quad \left. + (q^2 - m_l^2)(m_l^2 w_2 + 2w_3) + 4w_4 q^2 (4p \cdot k + q^2 - m_l^2) \right].
\end{aligned}$$

Występujące w nawiasie kwadratowym wyrażenia można uporządkować według wzrastającej potęgi $(4p \cdot k + q^2 - m_l^2)$:

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[(m_l^2 - q^2) \left(w_1 (q^2 - 4M^2) - 2w_3 - m_l^2 (w_1 + w_2) \right) \right. \\
&\quad \left. + 4w_4 q^2 (4p \cdot k + q^2 - m_l^2) + w_1 (4p \cdot k + q^2 - m_l^2)^2 \right].
\end{aligned}$$

W pierwszej linijce równania wyodrębniliśmy czynniki mnożone przez masę leptonu naładowanego, bo przy energii rzędu GeV dla elektronu i mionu jest ona zaniedbywalna. Przekonajmy się, że $(4p \cdot k + q^2 - m_l^2)$ to różnica zmiennych Mandelstama $s = (p + k)^2$ i $u = (p - k')^2$:

$$\begin{aligned}
s - u &= (p + k)^2 - (p - k')^2 = 2p \cdot k + k^2 + 2p \cdot k' - k'^2 \\
&= 2p \cdot k + k^2 + 2p \cdot (k - q) - k'^2 = 4p \cdot k + k^2 + q^2 - k'^2.
\end{aligned}$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z zależności (2.9). Masę neutrina możemy pominąć bez utraty dokładności:

$$s - u = 4p \cdot k + q^2 - m_l^2. \quad (2.11)$$

Otrzymany wynik pozwala zapisać zwięźlenie tensora leptonowego z hadronowym w zwartej postaci:

$$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = M^4 A(q^2) - M^2 B(q^2) (s - u) + C(q^2) (s - u)^2, \quad (2.12)$$

za pomocą niemianowanych funkcji q^2 :

$$\begin{aligned}
A(q^2) &\doteq \frac{m_l^2 - q^2}{4M^4} \left(w_1 (q^2 - 4M^2) - 2w_3 - m_l^2 (w_1 + w_2) \right), \\
B(q^2) &\doteq -\frac{q^2}{M^2} w_4, \\
C(q^2) &\doteq \frac{1}{4} w_1.
\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że współczynniki w_i zdefiniowaliśmy w (B.4). Do funkcji $B(q^2)$ wprowadziliśmy minus, co „zaowocowało” minusem w równaniu (2.12). Jest to konwencja stosowana w fizyce neutrin: dla antyneutrin czynnik zawierający $B(q^2)$ występuje z plusem, a dla neutrin — właśnie z minusem (por. praca C.H. Llewellyna Smitha [5] str. 301; omówimy to na stronie 24).

Wykonanie całki

Przywołajmy wyrażenie na przekrój czynny (2.5) z wyrażonymi jawnie energiami cząstek:

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2 E_n E_\nu} \frac{1}{u_{\text{rel}}} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^3 p'}{E_p} \delta^4(p + k - p' - k') L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

Po scałkowaniu względem $d^3 p'$ z wykorzystaniem pędowej części delty Diraca dostajemy

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2 E_n E_\nu} \frac{1}{u_{\text{rel}}} \int \frac{d^3 k'}{E_l E_p} \delta(E_n + E_\nu - E_p - E_l) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Od tej pory energia protonu oznacza $E_p = \sqrt{M^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}$. Całki wyrażającej przekrój czynny, nie możemy obliczyć w ogólnym przypadku, ponieważ w energii protonu występuje iloczyn $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}'$. Odwołując się do symetrii można powiedzieć, że takie zderzenie wyróżnia płaszczyznę (rozpiętą przez wektory \mathbf{p} i \mathbf{k}). Jeśli przejdziemy do układu odniesienia, w którym jedna z początkowych cząstek spoczywa, to sytuacja przed zderzeniem ma symetrię cylindryczną (wyróżniona jest tylko prosta — nastawienie wektora pędu poruszającej się cząstki). Wprawdzie produkty pojedynczego oddziaływania łamią tę symetrię, to jednak ze względu na izotropię przestrzeni oczekujemy, że symetria ponownie wystąpi przy rozpatrywaniu zależności od kąta znaczącej statystycznie liczby zderzeń. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że to neutron spoczywa (czyli $\mathbf{p} = \mathbf{0}$), a neutrino porusza się. Jest to bliskie doświadczeniom, bo obserwujemy w nich rozpraszanie wiązki neutrin na spoczywającej tarczy. Szybkość neutrina u_{rel} wynosi

$$u_{\text{rel}} = \frac{|\mathbf{k}|}{E_\nu} = \frac{\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}}{E_\nu} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_\nu}\right)^2}.$$

Jak zostało wspomniane wcześniej, w oddziaływaniach z udziałem prądów neutralnych energia neutrina musi być większa niż pewna energia progowa. Jej dokładną wartość wyliczymy później (jest ona podana w równaniu (2.21)),

teraz wystarczy nam oczywisty warunek, że przewyższa ona masę leptonu naładowanego. Zatem

$$\left(\frac{m_\nu}{E_\nu}\right)^2 \ll \left(\frac{m_\nu}{m_l}\right)^2 \ll \left(\frac{m_\nu}{m_e}\right)^2,$$

ponieważ najbliższym leptonem naładowanym jest elektron. Masa neutrina nie jest znana dokładnie, jednak wiemy, że wynosi co najwyżej kilka eV. Oznacza to, że

$$\left(\frac{m_\nu}{m_e}\right)^2 \ll 10^{-10},$$

czyli możemy przyjąć, że szybkość neutrina $u_{\text{rel}} = 1$. Zawsze, gdy masa neutrina wystąpi z inną masą, będziemy ją pomijać. W układzie spoczywającego neutronu przekrój czynny możemy zapisać

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2 M E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l E_p} \delta(M + E_\nu - E_p - E_l) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

Wyrażenie wewnątrz delty Diraca możemy potraktować jako funkcję kąta θ , zawartego między wektorem pędu neutrina a wektorem pędu leptonu:

$$\begin{aligned} f(\cos \theta) &= M + E_\nu - \sqrt{M^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} - E_l \\ &= M + E_\nu - \sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta + \mathbf{k}'^2} - E_l. \end{aligned}$$

Skorzystamy z zamiany argumentu delty Diraca (por. np. podręcznik B. Średniawy [6], str. 140):

$$\delta(f(\cos \theta)) = \left| \frac{\partial f(\cos \theta)}{\partial(\cos \theta)} \right|^{-1} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (2.15)$$

W tym celu musimy wyliczyć pochodną

$$\frac{\partial f(\cos \theta)}{\partial(\cos \theta)} = \frac{2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}{2\sqrt{M^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}} = \frac{E_\nu |\mathbf{k}'|}{E_p}.$$

Kąt, który odpowiada miejscu zerowemu funkcji $f(\cos \theta)$, oznaczmy θ_0 . Żeby go wyliczyć, przekształćmy równanie

$$M + E_\nu - \sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta_0 + \mathbf{k}'^2} - E_l = 0$$

do postaci

$$2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta_0 = 2E_\nu E_l - 2M(E_\nu - E_l) - m_l^2.$$

Wyraźmy wartości pędów poprzez odpowiednie energie:

$$2E_\nu \sqrt{E_l^2 - m_l^2} \cos \theta_0 = 2E_\nu E_l - 2M(E_\nu - E_l) - m_l^2,$$

co pozwala zapisać cosinus kąta między wektorem pędu neutrina a wektorem pędu leptonu jako

$$\cos \theta_0 = \frac{2E_l(E_\nu + M) - (2ME_\nu + m_l^2)}{2E_\nu \sqrt{E_l^2 - m_l^2}}. \quad (2.16)$$

Zamiana argumentu delty Diraca

$$\delta(M + E_\nu - E_p - E_l) = \frac{E_p}{E_\nu |\mathbf{k}'|} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0),$$

daje następujące wyrażenie na przekrój czynny:

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2 M E_\nu^2} \int \frac{d^3 k'}{E_l |\mathbf{k}'|} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

Otrzymaną całkę wygodnie będzie wyliczyć w układzie sferycznym. A priori kąt występujący w delcie Diraca nie ma żadnego związku z kątami po którym całkujemy. Możemy jednak wybrać kierunek osi z tak, aby jej kierunek wyznaczał wektor pędu neutrina \mathbf{k} , co doprowadzi do utożsamienia θ i kąta biegunowego. Wstawienie elementu objętości przestrzeni pędów leptonu

$$d^3 k' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d(\cos \theta) d\phi \quad (2.17)$$

umożliwia wyrażenie całki następująco:

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2 M E_\nu^2} \int \frac{|\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'|}{E_l} d(\cos \theta) d\phi \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

W wyrażeniu podcałkowym nie ma zależności od kąta azymutalnego ϕ , więc łatwo wykonać całkowanie względem obu kątów

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi M E_\nu^2} \int \frac{|\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'|}{E_l} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

Teraz przejdziemy od zmiennej $|\mathbf{k}'|$ do q^2 . W układzie spoczywającego neutronu równanie (2.9) przyjmuje postać

$$-\frac{1}{2}q^2 = M\omega = M(E_\nu - E_l), \quad (2.18)$$

gdzie ω jest przekazem energii. Oznacza to, że

$$\frac{1}{2}dq^2 = M dE_l.$$

Z kolei z równości $E_l^2 = m_l^2 + |\mathbf{k}'|^2$ wynika związek

$$E_l dE_l = |\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'|, \quad (2.19)$$

więc

$$\frac{1}{2}dq^2 = M \frac{|\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'|}{E_l},$$

czyli przekrój czynny w zmiennej q^2 wyraża się wzorem

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi M^2 E_\nu^2} \int dq^2 L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Całkowanie względem q^2 należy wykonać po całym dozwolonym fizycznie zakresie wartości. Ustalimy go korzystając ze związku (2.18). Zauważmy, że na energię leptonu nakładane są ograniczenia kinematyczne, w szczególności nie może ona być dowolnie mała, bo wtedy prawa strona (2.16) dążyłaby do minus nieskończoności, a lewa jest ograniczona. Z warunku $\cos^2 \theta_0 \leq 1$, czyli

$$\frac{(E_l 2(E_\nu + M) - (2ME_\nu + m_l^2))^2}{4E_\nu^2(E_l^2 - m_l^2)} \leq 1$$

otrzymujemy nierówność kwadratową na energię leptonu E_l :

$$E_l^2 M(2E_\nu + M) - E_l(2ME_\nu + m_l^2)(E_\nu + M) + \frac{1}{4}(2ME_\nu + m_l^2)^2 + m_l^2 E_\nu^2 \leq 0,$$

której wyróżnik wynosi

$$\begin{aligned} \Delta &= E_\nu^2(2ME_\nu - m_l^2 + 2Mm_l)(2ME_\nu - m_l^2 - 2Mm_l) \\ &= 4M^2 E_\nu^2 \left[E_\nu - \left(\frac{m_l^2}{2M} - m_l \right) \right] \left[E_\nu - \left(\frac{m_l^2}{2M} + m_l \right) \right]. \end{aligned}$$

Dla każdego rodzaju leptonu pierwszy nawias kwadratowy ma miejsce zerowe w niefizycznym obszarze $E_\nu < 0$, zatem warunek istnienia rozwiązań nierówności: $\Delta \geq 0$ sprowadza się do warunku na energię neutrina:

$$E_\nu \geq (E_\nu)_{\text{thres}} = \frac{m_l^2}{2M} + m_l. \quad (2.21)$$

Przy energii dążącej od góry do $(E_\nu)_{\text{thres}}$, kąt między pędem neutrina a pędem leptonu dąży do zera, a przekrój czynny dąży do zera, bo dozwolony przedział energii leptonu maleje do punktu. Rozwiązanie nierówności na energię leptonu pozwala stwierdzić, że $E_l \in [(E_l)_A, (E_l)_B]$, gdzie

$$\begin{aligned}(E_l)_A &= \frac{(2ME_\nu + m_l^2)(E_\nu + M) - \sqrt{\Delta}}{2M(2E_\nu + M)}, \\ (E_l)_B &= \frac{(2ME_\nu + m_l^2)(E_\nu + M) + \sqrt{\Delta}}{2M(2E_\nu + M)},\end{aligned}\tag{2.22}$$

ponieważ $(E_l)_A$ ma minimalną wartość dla $E_\nu = (E_\nu)_{\text{thres}}$ i jest ona większa od masy leptonu. Odpowiednie granice przedziału dozwolonych wartości q^2 dostaniemy z (2.22), wykorzystując zależność (2.18):

$$\begin{aligned}(q^2)_A &= \frac{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta}}{2E_\nu + M}, \\ (q^2)_B &= \frac{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 + \sqrt{\Delta}}{2E_\nu + M}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Po wstawieniu zwężenia tensorów wyrażonego (2.12), do równania na przekrój czynny (2.20) i wyłączeniu przed całkę stałej M^4 otrzymujemy

$$\sigma = \frac{M^2 G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi E_\nu^2} \int dq^2 \left[A(q^2) - B(q^2) \frac{(s-u)}{M^2} + C(q^2) \frac{(s-u)^2}{M^4} \right],\tag{2.24}$$

przy czym występujące w nawiasie kwadratowym funkcje q^2 wyrażają się przez czynniki postaci następująco:

$$\begin{aligned}A(q^2) &\doteq \frac{m_l^2 - q^2}{4M^2} \left[|F_A|^2 \left(4 - \frac{q^2}{M^2} \right) - |F_V^1|^2 \left(4 + \frac{q^2}{M^2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{q^2}{M^2} |\xi F_V^2|^2 \left(1 + \frac{q^2}{4M^2} \right) - \frac{4q^2}{M^2} \Re(F_V^1 (\xi F_V^2)^*) \\ &\quad \left. - \frac{m_l^2}{M^2} \left(|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 + |F_A|^2 + 4\Re(F_A F_P^*) + \frac{q^2}{M^2} |F_P|^2 \right) \right], \\ B(q^2) &\doteq -\frac{q^2}{M^2} \Re((F_V^1 + \xi F_V^2) F_A^*), \\ C(q^2) &\doteq \frac{1}{4} \left(|F_V^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_V^2|^2 + |F_A|^2 \right).\end{aligned}$$

Całkowanie należy wykonać w granicach danych przez (2.23). Otrzymany wynik w pełni zgadza się z przytoczonym w pracy C.H. Llewellyna Smitha [5] na str. 301–302.

Jak dotąd nie wyraziliśmy jawnie czynników postaci. Przy niewielkich przekazach pędu dane doświadczalne dobrze opisywane są przez parametryzację dipolową. Pomocnicze funkcje

$$G_E^V(q^2) = \frac{1}{(1 - q^2/M_V^2)^2}, \quad G_M^V(q^2) = \frac{1 + \xi}{(1 - q^2/M_V^2)^2},$$

pozwalają zapisać czynniki nazywane wektorowymi jako

$$\begin{aligned} F_V^1(q^2) &= \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right)^{-1} \left[G_E^V(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} G_M^V(q^2) \right], \\ \xi F_V^2(q^2) &= \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right)^{-1} \left[-G_E^V(q^2) + G_M^V(q^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Czynnik pseudoskalarny F_P wiąże z czynnikiem osiowym (ang. *axial*) F_A relacja opisana w podrozdziale 19.4 książki Weinberga [4]:

$$F_A(q^2) = \frac{g_A}{(1 - q^2/M_A^2)^2}, \quad F_P(q^2) = \frac{2M^2 F_A(q^2)}{m_\pi^2 - q^2}, \quad (2.26)$$

gdzie $m_\pi = 139,57$ MeV jest masą pionu naładowanego. Do otrzymania wartości przekrojów czynnych potrzebne będą stałe:

ξ	3,706,
g_A	- 1,2573,
M_V	0,84 GeV,
M_A	1,032 GeV.

Przekonajmy się, że czynniki postaci nie mają punktów osobliwych, bo w obszarze kinematycznie dozwolonym zachodzi $q^2 > 0$. Wyrażając przekaz energii jako $\omega = E_n - E_p$ możemy zapisać

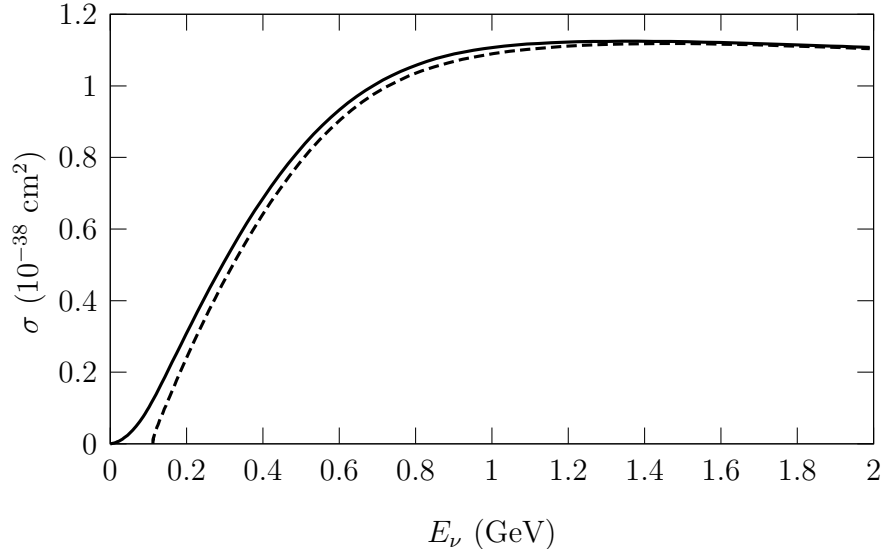
$$q^2 = (E_n - E_p)^2 - \mathbf{q}^2. \quad (2.27)$$

Rozpisując różnicę w nawiasie otrzymujemy:

$$E_n^2 - 2E_n E_p + E_p^2 - \mathbf{q}^2 = M^2 + \mathbf{p}^2 - 2E_n E_p + M^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 - \mathbf{q}^2.$$

Otrzymane wyrażenie wygląda czytelnie w układzie spoczywającego neutronu, w którym energię protonu oznaczmy $E_p^{\text{rest}.n}$:

$$2M^2 - 2M E_p^{\text{rest}.n} = 2M(M - E_p^{\text{rest}.n}) \leq 0.$$



Rys. 2.3 Przekrój czynny ν_e (linia ciągła) i ν_μ (l. przerywana)

Nierówność słaba wynika z faktu, że proton musi leżeć na powłoce masy, tzn. $E_p \geq M$. Pęd protonu nie może być równy pędowi neutronu², więc zachodzi nierówność ostra. Stąd norma przekazu czteropędu jest ujemna.

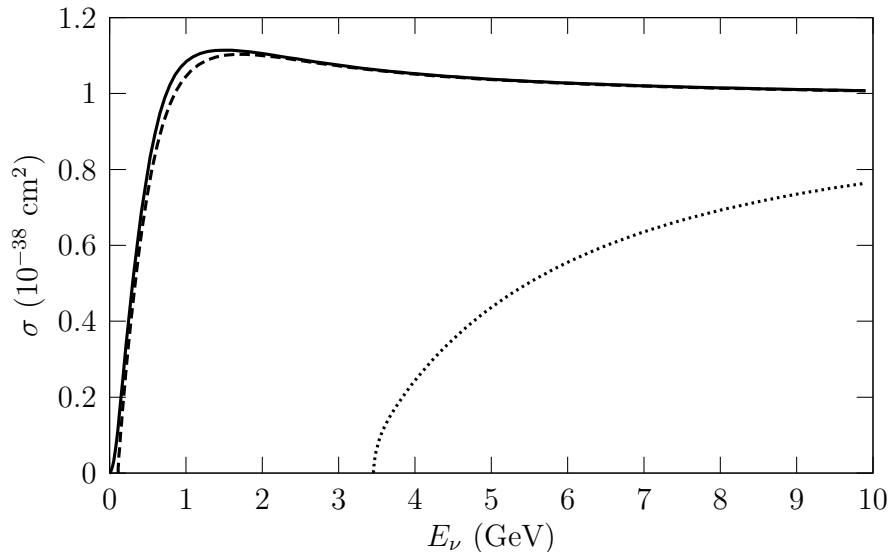
Całka w równaniu (2.24) jest zbyt skomplikowana, żeby wykonać ją analitycznie, dlatego korzysta się z obliczeń numerycznych. Uzupełnijmy potrzebne stałe, żeby przekrój czynny miał wymiar kwadratu długości w dowolnym układzie jednostek. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest bezwymiarowe, podobnie jak stała $M^2 G_F / (\hbar c)^3$ i $q^2 G_F / (\hbar c)^3$. Iloraz $(\hbar c) / E_\nu$ ma wymiar długości, więc po wstawieniu stałych otrzymujemy wzór

$$\sigma = (\hbar c)^2 \left(\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \right)^2 \frac{M^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi E_\nu^2} \int dq^2 \left[A(q^2) - B(q^2) \frac{(s-u)}{M^2} + C(q^2) \frac{(s-u)^2}{M^4} \right].$$

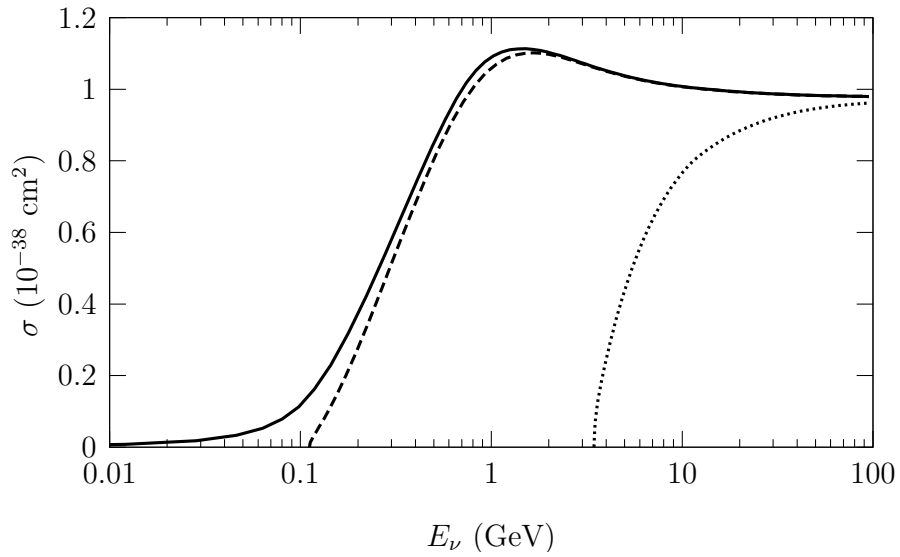
Stała Fermiego wynosi $G_F / (\hbar c)^3 = 1,166 \cdot 10^{-5} (\text{GeV})^{-2}$, a $\cos \theta_C = 0,9745$ to element V_{ud} macierzy Cabibbo–Kobayashi–Maskawy.

Otrzymane wyniki przedstawiamy na wykresach. Na Rys. 2.3 widoczne jest podobieństwo przekroju czynnego neutrino elektronowego i mionowego, różnica między nimi (wynikająca z innych energii progowych) staje się zaniedbywalna przy energii około 2 GeV. Przekrój neutrino taonowego dla niewielkich energii odbiega od pozostałych, patrz Rys. 2.4 na str. 23, jednak przy wysokich energiach wszystkie neutrino mają zbliżony kwazielastyczny przekrój czynny, co ilustruje Rys. 2.5.

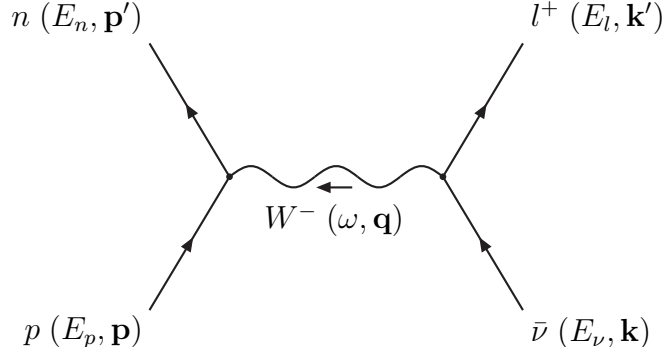
² Gdyby było inaczej, zachowanie pędu narzucałoby równość pędów elektronu i neutrino, co jednak (z uwagi na różnicę ich mas) jest wykluczone przez zachowanie energii.



Rys. 2.4 Przekrój czynny ν_e (l. ciągła), ν_μ (przerywana) i ν_τ (kropkowana)



Rys. 2.5 Przekrój czynny ν_e (l. ciągła), ν_μ (przerywana) i ν_τ (kropkowana)



Rys. 2.6

Antyneutrino

Śledząc obliczenia dla neutrino, otrzymamy przekrój czynny antyneutrino. Wzór

$$\sigma_a = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2} \frac{1}{u_{\text{rel}}} \int d^3 k' d^3 p' \delta^4(p + k - p' - k') \prod_j \frac{1}{E_j} L_{\mu\nu}^a H_a^{\mu\nu}.$$

nie zmienia się, jeśli zdefiniujemy zmienne kinematyczne jak na Rys. 2.6. Wyliczając $L_{\mu\nu}^a$ musimy zastąpić $(1 - \gamma_5)$ przez $(1 + \gamma_5)$ i skorzystać z własności rozwiązań równania Diraca o ujemnej częstotliwości (A.6), co prowadzi do

$$L_{\mu\nu}^a = \frac{m_l m_\nu}{2} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{k^\rho \gamma_\rho - m_\nu}{2m_\nu} \gamma_\nu (1 + \gamma_5) \frac{k'^\sigma \gamma_\sigma - m_l}{2m_l} \right),$$

jednak ślady zawierające masę w liczniku są równe zero (por. Dodatek B.1):

$$L_{\mu\nu}^a = \frac{k^\rho k'^\sigma}{4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \right) = k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - k \cdot k' \eta_{\mu\nu} + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma,$$

więc $L_{\mu\nu}^a$ różni się od $L_{\mu\nu}$ tylko znakiem przy składniku zawierającym epsilon. Wyrażmy pęd leptonu za pomocą przekazu pędu:

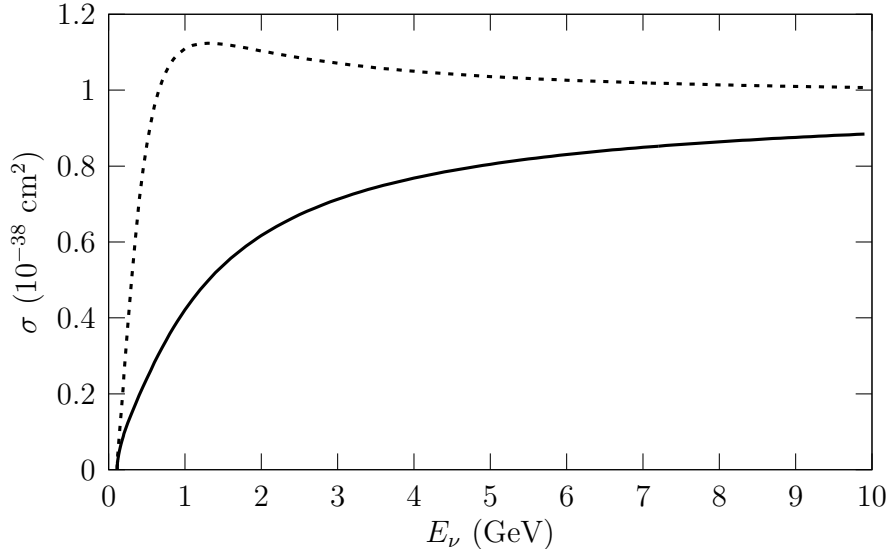
$$L_{\mu\nu}^a = 2k_\mu k'_\nu - (k_\mu q_\nu + q_\mu k'_\nu) + \frac{1}{2}(q^2 - m_l^2) \eta_{\mu\nu} - i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma.$$

Tensor hadronowy

$$H_a^{\mu\nu} = \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{s, s'} \langle n(\mathbf{p}', s') | j_a^\mu(0) | p(\mathbf{p}, s) \rangle \langle n(\mathbf{p}', s') | j_a^\nu(0) | p(\mathbf{p}, s) \rangle^*$$

możemy przekształcić następująco:

$$\begin{aligned} H_a^{\mu\nu} &= \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{s, s'} \langle p(\mathbf{p}, s) | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}', s') \rangle^* \langle p(\mathbf{p}, s) | j^\nu(0) | n(\mathbf{p}', s') \rangle \\ &= \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{s, s'} \langle p(\mathbf{p}, s) | j^\nu(0) | n(\mathbf{p}', s') \rangle \langle p(\mathbf{p}, s) | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}', s') \rangle^*, \end{aligned}$$



Rys. 2.7 Przekrój czynny $\bar{\nu}_\mu$ (l. ciągła) i ν_μ (kropkowana)

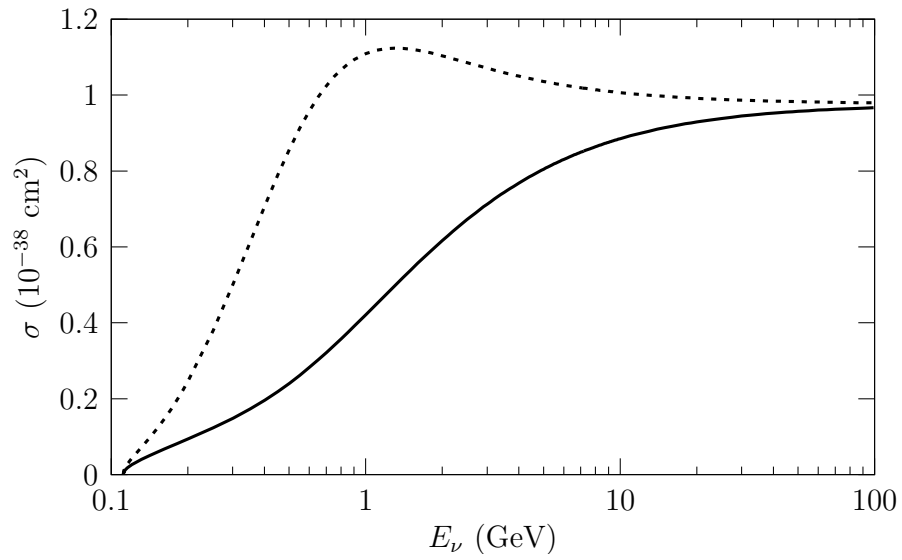
więc jest on równy tensorowi hadronowemu (B.1) z zamienionymi miejscami pędami p' i p oraz wskaźnikami μ i ν . Uważne przeanalizowanie równania (B.2) pozwala stwierdzić, że zachodzi równość

$$H_a^{\mu\nu} = H^{\mu\nu}.$$

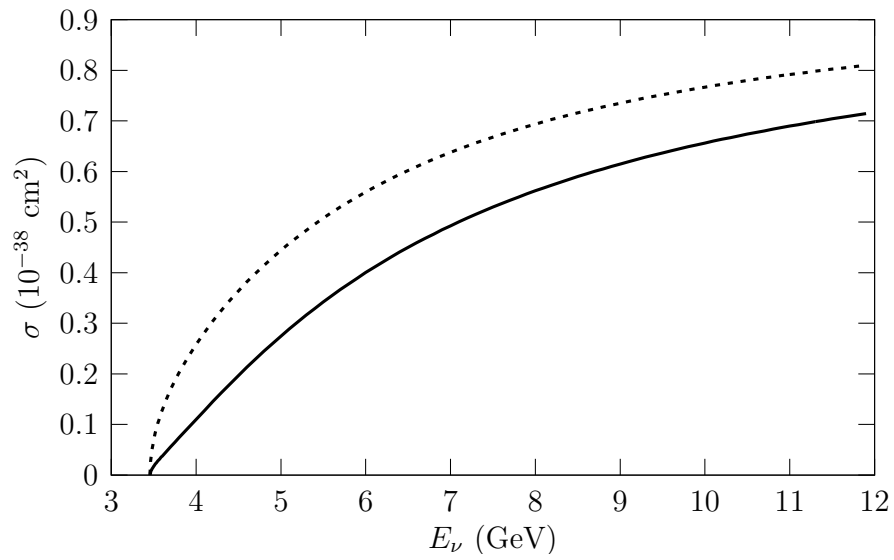
Skoro część symetryczna $L_{\mu\nu}^a$ jest równa części symetrycznej $L_{\mu\nu}$, to zwięźlenie $L_{\mu\nu}^a H_a^{\mu\nu}$ różni się od $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$ tylko znakiem składnika powstającego z kontrakcji epsilon'ów, co przekłada się na zmianę znaku przy współczynniku $B(q^2)$ w (2.12). Stąd zwięźlenie tensorów przy zderzeniu antyneutrino ze swobodnym protonem ma postać

$$L_{\mu\nu}^a H_a^{\mu\nu} = M^4 A(q^2) + M^2 B(q^2) (s - u) + C(q^2) (s - u)^2.$$

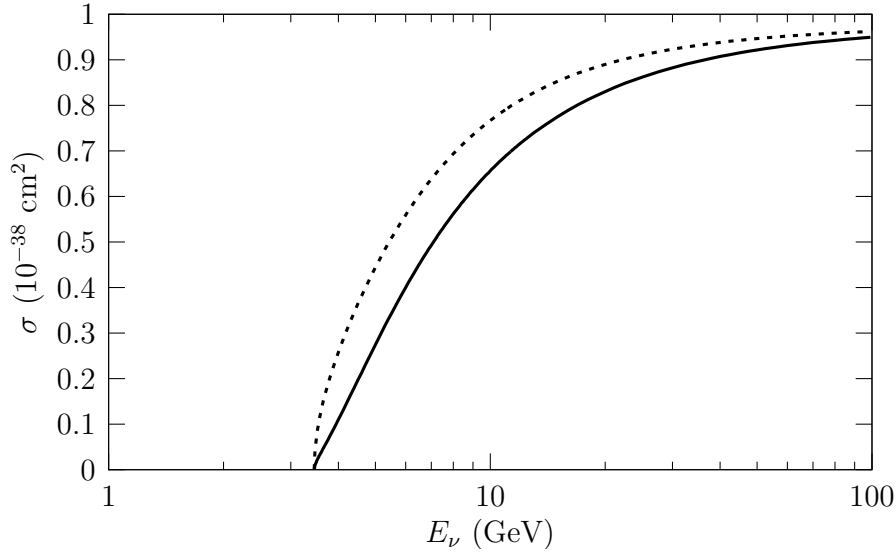
Jak przekonaliśmy się na Rys. 2.4, przekrój czynny neutrino elektronowego i mionowego różni się nieznacznie, dlatego w dalszej części pracy będziemy prezentowali wyniki tylko dla neutrino mionowego i taonowego. Rysunki 2.7, 2.8, 2.9 i 2.10 pokazują, że przekrój czynny antyneutrino jest mniejszy niż neutrino o tej samej energii, jednak zrównuje się z nim dla $E_\nu \rightarrow \infty$. Jest to przykład funkcjonowania twierdzenia Pomeranchuka, które w uogólnionej postaci można znaleźć w pracy Weinberga [7] i podrozdziale 10.8 jego książki [3]. Rysunek 2.5 pozwala wyciągnąć silniejszy wniosek: wszystkie neutrino i antyneutrino mają w granicy $E_\nu \rightarrow \infty$ jednakowy przekrój czynny na procesy kwazielastyczne. Teraz zajmiemy się obliczeniem jego wartości.



Rys. 2.8 Przekrój czynny $\bar{\nu}_\mu$ (l. ciągła) i ν_μ (kropkowana)



Rys. 2.9 Przekrój czynny $\bar{\nu}_\tau$ (l. ciągła) i ν_τ (kropkowana)



Rys. 2.10 Przekrój czynny $\bar{\nu}_\tau$ (l. ciągła) i ν_τ (kropkowana)

Granica wysokoenergetyczna

Ta część pracy ma charakter matematycznej analizy wyrażenia na przekrój czynny (2.24), która umożliwi wyliczenie jego wysokoenergetycznej granicy. Abstrahujemy w niej od wielu fizycznych subtelności. Staranne fizycznie rozumowanie nie może być przeprowadzone w obrębie teorii Fermiego, której kluczowym założeniem jest $q^2 \ll m_W^2$, jednak nawet przy bardzo wysokiej energii neutrina istotne są tylko niskie wartości q^2 . Wyliczając (2.24) nie uwzględnialiśmy poprawek promienistych, które mogą stać się znaczące. Przyjmijmy najprostsze — dipolowe — czynniki postaci, które dla wysokich przekazów pędu nie opisują danych pomiarowych dostatecznie dobrze. Za obliczeniami, które tutaj przedstawimy, przemawia jednak ich prostota i to, że otrzymana wartość graniczna nie odbiega znacząco od (2.24) już przy stosunkowo niewielkich energiach, szczególnie dla neutrina mionowego (a tym samym — elektronowego), patrz Tab. 2.1 na stronie 28.

Jeśli energia neutrino w stosunku do $M^{\max} = \max\{m_l, M, M_V, M_A\}$ jest tak wysoka, że $M^{\max}/E_\nu \ll 1$ to uprością się granice całkowania (2.23) i wyrażenie podcałkowe w równaniu (2.24). Górną granicę całkowania możemy przekształcić następująco:

$$\begin{aligned}
 (q^2)_B &= \frac{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 + \sqrt{\Delta}}{2E_\nu + M} \frac{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta}}{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta}} \\
 &= \frac{(2ME_\nu^2 - m_l^2(E_\nu + M))^2 - \Delta}{(2E_\nu + M)(m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta})}.
 \end{aligned}$$

Neutrino	Błąd %	E_ν GeV
mionowe	7,0	3,99
	5,0	5,83
	3,0	10,00
taonowe	7,0	25,74
	5,0	33,79
	3,0	52,33

Tab. 2.1

W liczniku występuje Δ , którą wygodnie będzie wstawić w postaci

$$\Delta = (2ME_\nu^2 - m_l^2 E_\nu)^2 - 4m_l^2 M^2 E_\nu^2.$$

Otrzymamy w ten sposób wyrażenie

$$(q^2)_B = \frac{m_l^4 M}{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta}},$$

którego mianownik jest równy licznikowi dolnej granicy całkowania:

$$(q^2)_A = \frac{m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta}}{2E_\nu + M}.$$

Przy wysokich energiach znaczący wkład do Δ wnoszą tylko czynniki zawierające E_ν . Wykorzystamy tę własność, aby rozwinąć $\sqrt{\Delta}$ w szereg względem energii neutrina. Skoro

$$\Delta = 4M^2 E_\nu^2 \left[E_\nu^2 - \frac{m_l^2}{M} E_\nu + \frac{m_l^4}{4M^2} - m_l^2 \right] \approx 4M^2 E_\nu^4 \left[1 - \frac{m_l^2}{ME_\nu} \right],$$

to poprzestając na drugim wyrazie rozwinięcia w szereg otrzymujemy

$$\sqrt{\Delta} \approx 2ME_\nu^2 \left[1 - \frac{m_l^2}{2ME_\nu} \right] = 2ME_\nu^2 - m_l^2 E_\nu.$$

Zastosowanie tego przybliżenia pozwala stwierdzić, że

$$m_l^2(E_\nu + M) - 2ME_\nu^2 - \sqrt{\Delta} \approx m_l^2(2E_\nu + M) - 4ME_\nu^2.$$

Stąd przy wysokiej energii neutrina

$$\begin{aligned} (q^2)_A &\rightarrow -2ME_\nu, \\ (q^2)_B &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Przekrój czynny można rozpisać na sumę wyrażeń

$$\begin{aligned}
\alpha &\doteq \frac{M^2 G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi E_\nu^2} \int dq^2 A(q^2), \\
\beta &\doteq -\frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi E_\nu^2} \int dq^2 B(q^2) (s-u), \\
\kappa &\doteq \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi M^2 E_\nu^2} \int dq^2 C(q^2) (s-u)^2.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dla wartości granicy wysokoenergetycznej kluczowy jest czynnik $1/E_\nu^2$, który sprawia, że wyrazy rosnące wolniej niż kwadrat energii neutrina zbiegają do zera. W dodatku B.3 wyliczymy dokładnie κ i przekonamy się, że tylko ten składnik może dawać wkład różny od zera. Otrzymane tam wyrażenie to

$$\begin{aligned}
\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \sigma &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{6\pi} \left[M_V^2 + g_A^2 M_A^2 + \frac{2\xi(\xi+2)M_V^4}{(4M^2 - M_V^2)^2} (M^2 - M_V^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\xi(\xi+2)M_V^8}{(4M^2 - M_V^2)^3} \left(\frac{4M^2}{4M^2 - M_V^2} \ln \frac{4M^2}{M_V^2} - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia $\rho = 4M^2/M_V^2$ i $\mu = \xi + 1$, możemy zwięźle zapisać:

$$\begin{aligned}
\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \sigma &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{6\pi} \left[M_V^2 + g_A^2 M_A^2 + 2M^2 \frac{\mu^2 - 1}{(\rho - 1)^2} \left(1 - \frac{4}{\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. + 3M_V^2 \frac{\mu^2 - 1}{(\rho - 1)^3} \left(\frac{\rho}{\rho - 1} \ln(\rho) - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Wstawienie stałych \hbar i c prowadzi do wzoru

$$\begin{aligned}
\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \sigma &= (\hbar c)^2 \left(\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta_C}{6\pi} \left[M_V^2 + g_A^2 M_A^2 + 2M^2 \frac{\mu^2 - 1}{(\rho - 1)^2} \left(1 - \frac{4}{\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. + 3M_V^2 \frac{\mu^2 - 1}{(\rho - 1)^3} \left(\frac{\rho}{\rho - 1} \ln(\rho) - 1 \right) \right],
\end{aligned}$$

zatem wartość liczbowa granicy wysokoenergetycznej wynosi

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \sigma = 0,95 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2.$$

Rozdział 3

Jądro atomowe

Wyniki otrzymane w poprzednim rozdziale umożliwią nam obliczenie przekroju czynnego na zderzenie neutrina z jądrem atomowym. Proces rozproszenia na jądrze polega na przejściu od początkowego neutrina i jądra o liczbie masowej A do końcowego leptonu naładowanego, jądra o liczbie masowej $A-1$ i wyemitowanego protonu, patrz Rys. 3.1. Założymy, że możliwa jest separacja stanu neutronów i protonów w jądrze. W przybliżeniu IA (ang. *impulse approximation*) bozon W zostaje wychwycony przez pojedynczy nukleon, który po oddziaływaniach z jądrem jest wybity do stanu końcowego (w naszym przypadku neutron opuszcza jądro jako proton). Jeśli początkowy stan N neutronów w jądrze oznaczymy przez $|i^N\rangle_n$, a Z protonów — przez $|i^Z\rangle_p$, to cały stan początkowy przybierze postać

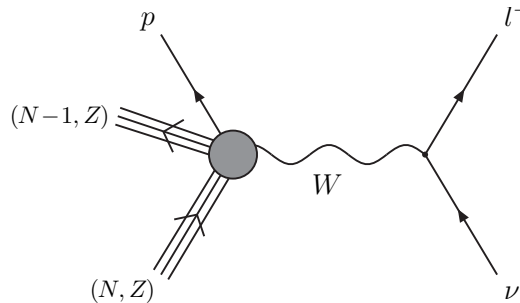
$$|\Psi_i^+\rangle = |k\rangle_\nu \otimes |i^N\rangle_n \otimes |0\rangle_l \otimes |i^Z\rangle_p.$$

W stanie końcowym

$$\langle\Psi_f^-| = \langle 0|_\nu \otimes \langle f^{N-1}|_n \otimes \langle k'|_l \otimes \langle p'|_p$$

stan $N-1$ neutronów zapisaliśmy $\langle f^{N-1}|_n$. Pozostałe cząstki opisaliśmy jak na str. 7. Wprowadźmy oznaczenie \mathbf{p}_A dla pędu jądra początkowego, a \mathbf{p}_{A-1} dla pędu jądra końcowego. Przekrój czynny wyraża się jako

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^3 p_{A-1}}{E_n} \frac{d^3 p'}{E_p} \frac{1}{u_{\text{rel}}} \delta^4(p_A + k - p_{A-1} - p' - k') L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \cdot \langle i^Z | a_p(\mathbf{p}') a_p^\dagger(\mathbf{p}') | i^Z \rangle \langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_{A-1}) a_n(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_{A-1}) | i^N \rangle,$$



Rys. 3.1

gdzie tensor hadronowy to $W^{\mu\nu}$. Jego konkretna postać zależy od modelu jądra i nie musi być równa tensorowi wyliczonemu dla swobodnego neutronu. Nie wyróżniliśmy spinów cząstek, żeby nie zaciemniać zapisu; należy zsumować po wszystkich ich wartościach. Do dalszych obliczeń musimy skorzystać z przybliżenia PWIA (ang. *plane wave impulse approximation*), to znaczy pominąć oddziaływanie między wybijanym nukleonem a końcowym jądrem. Pęd jądra początkowego możemy teraz rozłożyć na sumę pędu jądra końcowego i pędu neutronu:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_{A-1} + \mathbf{p}.$$

W układzie spoczywającego jądra początkowego $\mathbf{p}_A = \mathbf{0}$, więc $\mathbf{p}_{A-1} = -\mathbf{p}$. Przyjmiemy, że jest to układ tożsamy z układem laboratoryjnym, w którym przeprowadzimy rachunki. Deltę Diraca możemy rozpisać jako

$$\delta^4(p_A + k - p_{A-1} - p' - k') = \delta(E_i^A - E_f^{A-1} + E_\nu - E_p - E_l) \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}').$$

Wprowadźmy energię neutronu E_n jako różnicę między energią obu jąder:

$$\delta(E_i^A - E_f^{A-1} + E_\nu - E_p - E_l) = \int dE_n \delta(E_i^A - E_f^{A-1} - E_n) \delta(E_n + E_\nu - E_p - E_l).$$

Uwzględniając, że szybkość neutrina $u_{\text{rel}} = 1$ ze względu na jego energię, zapiszmy przekrój czynny:

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^4 p}{E_n} \frac{d^3 p'}{E_p} \delta^4(p + k - p' - k') \delta(E_i^A - E_f^{A-1} - E_n) \cdot L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \langle i^Z | a_p(\mathbf{p}') a_p^\dagger(\mathbf{p}') | i^Z \rangle \langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} P_h(\mathbf{p}, E_n) &= \langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle \delta(E_i^N - E_f^{N-1} - E_n), \\ P_p(\mathbf{p}') &= \langle i^Z | a_p(\mathbf{p}') a_p^\dagger(\mathbf{p}') | i^Z \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

które pozwalają wyrazić przekrój czynny jako

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^4 p}{E_n} \frac{d^3 p'}{E_p} \delta^4(p + k - p' - k') L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p}') P_h(\mathbf{p}, E_n),$$

a po scałkowaniu względem pędu protonu jako

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^4 p}{E_n E_p} \delta(E_n + E_\nu - E_p - E_l) L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h(\mathbf{p}, E_n), \quad (3.2)$$

gdzie $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. W przestrzeni pędów leptonu wybierzmy oś z tak, aby jej kierunek wyznaczał wektor pędu neutrina \mathbf{k} , wtedy skorzystanie z (2.17) i (2.19) umożliwia stwierdzenie, że

$$d^3k' = |\mathbf{k}'| E_l dE_l d(\cos \theta) d\phi,$$

z kątem między pędem leptonu \mathbf{k}' a pędem neutrina \mathbf{k} oznaczonym przez θ , jak w poprzednim rozdziale. Przejdziemy od zmiennych E_l i $\cos \theta$ do zmiennych ω i $|\mathbf{q}|$:

$$dE_l d(\cos \theta) = \mathcal{J} d\omega d|\mathbf{q}|.$$

Jakobian \mathcal{J} wynosi

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{dE_l}{d\omega} & \frac{dE_l}{d|\mathbf{q}|} \\ \frac{d(\cos \theta)}{d\omega} & \frac{d(\cos \theta)}{d|\mathbf{q}|} \end{vmatrix} = \frac{dE_l}{d\omega} \frac{d(\cos \theta)}{d|\mathbf{q}|} - \frac{dE_l}{d|\mathbf{q}|} \frac{d(\cos \theta)}{d\omega}.$$

Do wyrażenia $\cos \theta$ przez nowe zmienne wyliczmy kwadrat przekazu pędu:

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta + |\mathbf{k}'|^2 = E_\nu^2 - 2E_\nu |\mathbf{k}'| \cos \theta + |\mathbf{k}'|^2,$$

zatem

$$\cos \theta = \frac{E_\nu^2 + |\mathbf{k}'|^2 - |\mathbf{q}|^2}{2E_\nu |\mathbf{k}'|}.$$

Skoro energia leptonu $E_l = E_\nu - \omega$ nie zależy od $|\mathbf{q}|$, to wystarczy obliczyć pochodne

$$\begin{aligned} \frac{dE_l}{d\omega} &= -1, \\ \frac{d(\cos \theta)}{d|\mathbf{q}|} &= -\frac{|\mathbf{q}|}{E_\nu |\mathbf{k}'|}. \end{aligned}$$

Otrzymane zależności pozwalają zapisać

$$\frac{d^3k'}{E_l} = \frac{|\mathbf{q}|}{E_\nu} d\omega d|\mathbf{q}| d\phi.$$

Przekrój czynny przybiera teraz postać

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 E_\nu^2} \int |\mathbf{q}| d\omega d|\mathbf{q}| d\phi \frac{d^4p}{E_n E_p} \delta(E_n - E_p + \omega) L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h(\mathbf{p}, E_n).$$

Po scałkowaniu względem czteropędu neutronu nie będzie występowała zależność od kąta między wektorem \mathbf{p} a wektorem \mathbf{q} , więc możemy wykonać całkę względem ϕ :

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi E_\nu^2} \int |\mathbf{q}| d\omega d|\mathbf{q}| \frac{d^4p}{E_n E_p} \delta(E_n - E_p + \omega) L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h(\mathbf{p}, E_n).$$

Wprowadzenie oznaczenia

$$f(k, \omega, |\mathbf{q}|) = |\mathbf{q}| \int \frac{d^4 p}{E_n E_p} \delta(E_n - E_p + \omega) L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h(\mathbf{p}, E_n),$$

daje na przekrój czynny wzór

$$\sigma = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi E_\nu^2} \int d\omega d|\mathbf{q}| f(k, \omega, |\mathbf{q}|). \quad (3.3)$$

Dokonyjemy zamiany argumentu delty Diraca w $f(k, \omega, |\mathbf{q}|)$ korzystając z równania (2.15), analogicznie do obliczeń w przypadku zderzenia ze swobodnym neutronem:

$$\delta(E_n - E_p + \omega) = \left(\frac{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}{E_p} \right)^{-1} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0),$$

gdzie ϑ to kąt między przekazem pędu \mathbf{q} a pędem neutronu \mathbf{p} , zaś dla ϑ_0 argument delty ma miejsce zerowe:

$$0 = \omega + E_n - E_p = \omega + E_n - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \vartheta_0 + \mathbf{q}^2}.$$

Rozwiązanie powyższego równania daje

$$\cos \vartheta_0 = \frac{(\omega + E_n)^2 - (M^2 + \mathbf{p}^2) - \mathbf{q}^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}. \quad (3.4)$$

Po zamianie delty możemy zapisać

$$f(k, \omega, |\mathbf{q}|) = \int \frac{d^4 p}{E_n |\mathbf{p}|} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h(\mathbf{p}, E_n).$$

W przestrzeni pędów neutronu wybierzmy układ współrzędnych tak, by oś z była wyznaczana przez kierunek wektora przekazu pędu \mathbf{q} , wtedy analogicznie do (2.17)

$$d^4 p = |\mathbf{p}|^2 dE_n d|\mathbf{p}| d(\cos \vartheta) d\varphi.$$

Na razie nie rozstrzygamy, czy energię $E_n = E_i^A - E_f^{A-1}$ łączy z pędem \mathbf{p} związek $E_n^2 - \mathbf{p}^2 = M^2$. Wprowadźmy energię, która spełnia ten warunek z definicji:

$$\tilde{E}_n \doteq \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2},$$

wtedy

$$|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| = \tilde{E}_n d\tilde{E}_n.$$

Ten związek pozwala stwierdzić, że

$$d^4p = |\mathbf{p}| \tilde{E}_n dE_n d\tilde{E}_n d(\cos \vartheta) d\varphi,$$

więc po scałkowaniu względem $\cos \vartheta$ funkcja $f(k, \omega, |\mathbf{q}|)$ wynosi

$$f(k, \omega, |\mathbf{q}|) = \int \frac{\tilde{E}_n}{E_n} dE_n d\tilde{E}_n d\varphi L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} P_p(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h(\mathbf{p}, E_n). \quad (3.5)$$

Dalsze obliczenia wartości $f(k, \omega, |\mathbf{q}|)$ przeprowadzimy w obrębie konkretnych modeli jądra atomowego.

Przypomnijmy sobie, że przekaz energii można wyrazić jako $\omega = E_p - E_n$; zdefiniujemy $\tilde{\omega}$, która spełnia $\tilde{\omega} \doteq E_p - \tilde{E}_n$. Oznacza to, że ω i $\tilde{\omega}$ wiąże zależność

$$\tilde{\omega} + \tilde{E}_n = \omega + E_n. \quad (3.6)$$

Cosinus kąta między przekazem pędu \mathbf{q} a pędem neutronu \mathbf{p} wyliczony w (3.4) wobec (3.6) i definicji \tilde{E}_n przyjmuje postać

$$\cos \vartheta_0 = \frac{2\tilde{E}_n \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2 - \mathbf{q}^2}{2\sqrt{\tilde{E}_n^2 - M^2|\mathbf{q}|}}. \quad (3.7)$$

3.1 Gaz Fermiego

Najprostszy sposób modelowania jądra atomowego to przyjęcie, że nukleony znajdują się w trójwymiarowej studni potencjału i że nie ma między nimi oddziaływań (w rzeczywistych jądrach droga swobodna jest duża). Kwantowanie w skończonej objętości V — dla uproszczenia przyjmijmy, że to sześciennego pudła o boku L — wiąże się z wprowadzeniem dyskretnych pędów, ze względu na warunek zerowania się funkcji falowej na ścianach pudła. Z każdym dozwolonym punktem w przestrzeni pędów możemy związać komórkę o objętości¹

$$\frac{2\pi}{L} \times \frac{2\pi}{L} \times \frac{2\pi}{L} = \frac{(2\pi)^3}{V},$$

bo odległości między sąsiednimi punktami wynoszą $\frac{2\pi}{L}$ w każdym kierunku (wyjaśnienie tego faktu można znaleźć u Feynmana [8] str. 43–44). Jeśli możliwych stanów jest więcej niż cząstek w układzie, to w stanie podstawowym obsadzone zostaną wszystkie pędy do granicznej wartości p_F , zwanej pędem

¹ Pojawiające się w tych rozważaniach wielkości dotyczą przestrzeni pędów. Nie należy ich mylić z faktycznymi objętościami przypadającymi na cząstkę, czy dzielącymi cząstki odległościami.

Fermiego. W ogólnym przypadku, gdy liczba protonów w jądrze różni się od liczby neutronów, mamy do czynienia z dwoma pędami Fermiego. My ograniczymy nasze rozważania tylko do przypadku $N = Z$. Przy założeniu, że

$$\frac{2\pi}{L} \ll p_F, \quad (3.8)$$

czyli że objętość komórki jest znacznie mniejsza od objętości zajmowanej przez wszystkie obsadzone stany, możemy tę drugą wyrazić jako $\frac{4}{3}\pi p_F^3$. Nukleony mają spin $\frac{1}{2}$, więc w stanie o określonym pędzie mogą się znajdować dwie cząstki: o trzeciej składowej spinu skierowanej w górę i w dół. Zatem liczba cząstek N w układzie wynosi

$$N = 2 \frac{4}{3} \pi p_F^3 \frac{V}{(2\pi)^3} = \frac{p_F^3 V}{3\pi^2}. \quad (3.9)$$

Zastanówmy się, do jakich przypadków możemy zastosować przybliżenie gazu Fermiego. Jeżeli z równania (3.9) wyliczymy p_F i wstawimy do (3.8), to otrzymamy warunek

$$2 \ll \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} N} \approx \sqrt[3]{N}. \quad (3.10)$$

Liczba neutronów w jądrach atomowych jest mniejsza od $216 = 6^3$, więc faktyczne wartości N nie spełniają nierówności (3.10) w sposób zadowalający. Odpowiednią ilość neutronów zawierają jedynie gwiazdy neutronowe, więc stosowanie modelu gazu Fermiego znajduje pełne uzasadnienie tylko w ich przypadku. Dla „nieskończonego” jądra możemy obliczyć przekrój czynny na nukleon, przyjmując wartość p_F rzeczywistego jądra². Jeśli pomnożymy go przez ilość neutronów w skończonym jądrze, to w najprostszy sposób otrzymamy jego przekrój czynny. Nie możemy oczekiwać, że taki opis odda wszystkie subtelności zderzenia; spójrzmy na niego jak na pierwsze przybliżenie, które powinno zawierać najistotniejsze cechy złożonej rzeczywistości.

Wyliczmy postać (3.1) dla gazu Fermiego. Tylko stany o pędach, których norma jest mniejsza od pędu Fermiego są obsadzone, więc amplitudę występującą w $P_h(\mathbf{p}, E_n)$ możemy zapisać

$$\begin{aligned} \langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle &= \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \langle i^N | \delta_V(0) - a_n(\mathbf{p}) a_n^\dagger(\mathbf{p}) | i^N \rangle \\ &= \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \langle i^N | \delta_V(0) | i^N \rangle = \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x, \end{aligned}$$

² Pęd Fermiego wyznacza się mierząc objętość jądra (patrz Sz. Szczeniowski [1] § 4 i § 49).

gdzie skorzystaliśmy ze związku antyprzemienności dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji. Wykonując całkę po objętości jądra dostajemy

$$\langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \theta(p_F - |\mathbf{p}|).$$

W $P_p(\mathbf{p}')$ nie można utworzyć protonu poniżej poziomu Fermiego, więc

$$\langle i^Z | a_p(\mathbf{p}') a_p^\dagger(\mathbf{p}') | i^Z \rangle = \theta(|\mathbf{p}'| - p_F).$$

Otrzymane funkcje schodkowe możemy wyrazić w języku energii. Pierwsza z nich, tzn. $\theta(p_F - |\mathbf{p}|)$ daje warunek

$$|\mathbf{p}| < p_F,$$

który po podniesieniu do kwadratu możemy zapisać (norma trójwektora jest z definicji nieujemna, więc nierówność na pewno zachowuje zwrot):

$$0 < p_F^2 - \mathbf{p}^2 = M^2 + p_F^2 - M^2 - \mathbf{p}^2.$$

Zdefiniujmy energię Fermiego: $E_F = \sqrt{M^2 + p_F^2}$, która pozwoli wyrazić powyższą nierówność jako

$$0 < E_F^2 - \tilde{E}_n^2,$$

a po skorzystaniu z $\tilde{E}_n > 0$ jako

$$E_F - \tilde{E}_n > 0. \quad (3.11)$$

Funkcja $\theta(|\mathbf{p}'| - p_F)$ po analogicznych przekształceniach daje warunek

$$E_p - E_F > 0. \quad (3.12)$$

Dodanie stronami nierówności (3.11) i (3.12) prowadzi do wniosku

$$E_p - \tilde{E}_n = \tilde{\omega} > 0, \quad (3.13)$$

który będzie użyteczny do wyznaczenia dozwolonego kinematycznie zakresu całkowania. Dzięki otrzymanym związkom możemy zapisać

$$\begin{aligned} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) &= \theta(E_F - \tilde{E}_n), \\ \theta(|\mathbf{p}'| - p_F) &= \theta(E_p - E_F), \end{aligned} \quad (3.14)$$

więc dla gazu Fermiego równania (3.1) przyjmują postać

$$\begin{aligned} P_h^{FG}(\mathbf{p}, E_n) &= (2\pi)^{-3} V \theta(E_F - \tilde{E}_n) \delta(E_i^N - E_f^{N-1} - E_n), \\ P_p^{FG}(\mathbf{p}') &= \theta(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n - E_F), \end{aligned} \quad (3.15)$$

ponieważ energia protonu $E_p = \tilde{\omega} + \tilde{E}_n$.

3.1.1 Swobodny gaz Fermiego

Przyjmijmy, że nukleony w gazie Fermiego leżą na powłoce masy. Występujący w równaniu (3.5) tensor hadronowy $W^{\mu\nu}$ jest wtedy równy tensorowi dla swobodnego neutronu $H^{\mu\nu}$. Jądro początkowe i końcowe różnią się tylko obecnością swobodnego i nieoddziałującego neutronu o pędzie \mathbf{p} , więc

$$\delta(E_i^N - E_f^{N-1} - E_n) = \delta(\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} - E_n) = \delta(\tilde{E}_n - E_n).$$

Zapiszmy wzór (3.5) dla swobodnego gazu Fermiego:

$$f^{FFG}(k, \omega, |\mathbf{q}|) = \int dE_n d\tilde{E}_n d\varphi L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} P_{\mathbf{p}}^{FFG}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_{\mathbf{h}}^{FFG}(\mathbf{p}).$$

Funkcje (3.15) możemy teraz wyrazić

$$P_{\mathbf{h}}^{FFG}(\mathbf{p}, E_n) = (2\pi)^{-3} V \theta(E_F - \tilde{E}_n) \delta(\tilde{E}_n - E_n),$$

$$P_{\mathbf{p}}^{FFG}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \theta(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n - E_F).$$

Wobec warunku $E_n = \tilde{E}_n$ równanie (3.6) daje $\omega = \tilde{\omega}$. Wykorzystajmy deltę Diraca do scałkowania względem E_n :

$$f^{FFG}(k, \omega, |\mathbf{q}|) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\tilde{E}_n d\varphi \theta(E_F - \tilde{E}_n) \theta(\omega + \tilde{E}_n - E_F) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

Przekrój czynny dla jądra (3.3) wynosi

$$\sigma^{FFG} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi E_\nu^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\omega d|\mathbf{q}| d\tilde{E}_n d\varphi \theta(E_F - \tilde{E}_n) \theta(\omega + \tilde{E}_n - E_F) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

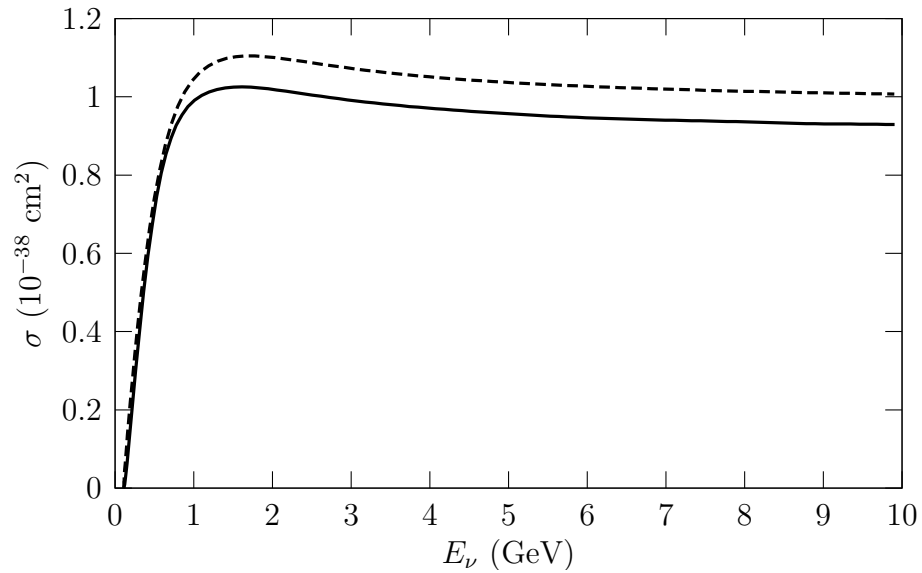
Wstawiając objętość V wyliczoną z (3.9) otrzymujemy przekrój czynny przypadający na neutron:

$$\frac{\sigma^{FFG}}{N} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi E_\nu^2} \frac{3}{8\pi p_F^3} \int d\omega d|\mathbf{q}| d\tilde{E}_n d\varphi \theta(E_F - \tilde{E}_n) \theta(\tilde{E}_n + \omega - E_F) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

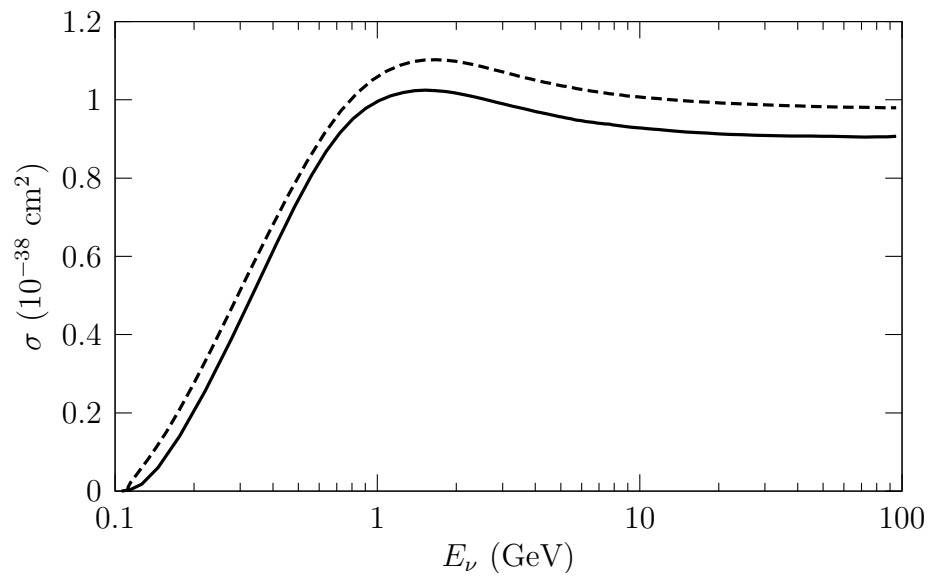
Wyprzedzając obliczenie granic całkowania na Rysunkach 3.2 i 3.3 na str. 38 przedstawiamy porównanie przekroju σ^{FFG} neutrina mionowego z przekrojem na zderzenie ze swobodnym neutronem, a na Rysunkach 3.4 i 3.5 na str. 39 analogiczne wykresy dla neutrina taonowego. Do obliczeń została przyjęta doświadczalna wartość pędu Fermiego dla tlenu, która wynosi 225 MeV.

Dla uniknięcia komplikacji przyjęliśmy, że nukleony w jądrze spełniają równanie Diraca. Za pracą V. Pandharipande [9] przytoczymy krótkie uzasadnienie, że nie ten warunek nie może być spełniony w stabilnych jądrach. Skoro początkowe jądro nie emituje nukleonów, to różnica $E_i^N - E_f^{N-1}$ musi być mniejsza od masy nukleonu. Energię początkowego neutronu E_n zdefiniowaliśmy jako równą tej różnicy, więc $E_n < M$.

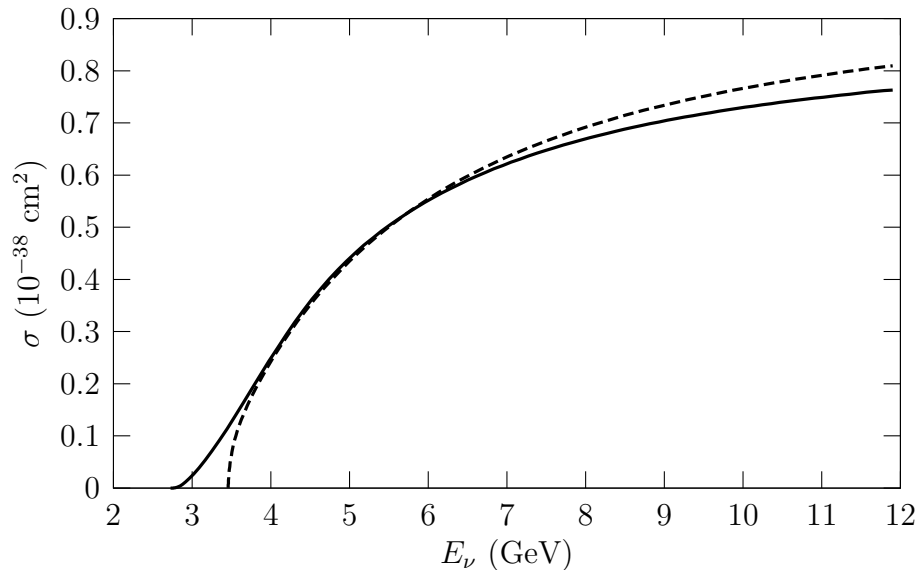
Wprowadźmy poprawki do modelu, by uwzględnić, że nukleony nie są na powłoce masy.



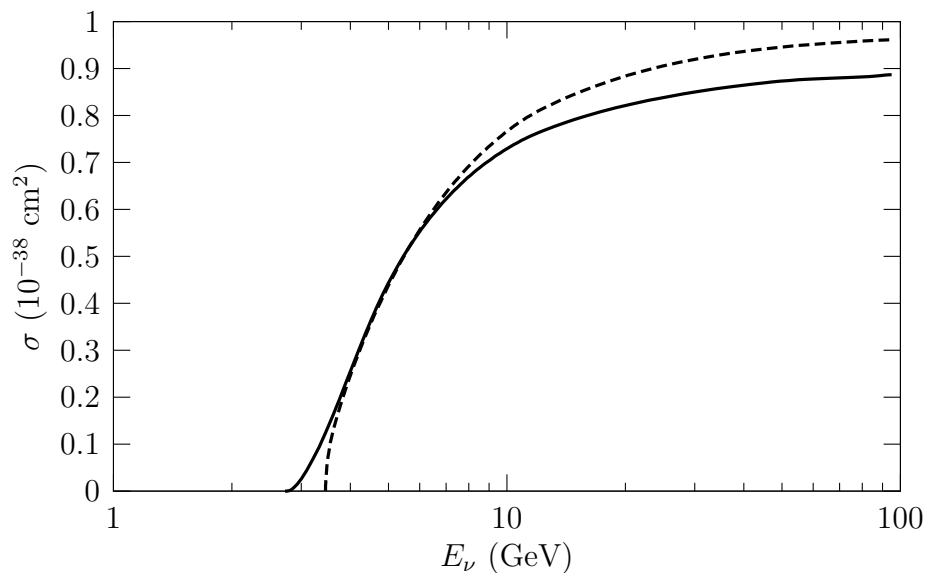
Rys. 3.2 Przekrój czynny ν_μ dla swobodnego gazu Fermiego (linia ciągła) i swobodnego neutronu (linia przerywana)



Rys. 3.3 Przekrój czynny ν_μ dla swobodnego gazu Fermiego (linia ciągła) i swobodnego neutronu (linia przerywana)



Rys. 3.4 Przekrój czynny ν_τ dla swobodnego gazu Fermiego (linia ciągła) i swobodnego neutronu (linia przerywana)



Rys. 3.5 Przekrój czynny ν_τ dla swobodnego gazu Fermiego (linia ciągła) i swobodnego neutronu (linia przerywana)

3.1.2 Związany gaz Fermiego

Swobodny neutron o pędzie \mathbf{p} ma energię $\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} \doteq \tilde{E}_n$. Skoro energia neutronu związanego w jądrze jest mniejsza, to możemy ją zapisać jako różnicę \tilde{E}_n i energii wiązania, która w ogólności może zależeć od $|\mathbf{p}|$. W naszych rozważaniach przyjmijmy stałą energię wiązania E_B ³, wtedy

$$\delta(E_i^N - E_f^{N-1} - E_n) = \delta(\tilde{E}_n - E_B - E_n).$$

Zapiszmy (3.15) dla związanego gazu Fermiego:

$$\begin{aligned} P_h^{BFG}(\mathbf{p}, E_n) &= (2\pi)^{-3} V \theta(E_F - \tilde{E}_n) \delta(\tilde{E}_n - E_B - E_n), \\ P_p^{BFG}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= \theta(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n - E_F). \end{aligned}$$

Przypomnijmy sobie, że wyrażając macierz prądu hadronowego (2.6) przez czynniki postaci powoływaliśmy się na równanie Diraca, więc tensor hadronowy $W^{\mu\nu}$ w (3.5) różni się od tensora wyliczonego dla swobodnego neutronu. Żeby przezwyciężyć tę trudność, skorzystamy z ekstrapolacji poza powłokę masy zaproponowanej przez T. de Foresta [12]: potraktujemy spinor oddziałującego nukleonu jako swobodny i przyjmijmy swobodne czynniki postaci, jednak założymy, że przekaz czteropędu do neutronu wynosi $\tilde{q} = (\tilde{\omega}, \mathbf{q})$. Będziemy to podkreślali pisząc tensor hadronowy z tyldą. Skoro oddziałujący neutron uważamy za swobodny, to energię E_n w mianowniku w (3.5) zastąpimy przez \tilde{E}_n :

$$f^{BFG}(k, \omega, |\mathbf{q}|) = \int dE_n d\tilde{E}_n d\varphi L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} P_p^{BFG}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h^{BFG}(\mathbf{p}, E_n).$$

Wstawmy jawną postać P_p^{BFG} i P_h^{BFG} :

$$\begin{aligned} f^{BFG}(k, \omega, |\mathbf{q}|) &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int dE_n d\tilde{E}_n d\varphi \delta(\tilde{E}_n - E_B - E_n) \\ &\quad \cdot \theta(E_F - \tilde{E}_n) \theta(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n - E_F) L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

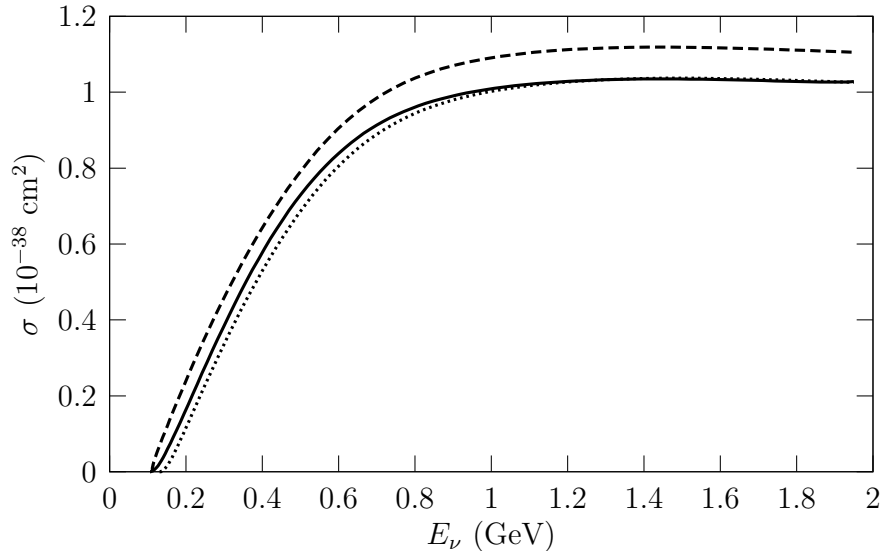
Skoro $E_n = \tilde{E}_n - E_B$, to równość (3.6) daje $\tilde{\omega} = \omega - E_B$. Po scałkowaniu względem E_n z użyciem delty Diraca otrzymujemy

$$f^{BFG}(k, \omega, |\mathbf{q}|) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\tilde{E}_n d\varphi \theta(E_F - \tilde{E}_n) \theta(\tilde{E}_n - E_B + \omega - E_F) L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu}.$$

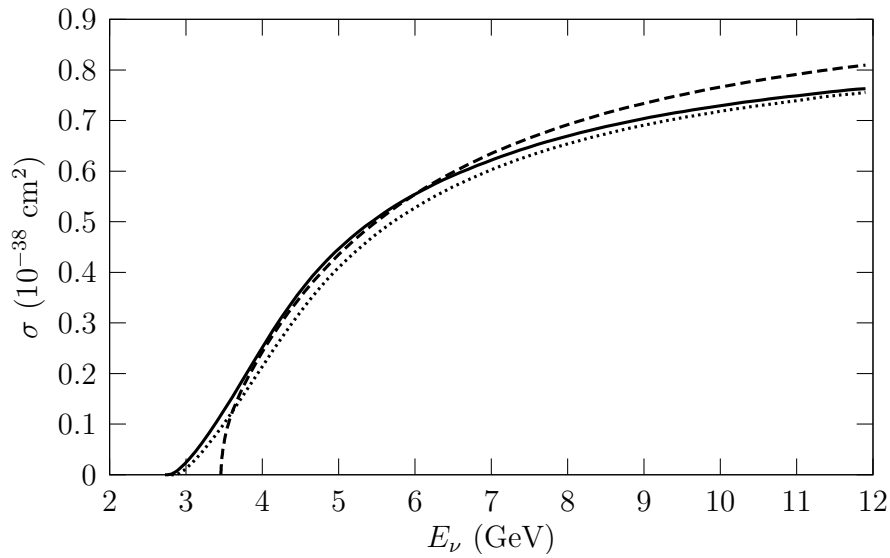
Dla przypadku związanego gazu Fermiego przekrój czynny na nukleon wynosi

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{BFG}}{N} &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi E_\nu^2} \frac{3}{8\pi p_F^3} \int d\omega d|\mathbf{q}| d\tilde{E}_n d\varphi \theta(E_F - \tilde{E}_n) \\ &\quad \cdot \theta(\tilde{E}_n - E_B + \omega - E_F) L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

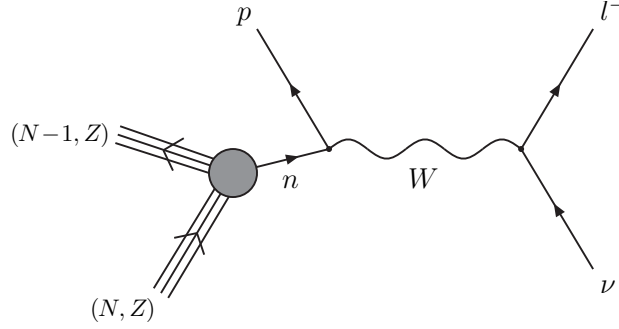
³ O metodzie wyznaczania E_B można przeczytać w pracy [10].



Rys. 3.6 Przekrój czynny ν_μ dla gazu Fermiego z $E_B = 27 \text{ MeV}$ (l. kropkowana), $E_B = 0$ (ciągła) i swobodnego neutronu (przerywana)



Rys. 3.7 Przekrój czynny ν_τ dla gazu Fermiego z $E_B = 27 \text{ MeV}$ (l. kropkowana), $E_B = 0$ (ciągła) i swobodnego neutronu (przerywana)



Rys. 3.8

Jeśli położymy $E_B = 0$, to powyższe wyrażenie redukuje się do przekroju czynnego swobodnego gazu Fermiego. Do obliczeń konsekwentnie przyjęta została wartość dla jąder tlenu: $E_B = 27 \text{ MeV}^4$. Dodatnia energia wiązania zwiększa energię progową neutrina. Dla neutrina mionowego, patrz Rys. 3.6, przy energii ok. 1 GeV zanika różnica między związanym a swobodnym gazem Fermiego, w przypadku neutrina taonowego potrzebna jest dużo wyższa energia, por. Rys. 3.7.

Zastosowane przez nas przybliżenia (tzn. PWIA i metodę de Foresta) bardzo dobrze obrazuje Rys. 3.8, wzorowany na rysunku z pracy [13]. Przyjęliśmy, że w rozpraszaniu uczestniczy *tylko jeden* neutron, który nie oddziałuje z jądrem i leży na powłoce masy, mimo że pozostałe nukleony są związane. Na ogół nie są to założenia szczególnie realistyczne, jednak, jak to często bywa w fizyce, musimy na nie przystać, żeby przemóc trudności. Należy jednak pamiętać o przybliżonym charakterze otrzymanego wyniku.

3.1.3 Granica niskiego pędu Fermiego i słabego wiązania

Na chwilę powróćmy do równania (3.2) na str. 31, żeby wyliczyć przekrój czynny w granicy $p_F/M \rightarrow 0$ i $E_B/M \rightarrow 0$ a jednocześnie dużego przekazu czteropędu: $|\mathbf{q}| \gg p_F$, $\omega \gg E_B$. Zastosujemy przybliżenie de Foresta, więc zastępujemy tensor hadronowy $W^{\mu\nu}$ przez $\tilde{H}^{\mu\nu}$, jednak przy dużym przekazu czteropędu $\tilde{H}^{\mu\nu} \rightarrow H^{\mu\nu}$, więc

$$\sigma^{BFG} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 M E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^4 p}{E_p} \delta(E_n + E_\nu - E_p - E_l) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} P_p^{BFG}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) P_h^{BFG}(\mathbf{p}, E_n).$$

Skoro $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| \rightarrow |\mathbf{q}|$, to $E_p \rightarrow (M^2 + |\mathbf{q}|^2)^{\frac{1}{2}}$, tzn. energia protonu nie zależy od $|\mathbf{p}|$. Zauważmy, że dla niskiej energii wiązania $\tilde{E}_n - E_B$ dąży do M . W funk-

⁴ Wartość E_B dla tlenu podajemy za pracą [11].

cyjach P_p^{BFG} i P_h^{BFG} przywróćmy postać funkcji schodkowych jak w (3.14):

$$\begin{aligned} P_h^{BFG}(\mathbf{p}, E_n) &= (2\pi)^{-3} V \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(M - E_n), \\ P_p^{BFG}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F). \end{aligned}$$

Po scałkowaniu względem energii neutronu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma^{BFG} &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{(2\pi)^2 M E_\nu} \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{E_l} \frac{d^3 p}{E_p} \delta(M + E_\nu - E_p - E_l) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \\ &\quad \cdot \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \theta(p_F - |\mathbf{p}|), \end{aligned}$$

Funkcja $\theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F)$ dąży do $\theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|) \equiv 1$ dla dużego przekazu pędu, więc w wyrażeniu podcałkowym od pędu neutronu \mathbf{p} zależy tylko druga funkcja schodkowa; scałkowanie względem niego sprowadza się do wyliczenia objętości kuli Fermiego:

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p \theta(p_F - |\mathbf{p}|) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi p_F^3}{3}.$$

Wykorzystanie związku (3.9), który określa liczbę neutronów w jądrze, pozwala zapisać

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p \theta(p_F - |\mathbf{p}|) = \frac{N}{2}.$$

Stąd przekrój czynny wynosi

$$\sigma^{BFG} = N \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2 M E_\nu} \int \frac{d^3 k'}{E_l E_p} \delta(M + E_\nu - E_p - E_l) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}.$$

Jeżeli porównamy otrzymany wynik z równaniem (2.14) na przekrój czynny swobodnego nukleonu, to przekonamy się, że zachodzi między nimi związek

$$\sigma^{BFG} = N\sigma,$$

to znaczy w granicy niskiego pędu Fermiego i słabego wiązania przy dużych przekazach pędu przekrój czynny na neutron jest równy przekrojowi na swobodnym neutronie. Wynik ten można też uzyskać numerycznie: przy $p_F = 1$ MeV i $E_B = 0$ przekrój czynny bardzo dobrze zgadza się z uzyskanym dla swobodnego neutronu.

3.1.4 Zakres całkowania

Do wyznaczenia pozostał dozwolony kinematycznie obszar zmienności przekazu energii, pędu i energii \tilde{E}_n we wzorze (3.16). To zagadnienie wygodnie

jest podzielić na dwie części: hadronową i leptonową, tzn. osobno wyliczyć warunki hadronowe, osobno leptonowe, a dopiero później wziąć ich iloczyn.

Równanie $\tilde{\omega} \doteq E_p - \tilde{E}_n$ pozwala stwierdzić, że energię protonu można wyrazić

$$E_p = \tilde{\omega} + \tilde{E}_n,$$

więc

$$M^2 + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 = (\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2.$$

Iloczyn skalarny $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ przybiera wartości między $-|\mathbf{p}||\mathbf{q}|$ a $+|\mathbf{p}||\mathbf{q}|$, zatem

$$(|\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|)^2 \leq (\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2 \leq (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|)^2,$$

czyli

$$||\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|| \leq \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} \leq |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|.$$

Pierwszą nierówność możemy rozpisać na dwie opuszczając moduł:

$$-\sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} \leq |\mathbf{p}| - |\mathbf{q}| \leq \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2},$$

a druga daje warunek

$$\sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} - |\mathbf{p}| \leq |\mathbf{q}|.$$

Łącznie pozwalają stwierdzić, że

$$|\sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} - |\mathbf{p}|| \leq |\mathbf{q}| \leq \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} + |\mathbf{p}|. \quad (3.17)$$

Wartość przekazu pędu jest dozwolona, jeśli istnieje neutron, który spełnia powyższe warunki. Górna granica wartości $|\mathbf{q}|$ rośnie ze wzrostem $|\mathbf{p}|$, więc ma maksymalną wartość dla pędu Fermiego. W (3.13) ustaliliśmy, że $\tilde{\omega} > 0$. Ze względu na $\tilde{\omega} = \omega - E_B$ oznacza to, że $\omega > E_B$, więc możemy opuścić moduł w dolnej granicy:

$$\sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} - |\mathbf{p}| \leq |\mathbf{q}|.$$

Wyliczmy pochodną wyrażenia $|\mathbf{q}|_- \doteq \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2} - |\mathbf{p}|$:

$$\frac{d|\mathbf{q}|_-}{d|\mathbf{p}|} = \frac{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)}{\sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2}} \frac{|\mathbf{p}|}{\tilde{E}_n} - 1 = \frac{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| - \tilde{E}_n \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2}}{\tilde{E}_n \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2}}.$$

Wprowadźmy oznaczenie $p \doteq \tilde{E}_n \sqrt{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2}$. Ustalimy znak pochodnej, usuwając pierwiastek z licznika:

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{q}|_-}{d|\mathbf{p}|} &= \frac{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| - p}{p} \frac{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| + p}{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| + p} = \frac{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 |\mathbf{p}|^2 - p^2}{p((\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| + p)} \\ &= \frac{(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 |\mathbf{p}|^2 - \tilde{E}_n^2 ((\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 - M^2)}{p(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| + p^2} = \frac{-(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)^2 M^2 + \tilde{E}_n^2 M^2}{p(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| + p^2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie możemy zapisać

$$\frac{d|\mathbf{q}|_-}{d|\mathbf{p}|} = -\frac{\tilde{\omega}(\tilde{\omega} + 2\tilde{E}_n)^2 M^2}{p(\tilde{\omega} + \tilde{E}_n)|\mathbf{p}| + p^2} < 0,$$

więc najmniejsza dozwolona wartość $|\mathbf{q}|$ również odpowiada p_F . Podsumowując, część hadronowa wymaga, aby $\omega \in [E_B, \infty]$ i $|\mathbf{q}| \in [|\mathbf{q}|_A^h, |\mathbf{q}|_B^h]$, gdzie

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}|_A^h &= \sqrt{(\omega - E_B + E_F)^2 - M^2} - p_F, \\ |\mathbf{q}|_B^h &= \sqrt{(\omega - E_B + E_F)^2 - M^2} + p_F. \end{aligned}$$

Rozumowanie (2.27) dla $\tilde{\omega} = \tilde{E}_n - E_p$ pozwala łatwo stwierdzić, że norma przekazu czteropędu \tilde{q} jest ujemna, czyli $\tilde{\omega} < |\mathbf{q}|$; łatwo sprawdzić, że dolna granica $|\mathbf{q}|_A^h$ spełnia to ograniczenie, więc nie wnosi ono nic nowego.

Podobnie wyliczymy warunek leptonowy. Energię leptonu można wyrazić w postaci $E_l = E_\nu - \omega$, więc $m_l \leq E_\nu - \omega$. Daje to warunek na przekaz energii:

$$\omega \leq E_\nu - m_l.$$

Kwadrat energii leptonu wynosi

$$m_l^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 = (E_\nu - \omega)^2,$$

więc

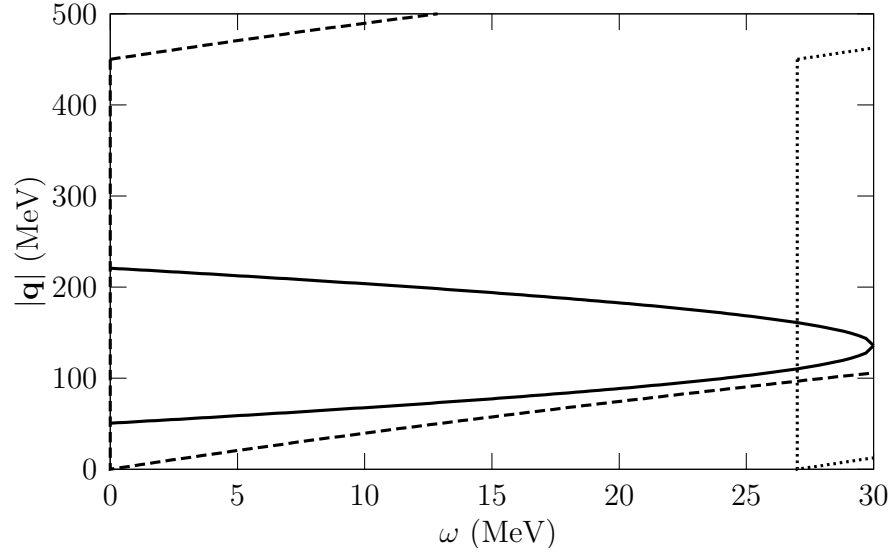
$$|E_\nu - |\mathbf{q}|| \leq \sqrt{(E_\nu - \omega)^2 - m_l^2} \leq |E_\nu + |\mathbf{q}||.$$

Rozwiązanie otrzymanych nierówności względem $|\mathbf{q}|$ ma postać

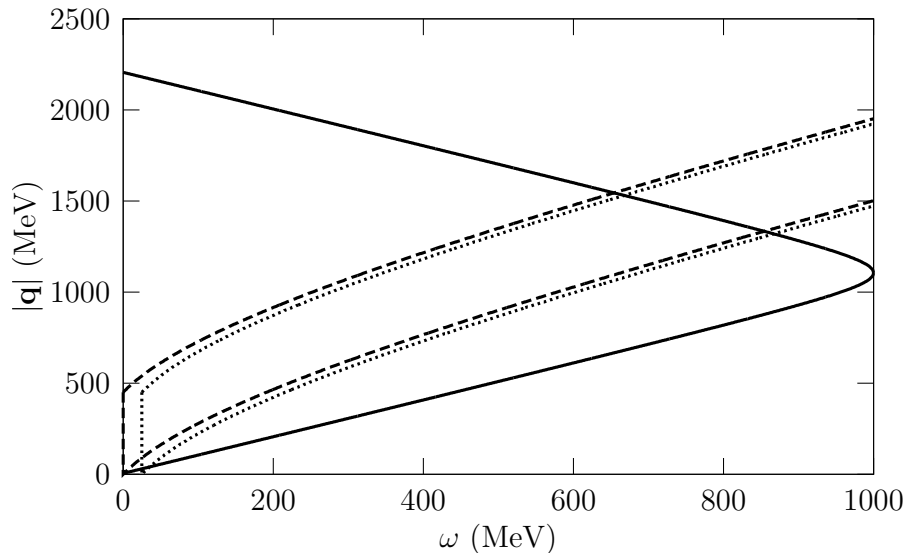
$$|E_\nu - \sqrt{(E_\nu - \omega)^2 - m_l^2}| \leq |\mathbf{q}| \leq E_\nu + \sqrt{(E_\nu - \omega)^2 - m_l^2}.$$

Jeśli skorzystamy z warunku hadronowego $\omega > E_B \geq 0$, to będziemy mogli opuścić moduł w dolnej granicy. Wprowadźmy oznaczenia

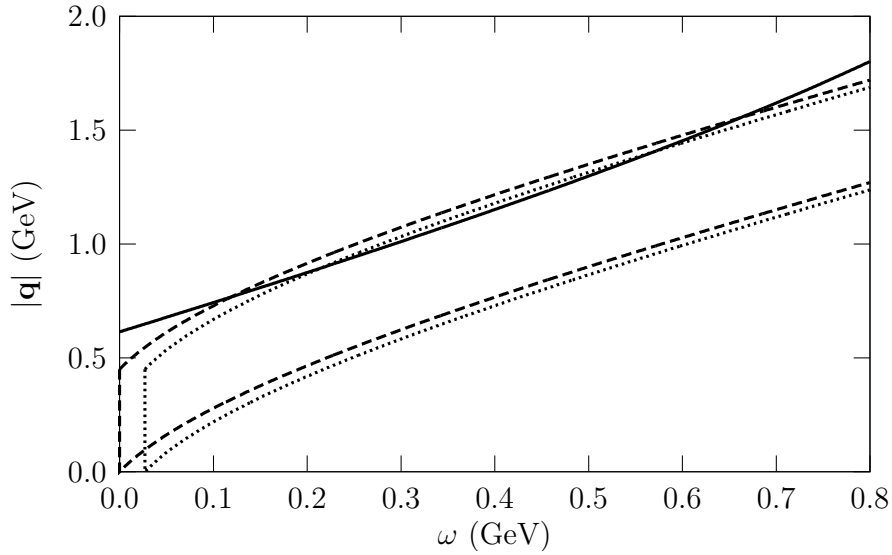
$$\begin{aligned} |\mathbf{q}|_A^l &= E_\nu - \sqrt{(E_\nu - \omega)^2 - m_l^2}, \\ |\mathbf{q}|_B^l &= E_\nu + \sqrt{(E_\nu - \omega)^2 - m_l^2}, \end{aligned} \tag{3.18}$$



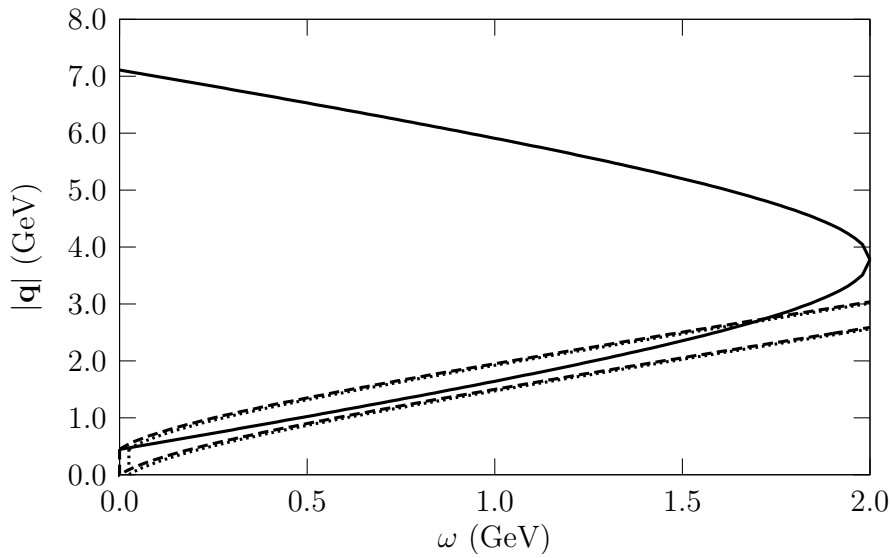
Rys. 3.9 Warunek hadronowy dla $E_B = 0$ (l. przerywana) i $E_B = 27$ MeV (kropkowana) oraz leptonowy dla ν_μ przy $E_\nu - m_l = 30$ MeV



Rys. 3.10 Warunek hadronowy dla $E_B = 0$ (l. przerywana) i $E_B = 27$ MeV (kropkowana) oraz leptonowy dla ν_μ przy $E_\nu - m_l = 1000$ MeV



Rys. 3.11 Warunek hadronowy dla $E_B = 0$ (l. przerywana) i $E_B = 27$ MeV (kropkowana) oraz leptonowy dla ν_τ przy $E_\nu - m_l = 1.1$ GeV



Rys. 3.12 Warunek hadronowy dla $E_B = 0$ (l. przerywana) i $E_B = 27$ MeV (kropkowana) oraz leptonowy dla ν_τ przy $E_\nu - m_l = 2$ GeV

które pozwalają krótko zapisać, że $|\mathbf{q}| \in [|\mathbf{q}|_A^l, |\mathbf{q}|_B^l]$, a $\omega \in [-\infty, E_\nu - m_l]$. Złożenie warunku hadronowego i leptonowego dla neutrina mionowego przedstawiają Rysunki 3.9 i 3.10 na stronie 46. Przy niskiej energii neutrina warunek hadronowy ogranicza się do $\omega - E_B > 0$, ponieważ pozostałe parametry wyznacza część leptonowa. Przy wyższej energii ograniczenia hadronowe wykluczają wysokie przekazy pędu i energii. Pod tym względem neutrina taonowe wykazuje podobieństwo, jednak ze względu na dużą masę taonu obszar dozwolony przez część leptonową jest położony inaczej, patrz Rys. 3.11 i Rys. 3.12 na str. 47,

Pozostaje nam już tylko ustalenie granic całkowania dla \tilde{E}_n przy ustalonych wartościach ω i $|\mathbf{q}|$, spełniających warunek hadronowy i leptonowy. Ze względu na definicję \tilde{E}_n i istnienie maksymalnego pędu — pędu Fermiego, energia \tilde{E}_n może należeć tylko do przedziału $[M, E_F]$. Proton musi zostać wytworzony powyżej poziomu Fermiego: $E_p = \tilde{E}_n + \tilde{\omega} > E_F$, zatem $\tilde{E}_n > E_F - \tilde{\omega}$. Z kolei równanie (3.7) pozwala natychmiast stwierdzić, że energia \tilde{E}_n nie może być dowolnie mała, bo $|\cos \vartheta_0| \leq 1$, co sprowadza się do

$$(2\tilde{E}_n\tilde{\omega} - \tilde{q}^2)^2 \leq 4(\tilde{E}_n^2 - M^2)|\mathbf{q}|^2,$$

czyli nierówności kwadratowej na \tilde{E}_n :

$$\tilde{E}_n^2\tilde{q}^2 + \tilde{E}_n\tilde{\omega}\tilde{q}^2 + \frac{1}{4}(\tilde{q}^2)^2 + M^2|\mathbf{q}|^2 \leq 0,$$

która może być zapisana w postaci:

$$\tilde{E}_n^2 + \tilde{E}_n\tilde{\omega} + \frac{1}{4}\tilde{q}^2 + \frac{M^2|\mathbf{q}|^2}{\tilde{q}^2} \geq 0,$$

bo $\tilde{q}^2 < 0$. Jej wyróżnik wynosi

$$\Delta = \tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2 - \frac{4M^2|\mathbf{q}|^2}{\tilde{q}^2} = |\mathbf{q}|^2 \left(1 - \frac{4M^2}{\tilde{q}^2} \right).$$

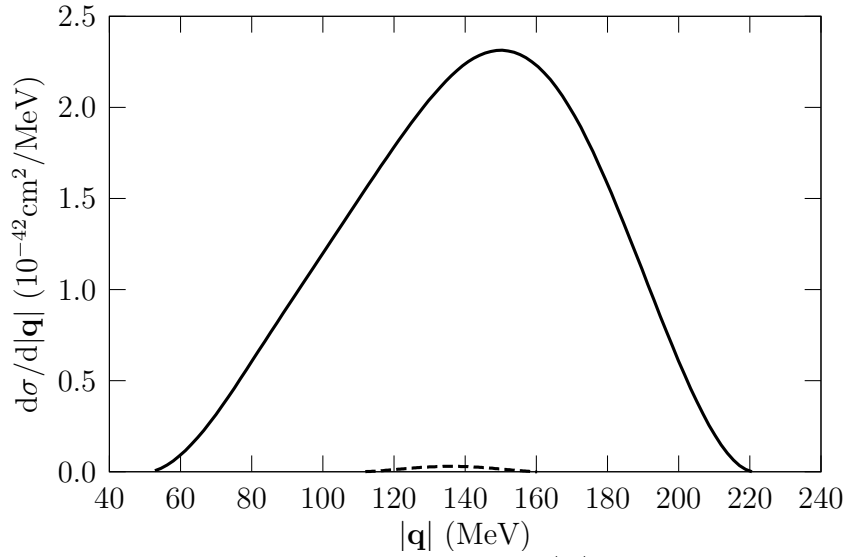
Jedna gałąź rozwiązań jest w oczywisty sposób ujemna, więc otrzymujemy warunek

$$\tilde{E}_n \geq -\frac{1}{2}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}|\mathbf{q}| \sqrt{1 + \frac{4M^2}{|\mathbf{q}|^2 - \tilde{\omega}^2}},$$

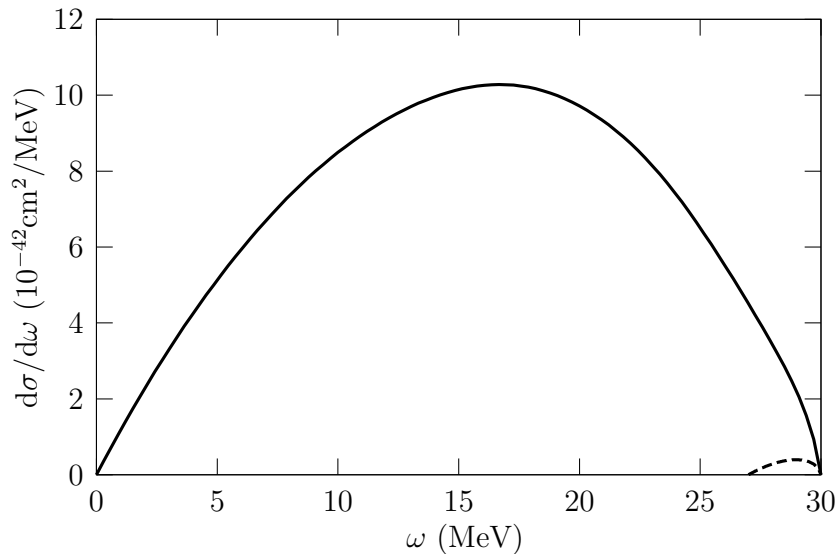
który musi być spełniony łącznie z $\tilde{E}_n > E_F - \tilde{\omega}$ i $\tilde{E}_n \in [M, E_F]$.

3.1.5 Różniczkowe przekroje czynne

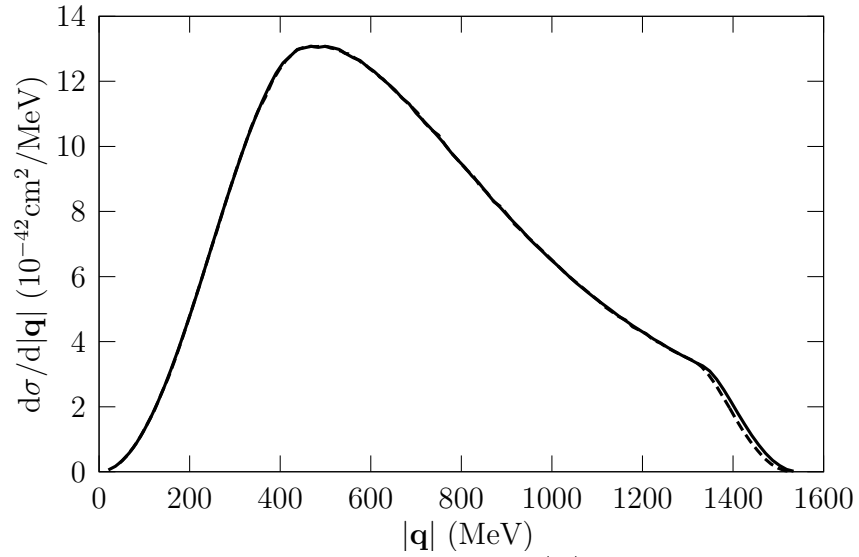
Ważnych informacji o przebiegu oddziaływania może dostarczyć różniczkowy przekrój czynny. Skupimy się na przekroju różniczkowym względem przekazu



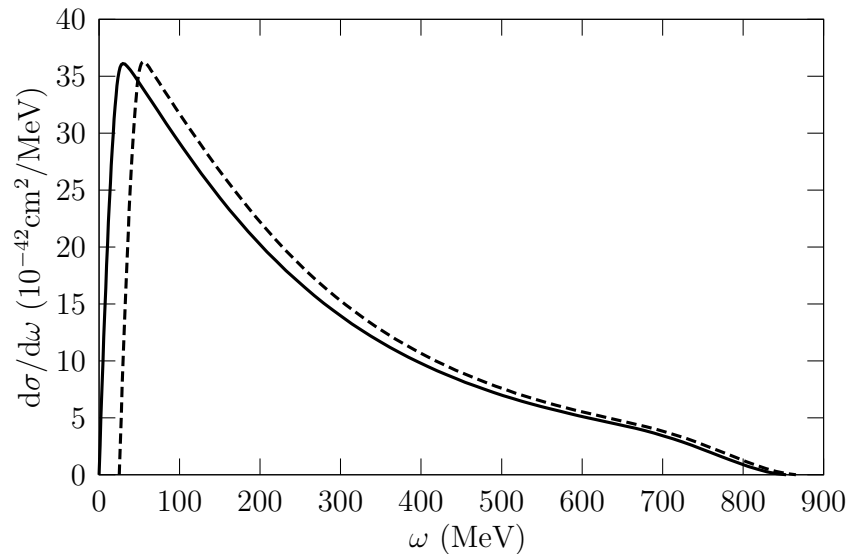
Rys. 3.13 Przekrój różniczkowy ν_μ względem $|q|$ przy $E_\nu - m_l = 30$ MeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



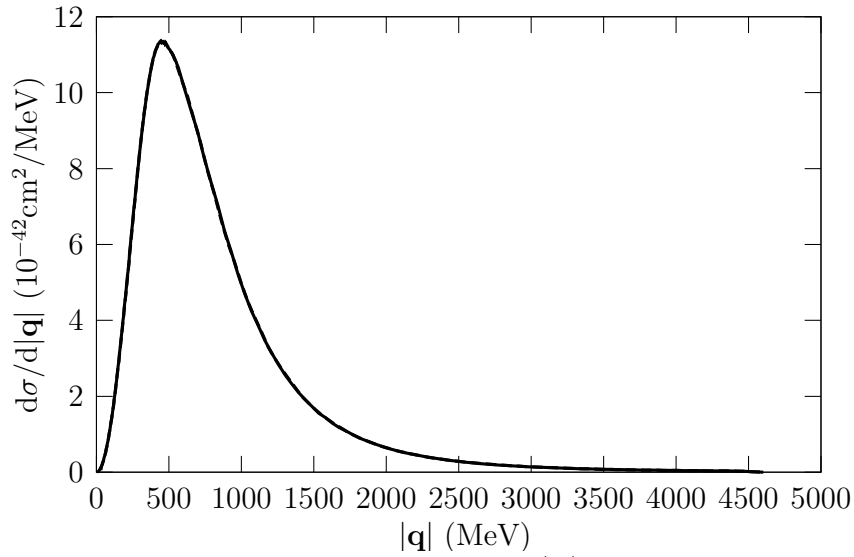
Rys. 3.14 Przekrój różniczkowy ν_μ względem ω przy $E_\nu - m_l = 30$ MeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



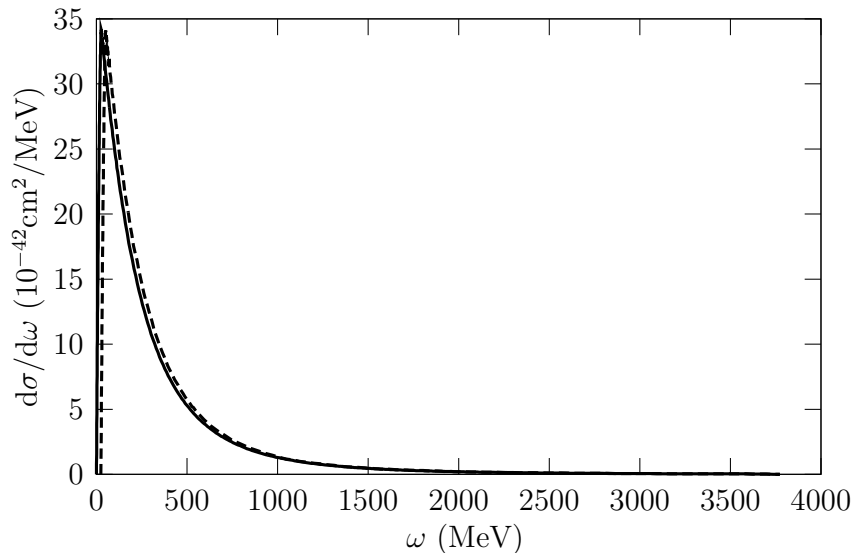
Rys. 3.15 Przekrój różniczkowy ν_μ względem $|\mathbf{q}|$ przy $E_\nu - m_l = 1000$ MeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



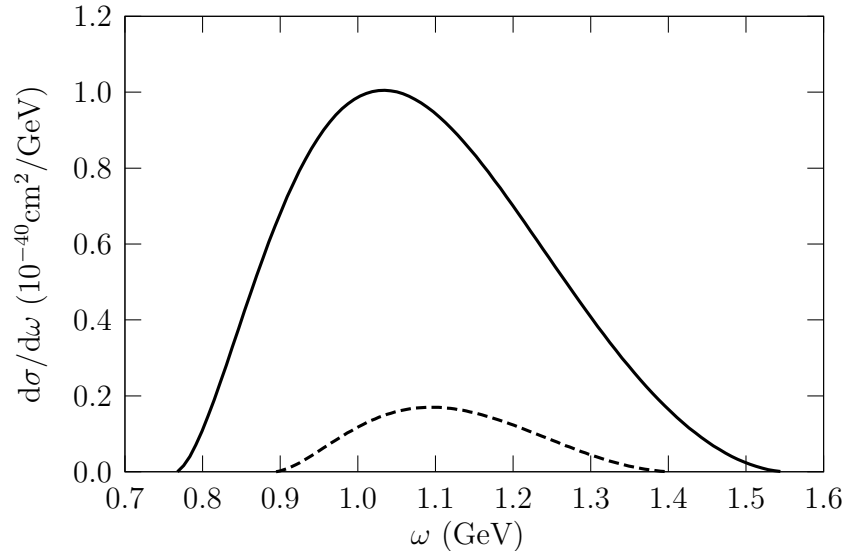
Rys. 3.16 Przekrój różniczkowy ν_μ względem ω przy $E_\nu - m_l = 1000$ MeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



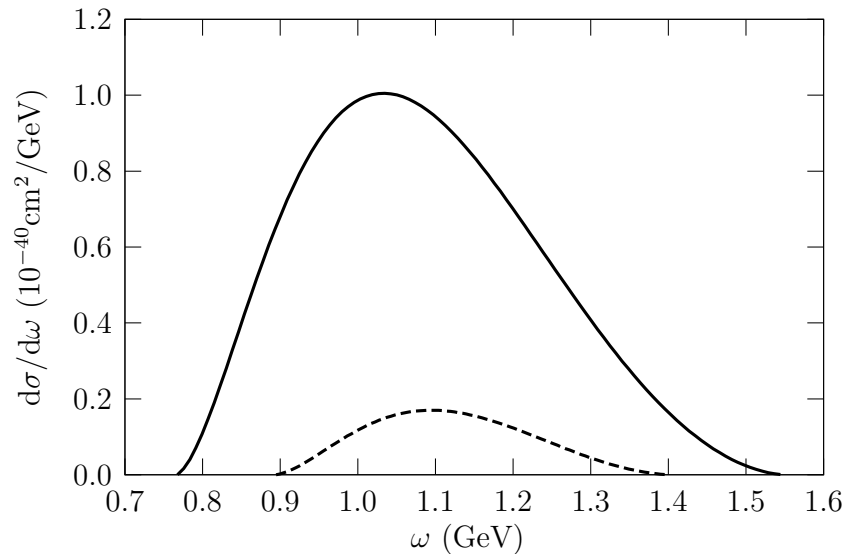
Rys. 3.17 Przekrój różniczkowy ν_μ względem $|\mathbf{q}|$ przy $E_\nu - m_l = 4000$ MeV dla $E_B = 0$ i $E_B = 27$ MeV, wykresy nakładają się



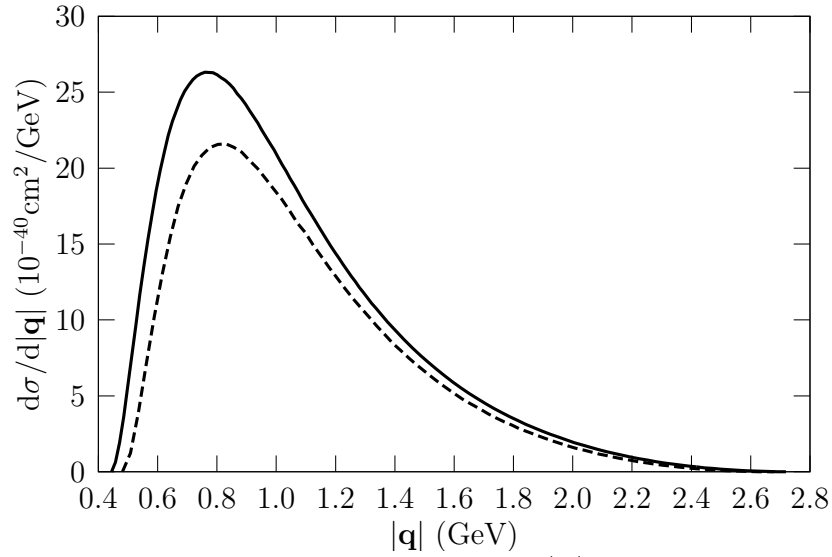
Rys. 3.18 Przekrój różniczkowy ν_μ względem ω przy $E_\nu - m_l = 4000$ MeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



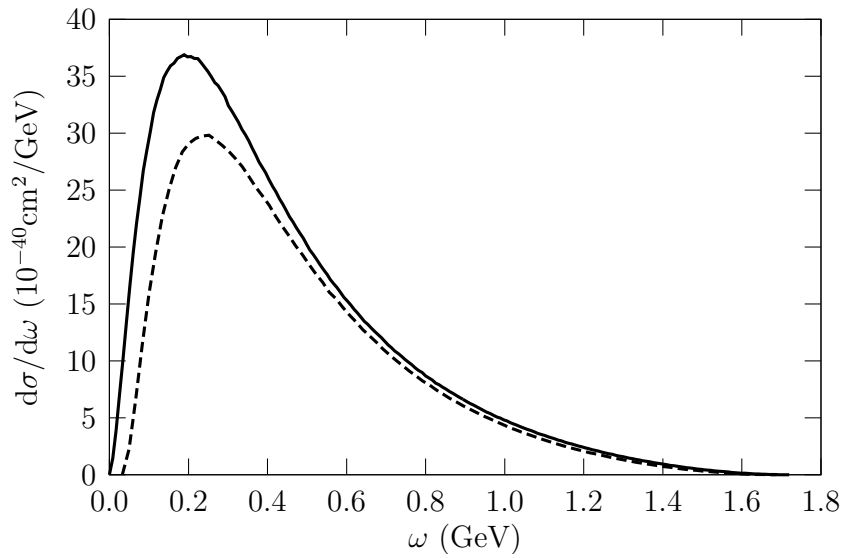
Rys. 3.19 Przekrój różniczkowy ν_τ względem $|\mathbf{q}|$ przy $E_\nu - m_l = 1.1$ GeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



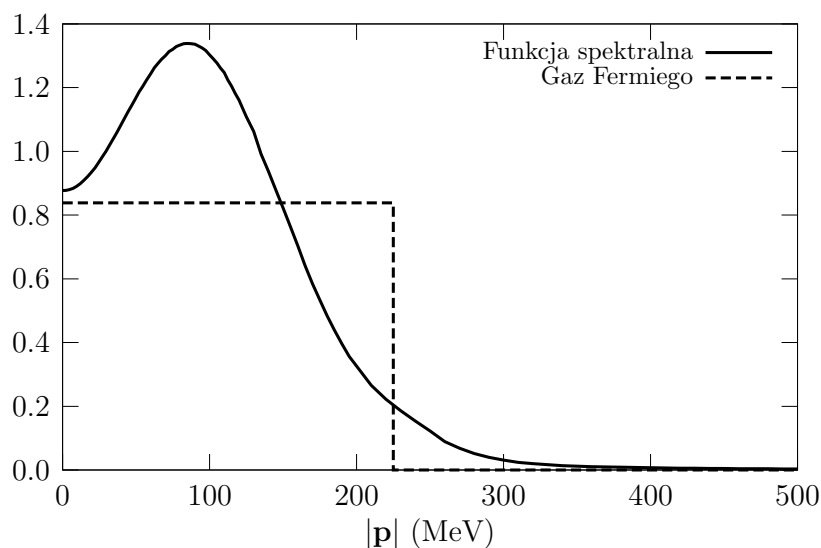
Rys. 3.20 Przekrój różniczkowy ν_τ względem ω przy $E_\nu - m_l = 1.1$ GeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



Rys. 3.21 Przekrój różniczkowy ν_τ względem $|\mathbf{q}|$ przy $E_\nu - m_l = 2$ GeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



Rys. 3.22 Przekrój różniczkowy ν_τ względem ω przy $E_\nu - m_l = 2$ GeV dla $E_B = 0$ (l. ciągła) i $E_B = 27$ MeV (przerywana)



Rys. 3.23 Profil gęstości jądra ^{16}O dla funkcji spektralnej i gazu Fermiego

energii i względem przekazu pędu. Wielkości te definiuje się jako odpowiednie pochodne przekroju czynnego.

Na Rys. 3.13 i 3.14 pokazane zostały przekroje dla neutrina mionowego przy niskiej energii. Jak można się było spodziewać, energia wiązania znacząco wpływa na wartość przekroju. Przy wyższej energii maksima przekrojów różniczkowych względem przekazu pędu pozostają rozdzielone jak na Rys. 3.15, zaś dla przekrojów względem przekazu energii różnice zanikają, patrz Rys. 3.16. Zauważmy, że nawet przy wysokiej energii neutrina znaczący wkład do całkowitego przekroju czynnego wnoszą prawie wyłącznie niskie przekazy pędu i energii, por. Rys. 3.17 i 3.18.

Dla neutrina taonowego przekrój różniczkowy względem przekazu pędu bardzo przypomina kształtem przekrój względem przekazu energii; ilustrują to Rysunki 3.19 i 3.20. Energia wiązania wyraźnie obniża przekrój nawet przy wyższej energii, jak na Rys. 3.21 i 3.22, dlatego całkowity przekrój czynny dla związanego gazu Fermiego zbliża się przekrój dla gazu swobodnego dopiero około 12 GeV, co widzieliśmy na Rys. 3.7.

3.2 Funkcja spektralna⁵

Gaz Fermiego, nawet po uwzględnieniu energii wiązania, odbiega znacznie od rzeczywistego jądra. Nie uwzględnia się w nim oddziaływań między nukleonami, oprócz uśrednionego potencjału, i przyjmuje, że gęstość materii

⁵ Wyniki przedstawione w tym podrozdziale nie są pełne.

w jądrze jest stała (równoważnie: pęd Fermiego pozostaje stały), zaś wszystkie pędy do wartości granicznej są obsadzone. W rzeczywistości sytuacja jest zbliżona do przedstawionej na Rys. 3.23. Zestawiamy na nim obliczenia w przybliżeniu lokalnej gęstości z gazem Fermiego o $p_F = 225$ MeV, o tej samej normalizacji. Gęstość prawdziwego jądra zmienia się z sposób różniczkowalny, nukleonów o niskich pędach jest nieco więcej, a tych o wysokich — nieco mniej niż dla gazu Fermiego. W jądrze tlenu można też znaleźć nukleony o pędach większych niż 225 MeV, jednak z szybko malejącym prawdopodobieństwem.

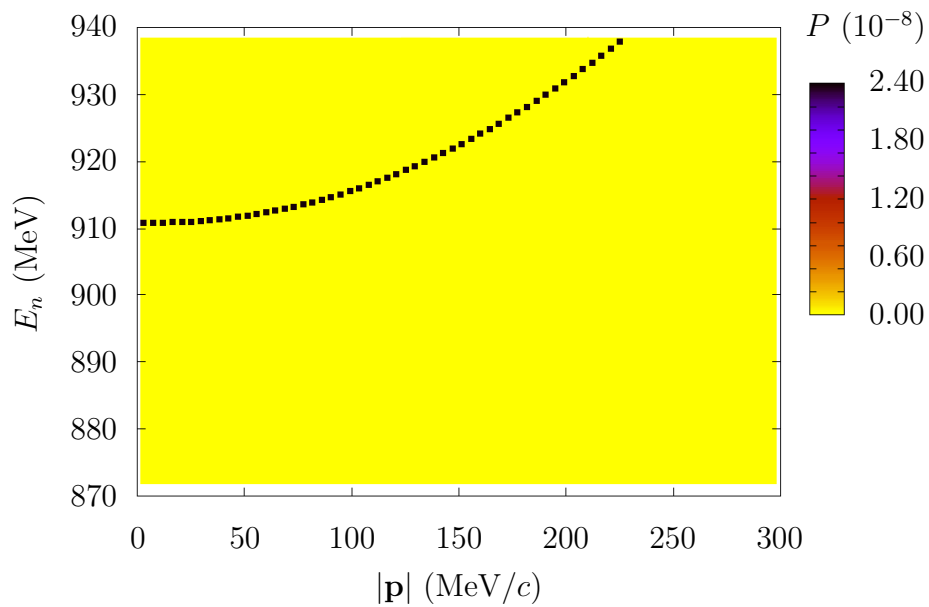
Założmy, że znamy rozkład pędów i energii w rzeczywistym jądrze. Musimy wyliczyć funkcje z (3.1) dla tego modelu. Występującą w pierwszym równaniu amplitudę rozłożymy w bazie wszystkich możliwych stanów końcowego jądra:

$$\begin{aligned} \langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}) a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle &= \sum_{f^{N-1}} \langle i^N | a_n^\dagger(\mathbf{p}) | f^{N-1} \rangle \langle f^{N-1} | a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle \\ &= \sum_{f^{N-1}} |\langle f^{N-1} | a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle|^2 \end{aligned}$$

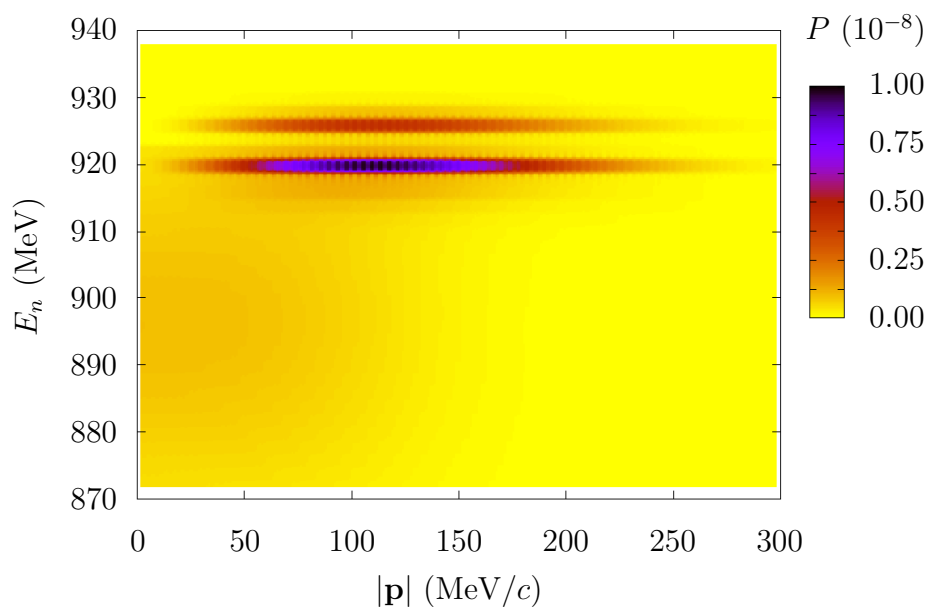
i w takiej postaci wstawimy do P_h^{SPF} :

$$P_h^{SPF}(\mathbf{p}, E_n) = \delta(E_i^N - E_f^{N-1} - E_n) \sum_{f^{N-1}} |\langle f^{N-1} | a_n(\mathbf{p}) | i^N \rangle|^2.$$

Otrzymane wyrażenie w fizyce jądra jest nazywane funkcją spektralną, o metodzie jej wyznaczania w przybliżeniu lokalnej gęstości można przeczytać w pracy O. Benhara i in. [14]. Określa ona rozkład prawdopodobieństwa usunięcia nukleonu o pędzie \mathbf{p} z jądra w stanie podstawowym, któremu towarzyszy powstanie jądra o całkowitej energii E_f^{N-1} (do energii E_i^N wliczyliśmy masę nukleonu, a do E_f^{N-1} — energię odrzutu; czasem w literaturze przyjmowane są odmiennie definicje). Na Rysunkach 3.24 i 3.25 porównujemy rozkład prawdopodobieństwa dla związanego gazu Fermiego i jądra tlenu. W przypadku gazu Fermiego pędy mają wartości dyskretne (co schematycznie prezentuje wykres), w rzeczywistym jądrze są one ciągłe. Widzimy wyraźnie, że dla tlenu „odległość od powłoki masy” (ang. *offshellness*), mierzona różnicą $\tilde{E}_n - E_n$, nie jest stała nawet dla konkretnej wartości $|\mathbf{p}|$, bo nukleony można znaleźć dla różnych E_n . W jądrze ^{16}O dwa neutrony (i dwa protony) obsadzają poziom $1s$, a pozostałe — poziom $2p$: cztery o całkowitym momencie pędu $j = 3/2$, dwa na najwyższym poziomie energetycznym z $j = 1/2$ (por. Sz. Szczeniowski [1] str. 332). Jeśli spojrzymy na fragment funkcji spektralnej przedstawiony na Rys. 3.25, to zauważymy odpowiednie obszary: o niskiej energii i bardzo rozmyte, o energii około 920 MeV zawierający najwięcej nukleonów i słabiej obsadzony nieco powyżej niego.



Rys. 3.24 Funkcja spektralna związanego gazu Fermiego



Rys. 3.25 Funkcja spektralna jądra tlenu ^{16}O

W obliczeniach pominiemy całkowicie oddziaływanie powstającego protonu i jądra, które mogłoby wykluczać niektóre pędy:

$$P_{\mathbf{p}}^{SPF}(\mathbf{p}') = 1.$$

Również w tym modelu jądra zastosujemy przybliżenie de Foresta, żeby dostać tensor hadronowy poza powłoką masy. Jeśli przyjmiemy konwencję dotyczącą normalizacji jak w [15] i [16], to przybliżenie sprowadzi się do zastąpienia

$$W^{\mu\nu} \rightarrow N\widetilde{H}^{\mu\nu},$$

więc równanie (3.5) przyjmuje postać

$$f^{SPF}(k, \omega, |\mathbf{q}|) = N \int dE_n d\tilde{E}_n d\varphi P_{\mathbf{h}}^{SPF}(\mathbf{p}, E_n) L_{\mu\nu} \widetilde{H}^{\mu\nu}.$$

Funkcja $P_{\mathbf{h}}^{SPF}$ nie zależy od kierunku pędu neutronu, lecz jedynie od jego wartości. Przejdźmy od zmiennej $|\mathbf{p}|$ do \tilde{E}_n :

$$f^{SPF}(k, \omega, |\mathbf{q}|) = N \int dE_n d\tilde{E}_n d\varphi P_{\mathbf{h}}^{SPF}(\sqrt{\tilde{E}_n^2 - M^2}, E_n) L_{\mu\nu} \widetilde{H}^{\mu\nu}.$$

Wstawiając powyższy wzór do (3.3) znajdziemy przekrój czynny dla funkcji spektralnej:

$$\frac{\sigma^{SPF}}{N} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi E_\nu^2} \int d\omega d|\mathbf{q}| dE_n d\tilde{E}_n d\varphi P_{\mathbf{h}}^{SPF}(\sqrt{\tilde{E}_n^2 - M^2}, E_n) L_{\mu\nu} \widetilde{H}^{\mu\nu}.$$

3.2.1 Zakres całkowania

Najpierw rozważmy warunek hadronowy. Zauważmy, że do otrzymania (3.17) potrzebna była tylko równość $E_p = \tilde{\omega} + \tilde{E}_n$, więc podstawiając $\tilde{\omega} + \tilde{E}_n = \omega + E_n$ możemy zapisać

$$\left| \sqrt{(\omega + E_n)^2 - M^2} - |\mathbf{p}| \right| \leq |\mathbf{q}| \leq \sqrt{(\omega + E_n)^2 - M^2} + |\mathbf{p}|.$$

Skoro energia $E_n < M$, to wygodnie będzie przejść do zmiennej E takiej, że $E_n = M - E$. Proton jest na powłoce masy, stąd $E_p = \omega + M - E$ pozwala stwierdzić, że

$$\omega - E \geq 0$$

i że musi zachodzić $\omega > 0$ wobec $E > 0$. Przepiszmy warunek na $|\mathbf{q}|$ w postaci

$$\left| \sqrt{(\omega - E)(\omega - E + 2M)} - |\mathbf{p}| \right| \leq |\mathbf{q}| \leq \sqrt{(\omega - E)(\omega - E + 2M)} + |\mathbf{p}|. \quad (3.19)$$

Funkcja spektralna jest określona na dziedzinie $(0, |\mathbf{p}|^{\max}) \times (0, E^{\max})$, zatem łatwo wskazać maksymalną wartość $|\mathbf{q}|$:

$$|\mathbf{q}|_B^h = \sqrt{\omega(\omega + 2M)} + |\mathbf{p}|^{\max}.$$

Z kolei jeśli $\omega = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2} - M + E$, to dolne ograniczenie równa się zero, czyli osiąga najmniejszą dopuszczalną wartość. Gdy $|\mathbf{p}| = 0$ miejsce zerowe występuje dla $\omega = E$. Dla rosnącej normy $|\mathbf{p}|$ miejsce zerowe przesunę się do coraz większych wartości ω , więc ostatecznie występuje przy $\omega_0 = \sqrt{(|\mathbf{p}|^{\max})^2 + M^2} - M + E^{\max}$. Możemy zatem stwierdzić, że $|\mathbf{q}|$ jest ograniczona od dołu przez

$$|\mathbf{q}|_A^h = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega < \omega_0, \\ \sqrt{(\omega - E^{\max})(\omega - E^{\max} + 2M)} - |\mathbf{p}|^{\max} & \text{dla } \omega \geq \omega_0. \end{cases}$$

Podsumowując możemy zapisać, że warunek hadronowy wymaga, żeby przekaz energii $\omega \in [0, \infty]$, a norma przekazu pędu $|\mathbf{q}| \in [|\mathbf{q}|_A^h, |\mathbf{q}|_B^h]$.

Część leptonowa jest niezależna od hadronowej, więc wyliczyliśmy ją już w (3.18) (do zapisania jej w końcowej postaci skorzystaliśmy z $\omega > 0$, co jest prawdziwe także w przypadku funkcji spektralnej).

Warunek hadronowy dla funkcji spektralnej różni się znacznie od warunku dla związanego gazu Fermiego, ilustrują to Rysunki 3.26 i 3.27. Dolna gałąź hadronowa leży poniżej leptonowej dla dowolnej energii neutrina, więc minimalną wartość przekazu pędu wyznacza ograniczenie leptonowe.

Otrzymana wcześniej nierówność $\omega - E \geq 0$ pozwala zauważyć, że dla ustalonej wartości przekazu energii $E \in (0, \omega] \cap (0, E^{\max})$, co sprowadza się do warunku $E_n \in (M - \min\{\omega, E^{\max}\}, M)$. Nie wzięliśmy pod uwagę, że przedział może być lewostronnie domknięty, bo zbiór miary zero nie zmienia wartości całki.

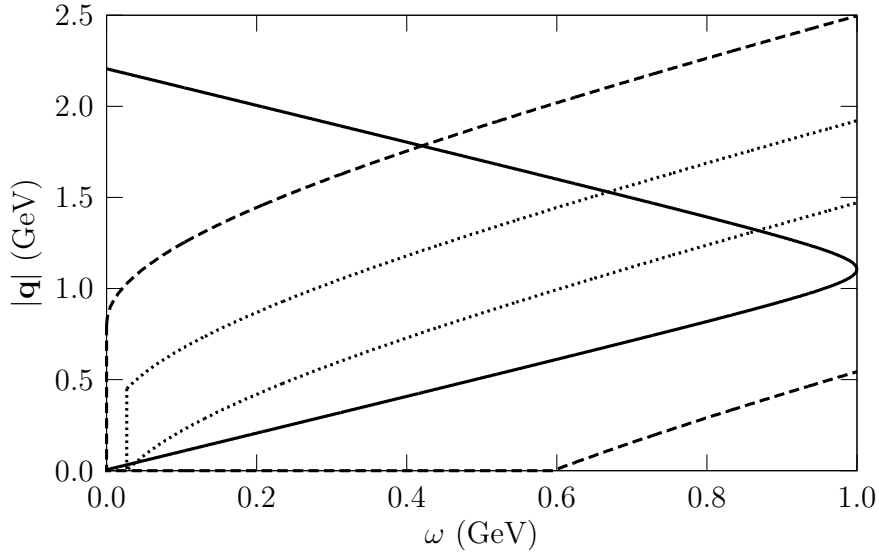
Pozostał do wyznaczenia dozwolony zakres \tilde{E}_n dla ω , $|\mathbf{q}|$ oraz E_n spełniających ograniczenia hadronowe i leptonowe. Nierówności (3.19) przekształcimy tak, by otrzymać zależności na $|\mathbf{p}|$:

$$\left| \sqrt{(\omega - E)(\omega - E + 2M)} - |\mathbf{q}| \right| \leq |\mathbf{p}| \leq \sqrt{(\omega - E)(\omega - E + 2M)} + |\mathbf{q}|.$$

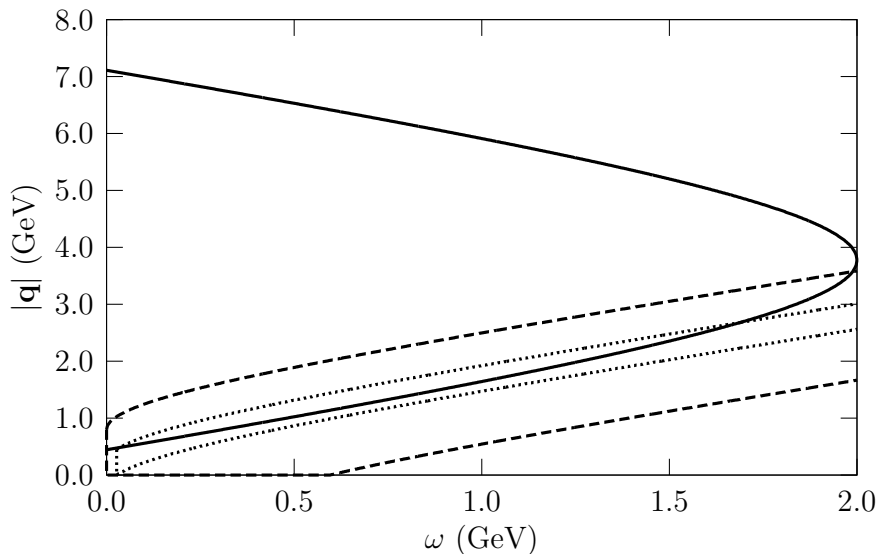
Daje to warunek $\tilde{E}_n \in [\sqrt{|\mathbf{p}|_A^2 + M^2}, \sqrt{|\mathbf{p}|_B^2 + M^2}]$, gdzie

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}|_A &= \left| \sqrt{(\omega - E)(\omega - E + 2M)} - |\mathbf{q}| \right|, \\ |\mathbf{p}|_B &= \min \left\{ |\mathbf{p}|^{\max}, \sqrt{(\omega - E)(\omega - E + 2M)} + |\mathbf{q}| \right\}. \end{aligned}$$

Zastosowana tutaj metoda jest równoważna obliczeniom z $|\cos \vartheta_0| \leq 1$, jak to zrobiliśmy w przypadku gazu Fermiego.



Rys. 3.26 Warunek hadronowy dla funkcji spektralnej (l. przerywana) i gazu Fermiego z $E_B = 27$ MeV (kropkowana) oraz leptonowy dla ν_μ przy $E_\nu - m_l = 1$ GeV



Rys. 3.27 Warunek hadronowy dla funkcji spektralnej (l. przerywana) i gazu Fermiego z $E_B = 27$ MeV (kropkowana) oraz leptonowy dla ν_τ przy $E_\nu - m_l = 2$ GeV

Podsumowanie

W pracy przeanalizowane zostały zderzenia neutrin i antyneutrin z nukleonami i jądrami atomowymi. Przedstawione są szczegółowe obliczenia przekroju czynnego neutrina na nukleonie, a także dozwolonego kinematycznie zakresu całkowania i różnica między rozpraszaniem neutrin i antyneutrin. Z obliczeń wynika, że w granicy wysokiej energii przekroje czynne neutrin i antyneutrin wszystkich zapachów mają jednakową stałą wartość. Systematycznie wyliczony jest przekrój czynny neutrin na jądrze atomowym o liczbie neutronów równej liczbie protonów w przybliżeniu PWIA dla gazu Fermiego (swobodnego i związanego) i funkcji spektralnej. Towarzyszy temu pełna analiza kinematyczna. Wyniki numeryczne, uzyskane metodą Monte Carlo, przedstawione są tylko dla gazu Fermiego. Ze wzrostem energii neutrina różnica między przekrojem na swobodnym nukleonie a przekrojem na nukleon w jądrze dąży do stałej wartości, która dla gazu Fermiego zależy od wartości pędu Fermiego. Większa od zera energia wiązania nieznacznie obniża przekrój czynny. Jeśli stosunek maksymalnej energii kinetycznej związanego nukleonu do jego masy dąży do zera, to przekrój przypadający na nukleon zbiega od dołu do wartości dla swobodnego nukleonu. Nawet przy dużych energiach neutrina największy wkład do przekroju czynnego dają niskie przekazy pędu i energii. Otwartą kwestią pozostają obliczenia numeryczne dla jądra atomowego modelowanego funkcją spektralną.

Podziękowania

Chciałbym podziękować Panu Omarowi Benharowi za udostępnienie funkcji spektralnej tlenu ^{16}O wyliczonej przez jego zespół. Panu profesorowi Janowi Sobczykowi dziękuję za podjęcie się opieki naukowej nade mną. Szczególne podziękowania kieruję do mojego młodszego brata Jarosława Ankowskiego, który wspierał mnie w trakcie pisania tej pracy.

Dodatek A

Konwencje

Przyjęte w pracy konwencje zgadzają się z książką Bjorkena i Drella [17]. Przedstawimy je tutaj pokrótce. Równania pisane są w układzie jednostek, w którym $\hbar = 1$ i $c = 1$, o ile nie zaznaczono wyraźnie, że jest inaczej. Czterowektory oznaczone są kursywą: p , k , zaś wektory przestrzenne — czcionką półgrubą: \mathbf{p} , \mathbf{k} . Zerowy wektor przestrzenny zapiszemy jako $\mathbf{0}$. Po powtarzających się wskaźnikach greckich należy zsumować od 0 do 3. Wybrana metryka przestrzeni Minkowskiego to jeden plus i trzy minusy:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Całkowicie antysymetryczny symbol Levi-Civita: $\epsilon_{0123} = +1$. Zwężenie dwóch epsilonów można zapisać przy pomocy iloczynu delt Kroneckera jako

$$\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_\sigma^\kappa\delta_\rho^\lambda - \delta_\rho^\kappa\delta_\sigma^\lambda). \quad (\text{A.1})$$

Równanie Diraca w reprezentacji położeniowej ma postać

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

a macierze Diraca spełniają warunek

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

Wybieramy taką ich realizację, w której $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ oraz $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$, więc zachodzi własność

$$(\gamma^\tau)^\dagger = \gamma^0\gamma^\tau\gamma^0 \quad (\text{A.3})$$

dla $\tau \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pisząc γ^τ lub γ^σ będziemy zawsze mieli na myśli dowolną z czterech macierzy gamma. Antyprzemienną z każdą γ^τ macierz γ_5 definiujemy jako

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

zatem jest ona hermitowska i nilpotentna: $(\gamma_5)^2 = 1$. Z relacji antyprzemienności wiążących macierze γ^τ i γ_5 wynika, że są one bezśladowe. Ślad iloczynu

dwóch macierzy gamma jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy te macierze są tożsame:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}.$$

Ślad iloczynu nieparzystej liczby macierzy γ^τ jest równy zero. W trakcie obliczeń będziemy także korzystać z równości

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma) &= 4(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu}), \\ \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma) &= 4i\epsilon_{\mu\rho\nu\sigma},\end{aligned}\tag{A.4}$$

patrz np. Bjorken i Drell [17] str. 102. Komutator dwóch macierzy γ^τ daje liniowo niezależną od nich macierz

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Rozwiązania równania Diraca o dodatniej częstotliwości $(p_\mu \gamma^\mu - m)u(\mathbf{p}, s) = 0$ zsumowane po spinach spełniają równość

$$\sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) = \left(\frac{p^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \right)_{\alpha\beta},\tag{A.5}$$

gdzie \bar{u} oznacza sprzężenie Diraca $\bar{u} = u^\dagger \gamma_0$. Analogiczna własność dla rozwiązań o ujemnej częstotliwości $(p_\mu \gamma^\mu + m)v(\mathbf{p}, s) = 0$ ma postać

$$\sum_s v_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, s) = \left(\frac{p^\mu \gamma_\mu - m}{2m} \right)_{\alpha\beta}.\tag{A.6}$$

Dowody dwóch ostatnich równości można znaleźć np. w książce Bjorkena i Drella [17] na stronach 101 i 105. Delta Diraca w trzech wymiarach spełnia warunek

$$\delta^3(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.$$

Dodatek B

Obliczenia pomocnicze

B.1 Tensor leptonowy

W równaniu (2.3) zdefiniowaliśmy tensor leptonowy następująco:

$$L_{\mu\nu} \doteq \frac{m_l m_\nu}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle \langle l^-(\mathbf{k}', \lambda') | \gamma_\nu (1 - \gamma_5) | \nu(\mathbf{k}, \lambda) \rangle^*.$$

Nie pojawia się w nim antylepton, więc nie musimy jawnie wyrażać ładunku cząstek. W tym dodatku będziemy oznaczali lepton jedynie literą l . Żeby niepotrzebnie nie zaciemniać zapisu, na początkowym etapie obliczeń pomiemy także informację o pędach i spinach cząstek. Najpierw przejdźmy od notacji Diraca do macierzowej:

$$\langle l | \gamma_\mu (1 - \gamma_5) | \nu \rangle \langle l | \gamma_\nu (1 - \gamma_5) | \nu \rangle^* = \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu (\bar{l} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \nu)^*.$$

Wyliczenie wyrazu występującego ze sprzężeniem w sposób podobny, jak otrzymaliśmy (2.7), daje:

$$(\bar{l} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \nu)^* = \bar{\nu} \gamma_0 (\gamma_\nu (1 - \gamma_5))^\dagger \gamma_0 l = \bar{\nu} \gamma_0 (1 - \gamma_5)^\dagger \gamma_\nu^\dagger \gamma_0 l.$$

Przekształćmy to wyrażenie, korzystając z zależności (A.3) z obniżonym wskaźnikiem τ : $\gamma_\tau^\dagger = \gamma_0 \gamma_\tau \gamma_0$ oraz z hermitowskości macierzy γ_5 :

$$\begin{aligned} (\bar{l} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \nu)^* &= \bar{\nu} \gamma_0 (1 - \gamma_5) (\gamma_0 \gamma_\nu \gamma_0) \gamma_0 l = \bar{\nu} \gamma_0 (1 - \gamma_5) \gamma_0 \gamma_\nu \eta_{00} l \\ &= \bar{\nu} \gamma_0 \gamma_0 \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \eta_{00} l = \bar{\nu} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) l. \end{aligned}$$

Końcową postać wstawmy do tensora leptonowego:

$$L_{\mu\nu} = \frac{m_l m_\nu}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) l$$

i przywróćmy jego pełny zapis:

$$L_{\mu\nu} = \frac{m_l m_\nu}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{l}(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(\mathbf{k}, \lambda) \bar{\nu}(\mathbf{k}, \lambda) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) l(\mathbf{k}', \lambda').$$

Analogicznie jak przy wyliczaniu $H^{\mu\nu}$ w Rozdziale 2, własność rozwiązań równania Diraca o dodatniej częstości (A.5) pozwala przepisać tensor leptonowy w postaci

$$L_{\mu\nu} = \frac{m_l m_\nu}{2} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{k^\rho \gamma_\rho + m_\nu}{2m_\nu} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \frac{k'^\sigma \gamma_\sigma + m_l}{2m_l} \right).$$

Do dalszych obliczeń skorzystamy z liniowości śladu:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) k^\rho \gamma_\rho \gamma_\nu (1 - \gamma_5) k'^\sigma \gamma_\sigma \right) \\ &\quad + \frac{m_l m_\nu}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \right) + \frac{m_l}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) k^\rho \gamma_\rho \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \right) \\ &\quad + \frac{m_\nu}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) k'^\sigma \gamma_\sigma \right). \end{aligned}$$

Ślad nieparzystej liczby macierzy γ_τ jest równy zero, więc w wyrażeniu na $L_{\mu\nu}$ „przeżywają” tylko pierwsze dwa wyrazy (macierz γ_5 zawiera iloczyn czterech różnych macierzy gamma):

$$L_{\mu\nu} = \frac{k^\rho k'^\sigma}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \gamma_\sigma \right) + \frac{m_l m_\nu}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu \right).$$

Iloczyn $(1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5)$ jest równy zero, ponieważ $(\gamma_5)^2 = 1$, zatem drugi ślad także znika:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{k^\rho k'^\sigma}{8} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \right) = \frac{k^\rho k'^\sigma}{4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \right) \\ &= \frac{k^\rho k'^\sigma}{4} \left[\text{Tr} \left(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \right) + \text{Tr} \left(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \right) \right]. \end{aligned}$$

Ślady wewnątrz nawiasu kwadratowego zostały podane w równaniach (A.4):

$$L_{\mu\nu} = k_\mu k'_\nu - k \cdot k' \eta_{\mu\nu} + k'_\mu k_\nu + i \epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} k^\rho k'^\sigma.$$

Po uporządkowaniu wskaźników przy epsilon tensor leptonowy można zapisać w postaci:

$$L_{\mu\nu} = k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - k \cdot k' \eta_{\mu\nu} - i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma,$$

a po wyrażeniu k' za pomocą przekazu czteropędu $q = k - k'$ i zaniedbaniu kwadratu masy neutrina wobec kwadratu masy leptonu $m_l^2 = k'^2$:

$$L_{\mu\nu} = 2k_\mu k'_\nu - (k_\mu q_\nu + q_\mu k'_\nu) + \frac{1}{2}(q^2 - m_l^2) \eta_{\mu\nu} + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma.$$

B.2 Tensor hadronowy

Przez tensor hadronowy $H^{\mu\nu}$ rozumiemy wyrażenie zdefiniowane w (2.4):

$$H^{\mu\nu} \doteq \frac{M^2}{\cos^2 \theta_C} \sum_{s,s'} \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\mu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle \langle p(\mathbf{p}', s') | j^\nu(0) | n(\mathbf{p}, s) \rangle^*. \quad (\text{B.1})$$

W Rozdziale 2 przekształciliśmy je do postaci

$$H^{\mu\nu} = M^2 \text{Tr} \left(\Gamma^\mu \frac{p_\kappa \gamma^\kappa + M}{2M} \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 \frac{p'_\lambda \gamma^\lambda + M}{2M} \right),$$

porównaj równanie (2.8). Element macierzowy prądu hadronowego Γ^μ dany jest przez (2.6) i wynosi on:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu (F_V^1 + \xi F_V^2) - \frac{(p+p')^\mu \xi F_V^2}{2M} + \gamma^\mu \gamma_5 F_A + \gamma_5 \frac{q^\mu F_P}{M}.$$

Przed przystąpieniem do obliczenia śladu wyrażmy jawnie sprzężenie hermitowskie $\Gamma^{\nu\dagger}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu\dagger} &= \gamma^{\nu\dagger} (F_V^1 + \xi F_V^2)^* - \frac{(p+p')^\nu (\xi F_V^2)^*}{2M} + \gamma_5^\dagger \gamma^{\nu\dagger} F_A^* + \gamma_5^\dagger \frac{q^\nu F_P^*}{M} \\ &= \gamma_0 \gamma^\nu \gamma_0 (F_V^1 + \xi F_V^2)^* - \frac{(p+p')^\nu (\xi F_V^2)^*}{2M} + \gamma_5 \gamma_0 \gamma^\nu \gamma_0 F_A^* + \gamma_5 \frac{q^\nu F_P^*}{M} \\ &= \gamma_0 \gamma^\nu \gamma_0 (F_V^1 + \xi F_V^2)^* + \gamma_0 \gamma^\nu \gamma_5 \gamma_0 F_A^* + \gamma_5 \frac{q^\nu F_P^*}{M} - \frac{(p+p')^\nu (\xi F_V^2)^*}{2M}. \end{aligned}$$

Otrzymane wyrażenie po obustronnym wymnożeniu przez macierz γ_0 daje

$$\begin{aligned} \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 &= (\eta_{00})^2 \gamma^\nu \left((F_V^1 + \xi F_V^2)^* + \gamma_5 F_A^* \right) + \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 \frac{q^\nu F_P^*}{M} - \eta_{00} \frac{(p+p')^\nu (\xi F_V^2)^*}{2M} \\ &= \gamma^\nu \left((F_V^1 + \xi F_V^2)^* + \gamma_5 F_A^* \right) - \gamma_5 \frac{q^\nu F_P^*}{M} - \frac{(p+p')^\nu (\xi F_V^2)^*}{2M}. \end{aligned}$$

Do wyliczenia śladu wygodnie będzie rozpisać Γ^μ i $\gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0$ następująco

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \gamma^\mu a + (2M)^{-1} b^\mu, \\ \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 &= \gamma^\nu c - (2M)^{-1} d^\nu, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= (F_V^1 + \xi F_V^2) + \gamma_5 F_A, & b^\mu &= 2\gamma_5 q^\mu F_P - (p+p')^\mu \xi F_V^2, \\ c &= (F_V^1 + \xi F_V^2)^* + \gamma_5 F_A^*, & d^\nu &= 2\gamma_5 q^\nu F_P^* + (p+p')^\nu (\xi F_V^2)^*. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu nowych oznaczeń $H^{\mu\nu}$ przybiera postać

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\left(\gamma^\mu a + \frac{b^\mu}{2M} \right) (p_\kappa \gamma^\kappa + M) \left(\gamma^\nu c - \frac{d^\nu}{2M} \right) (p'_\lambda \gamma^\lambda + M) \right].$$

Wypiszmy systematycznie wyrażenia zawierające kolejno zero, dwie i cztery macierze γ_τ (śląd pozostałych wyrażen jest równy zero):

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} = \frac{1}{4} & \left[- \text{Tr} \left(\frac{b^\mu}{2M} M \frac{d^\nu}{2M} M \right) \right. \\ & - \text{Tr} \left(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa \frac{d^\nu}{2M} M \right) + \text{Tr} \left(\gamma^\mu a M \gamma^\nu c M \right) \\ & - \text{Tr} \left(\gamma^\mu a M \frac{d^\nu}{2M} p'_\lambda \gamma^\lambda \right) + \text{Tr} \left(\frac{b^\mu}{2M} p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c M \right) \\ & - \text{Tr} \left(\frac{b^\mu}{2M} p_\kappa \gamma^\kappa \frac{d^\nu}{2M} p'_\lambda \gamma^\lambda \right) + \text{Tr} \left(\frac{b^\mu}{2M} M \gamma^\nu c M p'_\lambda \gamma^\lambda \right) \\ & \left. + \text{Tr} \left(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c p'_\lambda \gamma^\lambda \right) \right]. \end{aligned}$$

Rozpisując śląd sumy macierzy skorzystaliśmy z jego liniowości, w następnym kroku ponownie oprzemy się na tej własności, aby wyłączyć stałe liczbowe:

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} = \frac{1}{4} & \left[- \frac{1}{4} \text{Tr}(b^\mu d^\nu) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa d^\nu) + M^2 \text{Tr}(\gamma^\mu a \gamma^\nu c) \right. \\ & - \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu a d^\nu p'_\lambda \gamma^\lambda) + \frac{1}{2} \text{Tr}(b^\mu p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c) - \frac{1}{4M^2} \text{Tr}(b^\mu p_\kappa \gamma^\kappa d^\nu p'_\lambda \gamma^\lambda) \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{Tr}(b^\mu \gamma^\nu c p'_\lambda \gamma^\lambda) + \text{Tr}(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c p'_\lambda \gamma^\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Wyliczmy ślady występujące w nawiasie kwadratowym. Pierwsze wyrażenie zawiera jedynie iloczyny macierzy jednostkowych i bezśladowych γ_5 , więc wkład do ślądu wnoszą jedynie wyrazy bez macierzy γ_5 oraz z kwadratem γ_5 :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(b^\mu d^\nu) &= - \text{Tr} \left((p + p')^\mu \xi F_\nu^2 (p + p')^\nu (\xi F_\nu^2)^* \right) + \text{Tr} \left(2\gamma_5 q^\mu F_P 2\gamma_5 q^\nu F_P^* \right) \\ &= -4(p + p')^\mu (p + p')^\nu |\xi F_\nu^2|^2 + 16q^\mu q^\nu |F_P|^2. \end{aligned}$$

Kolejnych sześć wyrazów to iloczyny dwóch macierzy gamma i kwadratu sumy macierzy jednostkowej z γ_5 (z różnymi współczynnikami liczbowymi). Iloczyn typu $\gamma_\tau \gamma_\sigma \gamma_5$ sprowadza się do iloczynu dwóch różnych macierzy gamma (dla $\sigma \neq \tau$) lub jest równy macierzy γ_5 (przypadek $\sigma = \tau$), więc ze związku antyprzemienności macierzy gamma (A.2) wynika, że jest bezśladowy. Możemy zatem stwierdzić, że także w tej grupie przyczynki różne od zera

pochodzą tylko od wyrazów nie zawierających γ_5 lub z γ_5^2 :

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa d^\nu) &= \text{Tr}\left(\gamma^\mu(F_V^1 + \xi F_V^2) p_\kappa \gamma^\kappa (p + p')^\nu (\xi F_V^2)^*\right) \\ &\quad + \text{Tr}\left(\gamma^\mu \gamma_5 F_A p_\kappa \gamma^\kappa 2\gamma_5 q^\nu F_P^*\right) \\ &= 4p^\mu (p + p')^\nu (F_V^1 + \xi F_V^2) (\xi F_V^2)^* - 8p^\mu q^\nu F_A F_P^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma^\mu a \gamma^\nu c) &= \text{Tr}\left(\gamma^\mu(F_V^1 + \xi F_V^2) \gamma^\nu (F_V^1 + \xi F_V^2)^*\right) + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_5 F_A \gamma^\nu \gamma_5 F_A^*) \\ &= 4(|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 - |F_A|^2) \eta^{\mu\nu},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma^\mu a d^\nu p'_\lambda \gamma^\lambda) &= \text{Tr}\left(\gamma^\mu(F_V^1 + \xi F_V^2) (p + p')^\nu (\xi F_V^2)^* p'_\lambda \gamma^\lambda\right) \\ &\quad + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_5 F_A 2\gamma_5 q^\nu F_P^* p'_\lambda \gamma^\lambda) \\ &= 4p'^\mu (p + p')^\nu (F_V^1 + \xi F_V^2) (\xi F_V^2)^* + 8p'^\mu q^\nu F_A F_P^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tr}(b^\mu p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c) &= -\text{Tr}\left((p + p')^\mu \xi F_V^2 p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu (F_V^1 + \xi F_V^2)^*\right) \\ &\quad + \text{Tr}(2\gamma_5 q^\mu F_P p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma_5 F_A^*) \\ &= -4(p + p')^\mu p^\nu \xi F_V^2 (F_V^1 + \xi F_V^2)^* + 8q^\mu p^\nu F_P F_A^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tr}(b^\mu p_\kappa \gamma^\kappa d^\nu p'_\lambda \gamma^\lambda) &= -\text{Tr}\left((p + p')^\mu \xi F_V^2 p_\kappa \gamma^\kappa (p + p')^\nu (\xi F_V^2)^* p'_\lambda \gamma^\lambda\right) \\ &\quad + \text{Tr}(2\gamma_5 q^\mu F_P p_\kappa \gamma^\kappa 2\gamma_5 q^\nu F_P^* p'_\lambda \gamma^\lambda) \\ &= -4(p + p')^\mu (p + p')^\nu |\xi F_V^2|^2 p \cdot p' - 16q^\mu q^\nu |F_P|^2 p \cdot p',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tr}(b^\mu \gamma^\nu c p'_\lambda \gamma^\lambda) &= -\text{Tr}\left((p + p')^\mu \xi F_V^2 \gamma^\nu (F_V^1 + \xi F_V^2)^* p'_\lambda \gamma^\lambda\right) \\ &\quad + \text{Tr}(2\gamma_5 q^\mu F_P \gamma^\nu \gamma_5 F_A^* p'_\lambda \gamma^\lambda) \\ &= -4(p + p')^\mu p'^\nu \xi F_V^2 (F_V^1 + \xi F_V^2)^* - 8q^\mu p'^\nu F_P F_A^*.\end{aligned}$$

Do wyliczenia pozostał już tylko ślad wyrazu zawierającego iloczyn czterech macierzy gamma:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c p'_\lambda \gamma^\lambda) &= p_\kappa p'_\lambda \text{Tr}\left(\gamma^\mu \left((F_V^1 + \xi F_V^2) + \gamma_5 F_A\right) \gamma^\kappa \gamma^\nu \left((F_V^1 + \xi F_V^2)^* + \gamma_5 F_A^*\right) \gamma^\lambda\right) \\ &= p_\kappa p'_\lambda (|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 + |F_A|^2) \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda) \\ &\quad + p_\kappa p'_\lambda \left((F_V^1 + \xi F_V^2) F_A^* + F_A (F_V^1 + \xi F_V^2)^*\right) \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda) \\ &= p_\kappa p'_\lambda (|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 + |F_A|^2) \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda) \\ &\quad - 2p_\kappa p'_\lambda \Re\left((F_V^1 + \xi F_V^2) F_A^*\right) \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\lambda),\end{aligned}$$

gdzie $\Re(\cdot)$ oznacza część rzeczywistą (\cdot) . Skorzystajmy teraz ze wzorów (A.4):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu a p_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\nu c p'_\lambda \gamma^\lambda) &= 8i\Re\left((F_V^1 + \xi F_V^2)F_A^*\right)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}p_\kappa p'_\lambda \\ &\quad + 4(|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 + |F_A|^2)(p^\mu p'^\nu - p \cdot p' \eta^{\mu\nu} + p'^\mu p^\nu). \end{aligned}$$

Otrzymane wyrażenia na ślady możemy wstawić do $H^{\mu\nu}$. Po uporządkowaniu wyrazów podobnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left[(p + p')^\mu (p + p')^\nu |\xi F_V^2|^2 \left(1 + \frac{p \cdot p'}{M^2}\right) - 4q^\mu q^\nu |F_P|^2 \left(1 - \frac{p \cdot p'}{M^2}\right) \right. \\ &\quad - 4(p + p')^\mu (p + p')^\nu \Re\left((F_V^1 + \xi F_V^2)(\xi F_V^2)^*\right) \\ &\quad + 4(M^2 - p \cdot p')|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 \eta^{\mu\nu} - 4(M^2 + p \cdot p')|F_A|^2 \eta^{\mu\nu} \\ &\quad - 4(p' - p)^\mu q^\nu F_A F_P^* - 4q^\mu (p' - p)^\nu F_P F_A^* \\ &\quad + 8i\Re\left((F_V^1 + \xi F_V^2)F_A^*\right)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}p_\kappa p'_\lambda \\ &\quad \left. + 4(|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 + |F_A|^2)(p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu)\right]. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Teraz wykorzystamy zmienną opisującą przekaz pędu $q = p' - p$ do wyrugowania pędu protonu. Aby zastąpić iloczyn skalarny $p \cdot p'$, wyliczmy q^2 :

$$q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 - 2p \cdot p' + p^2 = 2M^2 - 2p \cdot p', \tag{B.3}$$

więc potrzebna nam zależność to

$$p \cdot p' = M^2 - \frac{1}{2}q^2.$$

Po wstawieniu $p' = p + q$ i powyższej równości dostajemy

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left[\left(4p^\mu p^\nu + 2(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) + q^\mu q^\nu\right)|\xi F_V^2|^2 \left(2 - \frac{q^2}{2M^2}\right) - 2q^\mu q^\nu \frac{q^2}{M^2} |F_P|^2 \right. \\ &\quad - 4\left(4p^\mu p^\nu + 2(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) + q^\mu q^\nu\right)\Re\left((F_V^1 + \xi F_V^2)(\xi F_V^2)^*\right) \\ &\quad + 2q^2|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 \eta^{\mu\nu} - 2(4M^2 - q^2)|F_A|^2 \eta^{\mu\nu} \\ &\quad - 4q^\mu q^\nu F_A F_P^* - 4q^\mu q^\nu F_P F_A^* \\ &\quad + 8i\Re\left((F_V^1 + \xi F_V^2)F_A^*\right)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}p_\kappa q_\lambda \\ &\quad \left. + 4(|F_V^1 + \xi F_V^2|^2 + |F_A|^2)(2p^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)\right]. \end{aligned}$$

Ostatecznie zapiszemy tensor hadronowy w postaci

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[8p^\mu p^\nu w_1 + 4(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)w_1 - 2q^\mu q^\nu w_2 + 2\eta^{\mu\nu} w_3 + 8i\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}p_\kappa q_\lambda w_4\right],$$

ze współczynnikami w_i wyrażającymi się przez czynniki postaci następująco:

$$\begin{aligned}
w_1 &\doteq |F_V^1|^2 + |F_A|^2 - (2M)^{-2}q^2|\xi F_V^2|^2, \\
w_2 &\doteq |\xi F_V^2|^2(1 + (2M)^{-2}q^2) + 2\Re(F_V^1(\xi F_V^2)^*) + 4\Re(F_A F_P^*) + M^{-2}q^2|F_P|^2, \\
w_3 &\doteq q^2|F_V^1|^2 + 2q^2\Re(F_V^1(\xi F_V^2)^*) + q^2|\xi F_V^2|^2 - (4M^2 - q^2)|F_A|^2, \\
w_4 &\doteq \Re((F_V^1 + \xi F_V^2)F_A^*).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

B.3 Granica wysokoenergetyczna

Wprowadźmy oznaczenie

$$\mathcal{G} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi}$$

dla czynnika, który często będzie się powtarzał w obliczeniach. W równaniu (2.28) na str. 29 zdefiniowaliśmy wyrażenie

$$\kappa = \frac{\mathcal{G}}{(4ME_\nu)^2} \int dq^2 \left[|F_V^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_V^2|^2 + |F_A|^2 \right] (s-u)^2,$$

które wygodnie jest rozbić na składniki

$$\begin{aligned}
\kappa_A &= \frac{\mathcal{G}}{(4ME_\nu)^2} \int dq^2 |F_A|^2 (s-u)^2, \\
\kappa_V &= \frac{\mathcal{G}}{(4ME_\nu)^2} \int dq^2 \left[|F_V^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_V^2|^2 \right] (s-u)^2.
\end{aligned}$$

Najpierw wyliczymy κ_A . W tym celu zapiszmy jawnie osiowy czynnik postaci, jak w (2.26):

$$\kappa_A = \frac{\mathcal{G}}{(4ME_\nu)^2} \int dq^2 \frac{g_A^2 (s-u)^2}{(1 - q^2/M_A^2)^4} = \frac{\mathcal{G} g_A^2 M_A^8}{(4ME_\nu)^2} \int dq^2 \frac{(s-u)^2}{(M_A^2 - q^2)^4}.$$

Pozostajemy w układzie spoczywającego neutronu, więc $p \cdot k = ME_\nu$. Różnica $s - u$ zawiera q^2 , więc skorzystamy z triku, który pozwoli zapisać wyrażenie podcałkowe jako sumę ułamków prostych. Dodajmy i odejmijmy M_A^2 :

$$(s-u)^2 = (4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2 - M_A^2 + q^2)^2$$

i rozpiszmy następująco

$$(s-u)^2 = (4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)^2 - 2(4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)(M_A^2 - q^2) + (M_A^2 - q^2)^2.$$

Stąd wyrażenie podcałkowe możemy wyrazić jako

$$\frac{(s-u)^2}{(M_A^2 - q^2)^4} = \frac{(4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)^2}{(M_A^2 - q^2)^4} - \frac{2(4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)}{(M_A^2 - q^2)^3} + \frac{1}{(M_A^2 - q^2)^2}.$$

Po jego scałkowaniu od $(q^2)_A = -2ME_\nu$ do $(q^2)_B = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \kappa_A &= \frac{\mathcal{G} g_A^2 M_A^8}{(4ME_\nu)^2} \left(\frac{(4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)^2}{3(M_A^2 - q^2)^3} - \frac{4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2}{(M_A^2 - q^2)^2} + \frac{1}{M_A^2 - q^2} \right) \Bigg|_{(q^2)_A}^{(q^2)_B} \\ &= \frac{\mathcal{G} g_A^2 M_A^8}{(4ME_\nu)^2} \left(\frac{(4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)^2}{3M_A^6} - \frac{4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2}{M_A^4} + \frac{1}{M_A^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2)^2}{3(M_A^2 + 2ME_\nu)^3} + \frac{4ME_\nu - m_l^2 + M_A^2}{(M_A^2 + 2ME_\nu)^2} - \frac{1}{M_A^2 + 2ME_\nu} \right). \end{aligned}$$

W granicy $E_\nu \rightarrow \infty$ wszystkie wyrażenia zawierające $(q^2)_A$ dążą do zera. Wśród wyrazów z $(q^2)_B$ jedynie pierwszy zawiera kwadrat energii neutrina, więc tylko on ma wartość różną od zera:

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \kappa_A = \mathcal{G} \frac{g_A^2 M_A^2}{3}.$$

Teraz przejdźmy do κ_ν . W wyrażeniu podcałkowym występuje różnica czynników postaci:

$$\begin{aligned} |F_\nu^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_\nu^2|^2 &= \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{q^2}{M_\nu^2}\right)^{-4} \left[1 - \frac{q^2}{4M^2} (1 + \xi)^2\right] \\ &= \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{q^2}{M_\nu^2}\right)^{-4} \left[(1 + \xi)^2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right) - \xi(\xi + 2)\right]. \end{aligned}$$

Pierwszy ułamek można skrócić i przepisać w postaci

$$\begin{aligned} |F_\nu^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_\nu^2|^2 &= \frac{(1 + \xi)^2}{(1 - q^2/M_\nu^2)^4} - \frac{\xi(\xi + 2)}{(1 - q^2/(4M^2))(1 - q^2/M_\nu^2)^4} \\ &= \frac{(1 + \xi)^2 M_\nu^8}{(M_\nu^2 - q^2)^4} - \frac{\xi(\xi + 2) 4M^2 M_\nu^8}{(4M^2 - q^2)(M_\nu^2 - q^2)^4}. \end{aligned}$$

Czynnik występujący w drugim wyrazie rozłożymy na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4M^2 - q^2)(M_\nu^2 - q^2)^4} &= \frac{1}{\mathcal{R}^4} \left(\frac{1}{4M^2 - q^2} - \frac{1}{M_\nu^2 - q^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mathcal{R}^3} \left(\frac{1}{(M_\nu^2 - q^2)^2} - \frac{\mathcal{R}}{(M_\nu^2 - q^2)^3} \right) + \frac{1}{\mathcal{R}(M_\nu^2 - q^2)^4}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{R} = 4M^2 - M_\nu^2$. Żeby skrócić zapis, wprowadzimy także oznaczenia $\mathcal{R}_\xi = 4M^2 - M_\nu^2(1 + \xi)^2$ i $\mathcal{K} = 4M^2 M_\nu^8 \xi(\xi + 2)$:

$$|F_\nu^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_\nu^2|^2 = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^4} \left(\frac{1}{M_\nu^2 - q^2} - \frac{1}{4M^2 - q^2} \right) + \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^3 (M_\nu^2 - q^2)^2} \\ + \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^2 (M_\nu^2 - q^2)^3} + \frac{M_\nu^8 \mathcal{R}_\xi}{\mathcal{R} (M_\nu^2 - q^2)^4}.$$

Wykonamy sztuczkę analogiczną do tej przy wyliczaniu κ_A , wszystkie ułamki z M_ν^2 w mianowniku pomnożymy przez $(s-u)^2$ w postaci

$$(s-u)^2 = (4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2)^2 - 2(4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2)(M_\nu^2 - q^2) + (M_\nu^2 - q^2)^2,$$

a jeden zawierający $4M^2$ — w postaci

$$(s-u)^2 = (4ME_\nu - m_l^2 + 4M^2)^2 - 2(4ME_\nu - m_l^2 + 4M^2)(4M^2 - q^2) + (4M^2 - q^2)^2.$$

Po uporządkowaniu wyrazów możemy zapisać

$$\left[|F_\nu^1|^2 - \frac{q^2}{4M^2} |\xi F_\nu^2|^2 \right] (s-u)^2 = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4,$$

grupując według rosnącej potęgi mianownika:

$$\mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^4} \left[\frac{(4M^2 - M_\nu^2)^2}{M_\nu^2 - q^2} - 2(4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2) \frac{(4M^2 - M_\nu^2)}{M_\nu^2 - q^2} \right. \\ \left. + \frac{(4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2)^2}{M_\nu^2 - q^2} - \frac{(4ME_\nu - m_l^2 + 4M^2)^2}{4M^2 - q^2} \right] \\ = (4ME_\nu - m_l^2 + 4M^2)^2 \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^4} \left[\frac{1}{M_\nu^2 - q^2} - \frac{1}{4M^2 - q^2} \right], \\ \mathcal{U}_2 = \frac{1}{(M_\nu^2 - q^2)^2} \left[\frac{M_\nu^8 \mathcal{R}_\xi}{\mathcal{R}} - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^3} (4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2)^2 \right. \\ \left. - \frac{2\mathcal{K}}{\mathcal{R}^3} (4M^2 - M_\nu^2)(4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2) \right], \\ \mathcal{U}_3 = \frac{4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2}{(M_\nu^2 - q^2)^3} \left[\frac{\mathcal{K}(4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2)}{\mathcal{R}^2} - \frac{2M_\nu^8 \mathcal{R}_\xi}{\mathcal{R}} \right], \\ \mathcal{U}_4 = \frac{M_\nu^8 \mathcal{R}_\xi}{\mathcal{R} (M_\nu^2 - q^2)^4} (4ME_\nu - m_l^2 + M_\nu^2)^2.$$

Scałkowanie otrzymanych ułamków prostych nie przedstawia trudności. Podobnie jak przy obliczaniu κ_A , w granicy $E_\nu \rightarrow \infty$ jedynie czynniki zawiera-

jące $(4ME_\nu)^2$ są różne od zera. Stąd

$$\begin{aligned}\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \mathcal{G}/(4ME_\nu)^2 \int dq^2 \mathcal{U}_1 &= \frac{\mathcal{G}\mathcal{K}}{\mathcal{R}^4} \ln \frac{4M^2}{M_V^2}, \\ \lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \mathcal{G}/(4ME_\nu)^2 \int dq^2 \mathcal{U}_2 &= -\frac{\mathcal{G}\mathcal{K}}{M_V^2 \mathcal{R}^3}, \\ \lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \mathcal{G}/(4ME_\nu)^2 \int dq^2 \mathcal{U}_3 &= \frac{\mathcal{G}\mathcal{K}}{2M_V^4 \mathcal{R}^2}, \\ \lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \mathcal{G}/(4ME_\nu)^2 \int dq^2 \mathcal{U}_4 &= \frac{\mathcal{G}\mathcal{R}_\xi M_V^2}{3\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Wyrażenie κ to suma κ_A i κ_V , więc

$$\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \kappa = \mathcal{G} \frac{g_A^2 M_A^2}{3} + \frac{\mathcal{G}}{3\mathcal{R}} \left[\frac{3\mathcal{K}}{\mathcal{R}^3} \ln \frac{4M^2}{M_V^2} - \frac{3\mathcal{K}}{M_V^2 \mathcal{R}^2} + \frac{3\mathcal{K}}{2M_V^4 \mathcal{R}} + M_V^2 \mathcal{R}_\xi \right].$$

Pamiętając, że $\mathcal{R}_\xi = 4M^2 - M_V^2(1 + \xi)^2$, a $\mathcal{R} = 4M^2 - M_V^2$, przekształcimy ostatni składnik następująco:

$$\begin{aligned}M_V^2 \mathcal{R}_\xi &= M_V^2 (4M^2 - M_V^2(1 + \xi)^2) = M_V^2 (4M^2 - M_V^2) - \xi(\xi + 2)M_V^4 \\ &= M_V^2 \mathcal{R} - \xi(\xi + 2)M_V^4.\end{aligned}$$

Po skorzystaniu z $\mathcal{K} = 4M^2 M_V^8 \xi(\xi + 2)$ możemy zapisać

$$\begin{aligned}M_V^2 \mathcal{R}_\xi + \frac{3\mathcal{K}}{2M_V^4 \mathcal{R}} &= M_V^2 \mathcal{R} - \xi(\xi + 2)M_V^4 + \xi(\xi + 2)M_V^4 \frac{6M^2}{\mathcal{R}} \\ &= M_V^2 \mathcal{R} + \xi(\xi + 2)M_V^4 \frac{2(M^2 - M_V^2) + 3M_V^2}{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Oznacza to, że graniczny przekrój czynny wynosi

$$\begin{aligned}\lim_{E_\nu \rightarrow \infty} \sigma &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{6\pi} \left[M_V^2 + g_A^2 M_A^2 + \frac{2\xi(\xi + 2)M_V^4}{(4M^2 - M_V^2)^2} (M^2 - M_V^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\xi(\xi + 2)M_V^8}{(4M^2 - M_V^2)^3} \left(\frac{4M^2}{4M^2 - M_V^2} \ln \frac{4M^2}{M_V^2} - 1 \right) \right],\end{aligned}$$

jeśli α i β z (2.28) są równe zero. Jak przekonał się, w κ „przeżyły” tylko wyrazy mnożone przez kwadrat energii neutrina, bo wyrażenie podcałkowe nie zawierało dostatecznie wysokiej potęgi q^2 w liczniku, żeby zrównoważyć $1/E_\nu^2$. Składnik β występuje z przeciwnym znakiem w przekroju antyneutrina, więc twierdzenie Pomeranchuka lub bezpośrednio obliczenia pozwalają stwierdzić, że wynosi zero. Całka α zawiera wyrażenia z q^2 w potędze co najwyżej minus pierwszej, więc także zbiega do zera. Ostatecznie możemy stwierdzić, że powyższy wzór istotnie jest granicą przekroju czynnego przy energii neutrina dążącej do nieskończoności.

Bibliografia

- [1] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, cz. 6, PWN, Warszawa 1974.
- [2] „Review of Particle Physics”, Phys. Lett. **B592**, 1 (2004).
- [3] S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych*, t. 1, PWN, Warszawa 1999.
- [4] S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych*, t. 2, PWN, Warszawa 1999.
- [5] C.H. Llewellyn Smith, Phys. Rep. **3**, 261 (1972).
- [6] B. Średniawa, *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1978.
- [7] S. Weinberg, Phys. Rev. **124**, 2049 (1961).
- [8] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, t. 3, PWN, Warszawa 2001.
- [9] V.R. Pandharipande, Nucl. Phys. **B112** (Proc. Suppl.), 51 (2002).
- [10] R.R. Whitney *et al.*, Phys. Rev. **C9**, 2230 (1974).
- [11] J. Engel *et al.*, nucl-th/9304017.
- [12] T. de Forest, Jr., Nucl. Phys. **A392**, 232 (1983).
- [13] W.M. Alberico *et al.*, Nucl. Phys. **A623**, 471 (1997).
- [14] O. Benhar *et al.*, Nucl. Phys. **A579**, 493 (1994).
- [15] O. Benhar *et al.*, Phys. Rev. **C44**, 2328 (1991).
- [16] O. Benhar, V.R. Pandharipande, Phys. Rev. **C47**, 2218 (1993).
- [17] J.D. Bjorken, S.D. Drell, *Relatywistyczna teoria kwantów*, PWN, Warszawa 1985.