

Artur Marek Ankowski

---

## Efekty jądrowe w oddziaływaniach neutrin

praca doktorska napisana pod kierunkiem  
dr. hab. Jana Sobczyka

czerwiec 2008

Instytut Fizyki Teoretycznej  
Uniwersytetu Wrocławskiego



## Streszczenie

Celem przedstawianej rozprawy doktorskiej jest ulepszenie opisu oddziaływań neutrin z jądrami atomowymi przy energii około 1 GeV. Konstruujemy przybliżone funkcje spektralne tlenu, wapnia i argonu. Stosując je jako opis jądra przy rozpraszaniu elektronów, porównujemy nasze wyniki z danymi doświadczalnymi w szerokim zakresie energii i kątów rozpraszania. Dzięki uzyskaniu bardzo dobrej zgodności z pomiarami możemy stwierdzić, kiedy załamuje się przybliżenie impulsowe, leżące u podstaw najczęściej stosowanych modeli, i ocenić jego wpływ na niepewność przekroju czynnego na oddziaływania neutrin. Ustalamy, które pomiary dla elektronów leżą w obszarze kinematycznym odpowiadającym rozpraszaniu neutrin i w sposób pośredni pokazujemy, że osiągnęliśmy wysoką precyzję modelowania efektów jądrowych dla neutrin. Szczegółowo omawiamy źródła niepewności przedstawionego podejścia i podajemy wszystkie szczegóły potrzebne do jego zastosowania w generatorach Monte Carlo. Z myślą o implementacji w symulacjach prezentujemy także uproszczony model, zwany opisem efektywnym, który bardzo dobrze przybliża funkcję spektralną przy obliczaniu przekrojów neutrin i w analizie hipotetycznego rozpadu protonu.

## Abstract

This desideration is aimed at improving description of neutrino-nucleus interactions in the 1-GeV energy range. Approximate spectral functions of oxygen, calcium, and argon are constructed. Using them as a description of the nucleus in electron scattering, we compare calculated results to experimental data in a wide spectrum of beam energies and scattering angles. Thanks to very good agreement with the data, we can deduce when the impulse approximation, underlying the commonly used models, breaks down and estimate influence of this fact on uncertainty of the neutrino cross section. We determine which electron-scattering measurements lie in the kinematical region corresponding to neutrino scattering and indirectly show high accuracy of modeling nuclear effects in neutrino interactions. Sources of uncertainty of the presented approach are described in detail. All the details needed for application of the model to Monte Carlo generators are given. Having in mind implementation in simulations, we present also a simplified model, called the effective description, which approximates very well the spectral function in calculations of the neutrino cross sections and in analysis of hypothetical proton decay.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Przybliżenie impulsowe</b>	<b>11</b>
2.1	Podstawowe założenie . . . . .	11
2.2	Przekrój czynny dla neutrin . . . . .	12
2.3	Rozpraszanie elektronów . . . . .	20
2.4	Funkcja spektralna . . . . .	21
2.5	Funkcja składająca . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Czy potrzebujemy funkcji spektralnej?</b>	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>Opis modelu</b>	<b>35</b>
4.1	Opis części średniopolowej . . . . .	35
4.2	Część korelacyjna . . . . .	38
4.3	Uwzględnienie oddziaływań końcowych . . . . .	39
4.4	Szczegóły techniczne . . . . .	42
4.4.1	Rozkłady pędów . . . . .	42
4.4.2	Opis poziomów energetycznych . . . . .	43
4.5	Algorytm programu . . . . .	45
4.5.1	Wprowadzenie teoretyczne . . . . .	46
4.5.2	Algorytm obliczania przekroju czynnego bez FSI . . . . .	48
4.5.3	Algorytm obliczania przekroju czynnego z FSI . . . . .	50
4.5.4	Szczegóły implementacji . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Wyniki</b>	<b>53</b>
5.1	Selekcja danych . . . . .	53
5.2	Rozpraszanie elektronów . . . . .	56
5.2.1	Tlen . . . . .	56
5.2.2	Wapń . . . . .	58
5.2.3	Argon . . . . .	62
5.3	Oddziaływania neutrin . . . . .	63

5.4	Niepewności modelu . . . . .	64
5.4.1	Uwagi ogólne . . . . .	65
5.4.2	Argon . . . . .	67
5.4.3	Oddziaływania końcowe . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Opis efektywny</b>	<b>71</b>
6.1	Wprowadzenie modelu . . . . .	71
6.2	Wyniki . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>80</b>

## Rozdział 1

# Wprowadzenie

Gdy w 1934 roku H. Bethe i R. Peierls oszacowali przekrój czynny dla rozpraszania neutrin na nukleonach [1], podsumowali swoją pracę stwierdzeniem, że w praktyce nie ma sposobu ich detekcji<sup>1</sup>. Choć opublikowana wartość była poprawna, po 22 latach to, co wydawało się niemożliwe, stało się faktem: F. Reines i C. Cowan wraz asystentami zaobserwowali oddziaływania antyneutrin produkowanych w reaktorze jądrowym [2]. W latach sześćdziesiątych Davis rozpoczął pomiary neutrin słonecznych, a od lat siedemdziesiątych prowadził je już regularnie [3]. Okazało się wtedy, że obserwowany strumień stanowi zaledwie jedną trzecią przewidywanego teoretycznie [4, 5]. Podobne rezultaty otrzymano m.in. w Kamiokande [6]. Ostateczne rozstrzygnięcie tej zagadki przyniosły wyniki eksperymentu SNO [7]: w drodze na Ziemię neutrina zmieniają zapach, dlatego mierzony strumień neutrin elektronowych różni się od obliczonego z modelu Słońca [8]. Jest to zgodne z hipotezą wysuniętą przez Gribova i Pontecorvo [9] w 1969 roku i rozważaną przez Wolfensteina [10] w 1978 r. Oscylacje stwierdzono także dla neutrin atmosferycznych [11], reaktorowych i akceleratorowych (zob. praca [12] i podane w niej odnośniki).

Nadal nie wiemy, czy neutrina to cząstki Diraca czy Majorany. Nie potrafimy określić bezwzględnej wartości mas neutrin. Nie znamy trzeciego kąta parametryzującego macierz mieszania neutrin (jeden mierzy się głównie dla neutrin słonecznych, drugi dla atmosferycznych). Jeśli jest on różny od zera to neutrina mogą łamać symetrię CP i tym samym odpowiadać za część asymetrii między materią a antymaterią. Przy odpowiednio dużej wartości tego kąta powinno być możliwe wyznaczenie fazy związanej z łamaniem symetrii CP.

Żeby odpowiedzieć na te pytania, musimy zwiększyć precyzję pomiarów. Nie chodzi tu tylko o dokładność aparatury. Ponieważ w detektorach neutrina oddziałują z jądrami atomowymi, gros niepewności pochodzi od efektów jądrowych. Dlatego kluczową rolę w przyszłych eksperymentach odegra ulepszenie opisu jąder atomowych w modelach teoretycznych. Bez tego wkładu rozwój fizyki neutrin równie spektakularny jak w ostatnich dziesięciu latach nie będzie możliwy.

Interesują nas głównie neutrina o energii około 1 GeV, bo wokół nich koncentruje się uwaga powstających i istniejących eksperymentów, takich jak T2K, MiniBooNE i SciBooNE (zob. porównanie ich wiązek na rysunku 1.7 w dokumen-

---

<sup>1</sup>„[...] one can conclude that there is no practically possible way of observing the neutrino”.

cie [13]). Gdy w tym zakresie energii wyprowadza się wyrażenie na przekrój czynny przy minimalnej ilości założeń [14], to otrzymany wynik jest iloczynem przekroju na pojedynczym nukleonie i tak zwanej funkcji spektralnej, bo stopniami swobody są nukleony. Funkcja spektralna zawiera wszystkie informacje o budowie jądra: określa prawdopodobieństwo znalezienia w nim nukleonu o danym pędzie i energii. Gdyby nie występowały żadne oddziaływania między nukleonami, to funkcja spektralna sprowadzałaby się do modelu gazu Fermiego. Precyzyjne doświadczenia z rozpraszaniem elektronów wskazywały [15], że takie podejście jest zbyt uproszczone. Przeprowadzony niedawno eksperyment [16] zmierzył funkcję spektralną węgla i bezpośrednio udowodnił, że oddziaływania między nukleonami mają istotny wpływ na rozkład ich pędów i energii, dlatego ważne są dokładne obliczenia funkcji spektralnych.

Wybijany nukleon porusza się w materii jądrowej i może się ulegać rozpraszaniu na pozostałych składnikach jądra, co zmienia nie tylko jego pęd, ale także bilans energii. Te tzw. oddziaływania końcowe zaciemniają obraz pierwotnego wierzchołka oddziaływania i utrudniają pomiar funkcji spektralnej. Zmianom podlega zwłaszcza przekrój otrzymany w kinematyce poprzecznej [17]. Dla elektronów obserwuje się redystrybucję przekroju czynnego i jego przesunięcie ku niższym przekazom energii. Spośród kilku podejść do uwzględniania oddziaływań końcowych, jak na przykład metoda Wentzela-Kramersa-Brillouina, podejście relatywistycznego pola średniego [18], korelacyjne przybliżenie Glaubera [19], czy potencjał optyczny [20], wybraliśmy tę ostatnią metodę. W przypadku neutrin waga tego efektu jest mniejsza, a istotny wpływ wywiera tylko blokowanie Pauliego, bo interesują nas całkowite i jednokrotnie różniczkowe przekroje czynne. Dlatego przy rozpraszaniu neutrin pominiemy oddziaływania końcowe. Można je wprowadzić w sposób analogiczny jak dla elektronów.

Stosowane w detektorach neutrinowych tarcze to głównie: węgiel (na przykład w postaci oleju mineralnego), tlen (jako składnik cząsteczki wody), argon i żelazo. Spośród wymienionych jąder tylko argon nie został do tej pory opisany dokładną funkcją spektralną [21, 22]. Jest to istotna luka ze względu na zalety ciekłoargonowych komór projekcji czasowej (LArTPCs, od ang. *liquid argon time projection chambers*). Aparatura tego typu nawet przy niskiej energii obrazuje oddziaływania z dokładnością komór pęcherzykowych i umożliwia identyfikację naładowanych cząstek, a dzięki temu — bardzo dobre odrzucanie tła. Dlatego przy tej samej czułości LArTPCs są 3–4 razy mniejsze od detektorów wodnych i nie tylko nie muszą znajdować się głęboko pod ziemią, lecz nawet mogą zostać umieszczone bezpośrednio na powierzchni [23]. Wymienione cechy istotnie wpływają na koszt eksperymentu, a tym samym na decyzję o jego finansowaniu. Dodatkowym argumentem przemawiającym na korzyść LArTPCs jest ich przewaga nad detektorami wodnymi przy badaniu niektórych kanałów hipotetycznego rozpadu protonu, szczególnie procesu  $p \rightarrow \bar{\nu}K^+$  [24]. Dzięki wiedzy uzyskanej we włoskim ICARUS-ie [25, 26, 27], pierw-



szych próbach w USA [28] i porównaniach możliwości detektorów wodnych z argonowymi [29] można się spodziewać, że potencjał LArTPCs zostanie wykorzystany już wkrótce. Z tego względu uznaliśmy, że warto poświęcić uwagę ulepszeniu opisu efektów jądrowych dla argonu.

Wyniki uzyskane we wstępnym etapie badań opublikowaliśmy w pracy [30]. Przedstawiony w niej model zupełnie pomija rozmycie poziomów energetycznych i uwzględnia jedynie ich średnią wartość. W przypadku rozpraszania neutrin na tlenie dość dobrze przybliża on funkcję spektralną z publikacji [21], dlatego dla argonu można oczekiwać zbliżonej precyzji. Ulepszone podejście, stanowiące centralny punkt tej rozprawy doktorskiej, wprowadziliśmy w artykule [31]. Uwzględnia ono szerokość poziomów energetycznych i pełną ich strukturę. Można je zastosować dla każdego jądra średniej wielkości, a przekroje czynne nie zawierają żadnych nieróżniczkowalnych punktów. Wstępne wyniki dla tlenu, wapnia i argonu przedstawiliśmy na konferencji NuInt07 [32], a ostateczne zostały opublikowane w pracy [33].

W rozprawie podajemy przybliżone funkcje spektralne argonu i wapnia. Wapń jest najbardziej podobnym do argonu jądrem, dla którego przeprowadzono precyzyjne pomiary rozpraszania elektronów. Służy on nam do przetestowania precyzji naszego podejścia i pozwala pokazać bardzo dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi w obszarze kinematycznym odpowiadającym oddziaływaniom neutrin. Dodatkowo sprawdzamy, w jakim stopniu analogicznie otrzymane przewidywania dla tlenu zgadzają się z pomiarami i czy nie odbiegają od wyników dla modelu z artykułu [21, 34]; rozbieżności są porównywalne z niepewnościami pomiarowymi i wynikają z innych rozkładów pędów. Ogólnie rzecz biorąc, testy pokazały bardzo dobrą zgodność z doświadczalnymi przekrojami czynnymi.

U podstaw naszego podejścia leży standardowe założenie, zwane przybliżeniem impulsowym, że w oddziaływaniu z leptonem uczestniczy pojedynczy nukleon. Panuje powszechne przekonanie, że to przybliżenie sprawdza się przy przekazie pędu powyżej 400 MeV/c [35]. W pracy [36] zasugerowano jednak, że model gazu Fermiego, oparty na przybliżeniu impulsowym, prawidłowo przewiduje przekrój czynny nawet przy energii neutrina 200 MeV, choć wtedy wszystkie zderzenia odbywają się przy mniejszych przekazach pędu. Uzyskane przez nas wyniki dla rozpraszania elektronów pokazują wyraźnie, że stosowanie przybliżenia impulsowego przy przekazach pędu poniżej 400 MeV/c nie ma żadnego uzasadnienia. Dzięki temu możemy ustalić, jaka część kwazielastycznego przekroju neutrin jest niewłaściwie opisana i uzyskać pewne wyczucie, co do niepewności tkwiących w stosowanym podejściu teoretycznym.

Żeby prawidłowo modelować oddziaływania przy niskich przekazach pędu trzeba zastosować przybliżenie przypadkowych faz (RPA, od ang. *Random Phase Approximation*) lub ciągłe RPA, w których stopniami swobody nie są nukleony, tylko kolektywne wzbudzenia jądra. Takie podejście wiąże się ze stosowaniem zupełnie

innych metod obliczeń teoretycznych.

W fizyce neutrin kontakt między modelem a doświadczeniem odbywa się za pośrednictwem generatorów Monte Carlo: konkretny opis oddziaływań i wiedza o budowie detektora służą do symulacji przewidywanej liczby zdarzeń oraz ich rozkładów, które następnie porównuje się z wynikami uzyskanymi w eksperymencie. Żeby ułatwić zastosowanie naszych wyników w obliczeniach, podajemy wszystkie potrzebne do tego szczegóły. Oprócz tego omawiamy sposób na prostą modyfikację programów napisanych dla gazu Fermiego — najczęściej używanego podejścia — która pozwala wprowadzić bardzo dobre przybliżenie modelu węgla, tlenu czy żelaza, przedstawionego w pracy [21].

Przez oddziaływania kwazielastyczne rozumiemy w tej pracy zarówno

$$\begin{aligned}\nu_l + n &\rightarrow l^- + p, \\ \bar{\nu}_l + p &\rightarrow l^- + n\end{aligned}$$

zachodzące na swobodnych czy związanych nukleonach, jak i procesy

$$\begin{aligned}e^- + p &\rightarrow e^- + p, \\ e^- + n &\rightarrow e^- + n\end{aligned}$$

na nukleonach w jądrze. W pierwszym przypadku określenie „kwazi-” odnosi się do faktu, że neutrino przechodzi w lepton naładowany, w drugim — mówi o elastycznym oddziaływaniu z kwaziswobodnym nukleonem w jądrze [38].

Pełny opis oddziaływań neutrin w symulacji Monte Carlo powinien zawierać rozpraszanie kwazielastyczne, koherentną i nierezonansową produkcję pionów, ich oddziaływania końcowe, wzbudzenie rezonansu delta, rozpraszanie głęboko nieelastyczne. . . Bogactwo występujących procesów zaciemnia sytuację; na dodatek modele większości z nich są obarczone dużymi niepewnościami. Dlatego zdecydowaliśmy się ograniczyć nasze rozważania do kwazielastycznych oddziaływań neutrin i elektronów i skonfrontować nasze wyniki z danymi tam, gdzie znaczenie innych procesów jest niewielkie. W ten sposób mamy jasny obraz sytuacji i testujemy opis jądra, a nie — samych oddziaływań. Rola rozpraszania kwazielastycznego maleje z energią, bo — jak pokazaliśmy analitycznie [37] — jego przekrój dąży do stałej wartości, a przekrój całkowity rośnie liniowo. Jednak w obszarze 1 GeV ma ono wciąż dominujący udział w reakcjach. W przypadku neutrin, dla ustalenia uwagi, opisujemy jedynie oddziaływania zachodzące przez prądy naładowane; zastosowanie wyników do prądów neutralnych nie wiąże się z żadnymi dodatkowymi trudnościami.

Plan tej rozprawy przedstawia się następująco: Rozpoczynamy od omówienia przybliżenia impulsowego w rozdziale 2. Wyprowadzamy przekrój czynny dla kwazielastycznego rozpraszania neutrin, pokazując, że w podejściu impulsowym

całą informację o budowie jądra zawiera funkcja spektralna. Przedstawiamy relację funkcji spektralnej do gazu Fermiego i podejście do oddziaływań końcowych. Następnie w rozdziale 3 opisujemy różnice między gazem Fermiego a funkcją spektralną [21], uzasadniamy, dlaczego stosowanie dokładnego modelu jądra w analizie wyników doświadczeń jest istotne i rozważamy konsekwencje załamania się przybliżenia impulsowego dla niepewności w przekroju czynnym neutrin. Wspominamy też krótko o rezultatach dla rozpadu protonu, porównując przewidywania dla gazu Fermiego i funkcji spektralnej. Prezentacji zaproponowanego przez nas przybliżenia funkcji spektralnej poświęcamy rozdział 4. Oprócz sposobu modelowania jądra i podejścia do oddziaływań końcowych, zawiera on wszystkie szczegóły techniczne oraz przykładowe algorytmy programów do obliczania przekrojów czynnych. W rozdziale 5 przedstawiamy otrzymane wyniki. Zaczynamy od ustalenia obszaru kinematycznego istotnego dla oddziaływań neutrin. Później pokazujemy, że między innymi w tym obszarze osiągnęliśmy wysoką precyzję opisu efektów jądrowych dla elektronów. Przy okazji wskazujemy, kiedy załamuje się stosowane podejście, a po przedyskutowaniu przekroju dla neutrin, przechodzimy do szczegółowego omówienia źródeł niepewności naszych przewidywań. Z myślą o istniejących generatorach Monte Carlo dla neutrin w rozdziale 6 prezentujemy możliwość ich prostego ulepszenia, która pozwala otrzymywać wyniki zbliżone do funkcji spektralnej. Pracę zamyka rozdział 7, zawierający podsumowanie.

## Spis publikacji

Prace teoretyczne:

- A. M. Ankowski i J. T. Sobczyk, *Phys. Rev. C* **77**, 044311 (2008)
- T. Abe *et al.* (ISS Detector Working Group), *Detectors and flux instrumentation for future neutrino facilities*, Rutherford Appleton Laboratory, Technical Report No. RAL-TR-2007-24, 2007; arXiv:0712.4129
- A. M. Ankowski i J. T. Sobczyk, [w:] *Proceedings of NuInt07*, red. G. P. Zeller, J. G. Morfin i F. Cavanna, AIP Conference Proceedings, Vol. 967, AIP, New York 2007, str. 106–108
- A. M. Ankowski i J. T. Sobczyk, *Phys. Rev. C* **74**, 054316 (2006)
- A. M. Ankowski, *Acta Phys. Pol. B* **37**, 2259 (2006)
- A. M. Ankowski, *Acta Phys. Pol. B* **37**, 377 (2006)

Prace doświadczalne:

- A. M. Ankowski *et al.* (ICARUS Collaboration), *Eur. Phys. J. C* **48**, 667 (2006)
- A. M. Ankowski *et al.* (ICARUS Collaboration), *Nucl. Instrum. Meth.* **A556**, 146 (2005)

## Rozdział 2

# Przybliżenie impulsowe

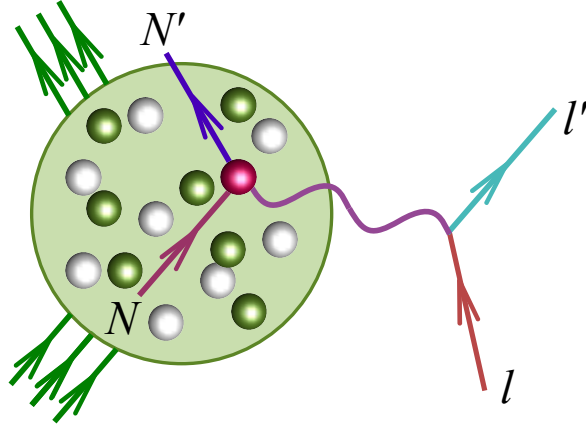
Niniejszy rozdział jest poświęcony omówieniu przybliżenia impulsowego, które leży u podstaw podejścia stosowanego w dalszej części rozprawy. Rozpoczniemy od wyjaśnienia na czym ono polega. Następnie w podrozdziale 2.2 przedstawimy wprowadzenie kwazielastycznego przekroju na rozpraszanie neutrin, w sposób analogiczny do obliczeń dla elektronów w pracy [39]. W tej, dość technicznej, części zwrócimy szczególną uwagę na czynione założenia. Pominiemy oddziaływania końcowe, czyli zastosujemy przybliżenie impulsu fali płaskiej (ang. *plane wave impulse approximation*). Istotna część rozważań dotyczy oddziaływań elektronów, dlatego w podrozdziale 2.3 zbierzemy odpowiednie wzory, pokazując różnice w stosunku do analogicznych wyrażeń dla neutrin. W podejściu impulsowym opis jądra jest zawarty w tak zwanej funkcji spektralnej, mówiącej o rozkładzie pędów i energii wiązania. Zajmiemy się nią w podrozdziale 2.4. Omówimy, na czym polegają obliczenia funkcji spektralnych w pracy [21] oraz związek między podejściem impulsowym i gazem Fermiego. Rozdział zamkniemy, przedstawiając, jak się uwzględnia oddziaływania końcowe.

### 2.1 Podstawowe założenie

Gdy oddziałujący z jądrem lepton emituje bozon pośredniczący o pędzie  $\mathbf{q}$ , sonduje on obszar o rozmiarach rzędu  $1/|\mathbf{q}|$ . Dla odpowiednio dużych  $|\mathbf{q}|$ , w obszarze oddziaływania znajduje się tylko jeden nukleon, dlatego możemy traktować jądro jako układ niezależnych cząstek. Inaczej mówiąc, lepton rozprasza się na pojedynczym nukleonie, o ile przekazuje jądro odpowiednio duży pęd. Na tym polega przybliżenie impulsowe (ang. *impulse approximation*), które schematycznie ilustruje rysunek 2.1.

W odmiennej sytuacji: przy niskim pędzie przekazywanym jądro przez lepton, obszar oddziaływania zwykle obejmuje wiele nukleonów, które kolektywnie absorbują cząstkę pośredniczącą. Prowadzi to do powstawania gigantycznych rezonansów jądrowych lub wzbudzenia stanów związanych (zobacz rysunek 1 w pracy [39]).

Podejście stosowane w tej rozprawie opiera się na przybliżeniu impulsowym, dlatego należy się spodziewać, że przy małych przekazach pędu zaobserwujemy rozejście się danych doświadczalnych i naszych przewidywań. Otrzymane przez



Rys. 2.1: Schemat oddziaływania w przybliżeniu impulsowym.

nas wyniki potwierdzają panujące powszechnie przekonanie, że powyżej 400 MeV/c jego używanie jest uzasadnione. Omówimy to dokładnie w rozdziale 5.

Od strony matematycznej przybliżenie impulsowe oznacza, że stan początkowy  $|\psi_i\rangle$  i końcowy  $|\phi_f\rangle$  możemy wyrazić jako

$$|\tau p \sigma\rangle \otimes |A - 1\rangle,$$

rozdzielając stan oddziałującego z leptonem nukleonu o izospinie  $\tau$ , czteropędzie  $p$  i spinie  $\sigma$  od stanu pozostałych  $A - 1$  nukleonów. Przy obliczaniu przekroju czynnego zastosujemy uproszczony zapis  $|\tau p \sigma, A - 1\rangle$ .

## 2.2 Przekrój czynny dla neutrin

Dla ustalenia uwagi będziemy rozważali oddziaływanie

$$\nu_\mu + A \rightarrow \mu^- + (A - 1) + p,$$

to znaczy kwazielastyczne rozpraszanie neutrina mionowego na jądrze o  $A$  nukleonach, z których  $Z$  to protony, a  $N$  — neutrony. Symbol  $(A - 1)$  oznacza układ cząstek powstały z początkowego jądra w wyniku oddziaływania; jego czteropęd zapiszemy jako  $p_{A-1} = (E_{A-1}, \mathbf{p}_{A-1})$ . Czteropędowi neutrina przypiszemy literę  $k = (E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ , w przypadku mionu użyjemy  $k' = (E_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}')$ , a dla powstającego protonu zarezerwujemy  $p' = (E_{\mathbf{p}'}, \mathbf{p}')$ . Przekaz czteropędu definiujemy jako  $q = k - k' = (\omega, \mathbf{q})$ .

Interesują nas oddziaływania przy energii  $\sim 1$  GeV. W związku z tym moduł  $q^2$  zawsze będzie zanedbywalnie mały w stosunku do kwadratu masy pośredniczącego bozonu  $W$  i dlatego posłużymy się teorią Fermiego (propagator  $W$  i dwa wierzchołki oddziaływania są zredukowane do punktu).

Amplituda przejścia między stanem początkowym a końcowym zadaje odpowiedni element macierzy  $S$ :

$$S_{fi} = \langle \phi_f | \psi_i \rangle$$

i związany z nim element macierzy  $\mathcal{M}$ :

$$S_{fi} = -2\pi i \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi},$$

potrzebny do obliczenia przekroju czynnego

$$\sigma = (2\pi)^4 \int \frac{1}{u} \overline{\sum_{\text{spiny}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) d^3 p_f. \quad (2.1)$$

Przez argument delty Diraca należy tutaj rozumieć różnicę końcowych i początkowych sum czteropędów, przez  $d^3 p_f$  — całkowanie po wszystkich pędach końcowych, a  $u$  jest względną szybkością uczestników zderzenia [40]. Będziemy rozważali sytuację, w której nie mierzy się spinów końcowych, dlatego trzeba po nich wysumować, a gdy wiązka i tarcza są niespolaryzowane<sup>1</sup> — jeszcze uśrednić po spinach początkowych (stąd kreska nad sumą).

Żeby uniknąć komplikacji, skorzystamy z faktu, że neutrino ma niezerową masę i unormujemy jego stan tak samo jak stany pozostałych cząstek:

$$\psi_\nu(x) = |\nu(\mathbf{k}, \lambda)\rangle e^{-ik \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_\nu}{E_{\mathbf{k}}}} \nu(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x},$$

czyli zgodnie z konwencją podręcznika Bjorkena i Drella [41]. Reguły dla diagramów Feynmana w przestrzeni pędów dają na  $S_{fi}$  formułę

$$S_{fi} = -2\pi i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_\nu m_\mu}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}}} \delta^4(k + p_A - p_{A-1} - p' - k') \\ \times \bar{\mu}(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(\mathbf{k}, \lambda) \langle p' \sigma', p_{A-1} \sigma_{A-1} | \hat{\mathcal{J}}^\mu(0) | p_A \sigma_A \rangle.$$

Otrzymujemy zatem, że

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_\nu m_\mu}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}}} \bar{\mu}(\mathbf{k}', \lambda') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu(\mathbf{k}, \lambda) \langle p' \sigma', p_{A-1} \sigma_{A-1} | \hat{\mathcal{J}}^\mu(0) | p_A \sigma_A \rangle \quad (2.2)$$

ze stałą Fermiego  $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  [42] i pędem początkowego jądra oznaczonym jako  $p_A$ . Literami  $\sigma$  i  $\lambda$  wyraziliśmy odpowiednie spiny. Początkowy stan jądra zapisaliśmy jako  $|p_A \sigma_A\rangle$ . Stan końcowy części hadronowej  $|p' \sigma', p_{A-1} \sigma_{A-1}\rangle$

<sup>1</sup>Dla oddziałujących neutrin rzut spinu na kierunek ruchu jest zawsze ujemny, dlatego nie uśrednia się po ich spinie.

scharakteryzowaliśmy, podając jej czteropęd  $p_{A-1}$  i spin  $\sigma_{A-1}$ ; należy jednak traktować to jako skrócony zapis wszystkich możliwych stopni swobody. Operator prądu  $\hat{\mathcal{J}}^\mu(0)$  usuwa neutron z początkowego jądra, przekształca go w proton i w tej postaci kreuje w stanie końcowym:

$$\hat{\mathcal{J}}^\mu(0) = \sum_{\sigma, \sigma''} \int d^3 p'' d^3 p a_{p(p'', \sigma'')}^\dagger \langle p(p'', \sigma'') | \hat{\mathcal{J}}^\mu(0) | n(p, \sigma) \rangle a_{n(p, \sigma)}.$$

Stosujemy konwencję normalizacyjną  $\{a_{\tau(p, \sigma)}^\dagger, a_{\tau'(p', \sigma')}\} = \delta_{\tau, \tau'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma, \sigma'}$ , gdzie wskaźniki  $\tau$  i  $\tau'$  określają izospin.

Założmy, że oprócz rozproszenia neutrina nie dochodzi do innych oddziaływań, tak że wybijany nukleon bezpośrednio wychodzi z jądra i bez żadnych zaburzeń może zostać zaobserwowany w doświadczeniu; jest to przybliżenie impulsu fali płaskiej (ang. *plane wave impulse approximation*). Wtedy jego pęd  $\mathbf{p}$  wynosi  $\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_{A-1}$ , zaś

$$a_{p(p'', \sigma'')} | p' \sigma', p_{A-1} \sigma_{A-1} \rangle = \delta^3(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}') \delta_{\sigma'', \sigma'} | p_{A-1} \sigma_{A-1} \rangle$$

oraz

$$\langle p_{A-1} \sigma_{A-1} | a_{n(p, \sigma)} | p_A \sigma_A \rangle = \langle p_{A-1} \sigma_{A-1} | a_{n(p, \sigma)} | p_A \sigma_A \rangle \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_A-\mathbf{p}_{A-1}}.$$

Wykorzystanie tych równości prowadzi do wniosku

$$\begin{aligned} \langle p' \sigma', p_{A-1} \sigma_{A-1} | \hat{\mathcal{J}}^\mu(0) | p_A \sigma_A \rangle &= \sum_{\sigma} \langle p(p', \sigma') | \hat{\mathcal{J}}^\mu(0) | n(p, \sigma) \rangle \\ &\quad \times \langle p_{A-1} \sigma_{A-1} | a_{n(p, \sigma)} | p_A \sigma_A \rangle \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_A-\mathbf{p}_{A-1}}. \end{aligned}$$

Oddziałujący neutron jest związany w jądrze, dlatego znajduje się poza powłoką masy i nie ma prostego związku między jego pędem a energią. Stanowi to istotny problem, chociażby dlatego, że bispinor neutronu nie spełnia równania Diraca i nie wiemy jak wyraża się jego stan. Ominiemy tę trudność, stosując *przepis de Foresta* [43]: potraktujemy oddziałujący nukleon jako swobodny, ale zmienimy bilans energii, by uwzględnił on, że jedynie część energii przekazanej przez lepton zostaje zaabsorbowana przez ten nukleon, a reszta wędruje do otaczających go nukleonów. Od tej pory do opisanego stanu neutronu nie potrzebujemy już czteropędów, wystarczą pędy.

Zdefiniujemy pomocniczą wielkość

$$s^{\mu\nu} = \sum_{\sigma_A, \sigma', \{A-1\}} \langle \mathbf{p}' \sigma', \mathbf{p}_{A-1} \sigma_{A-1} | \hat{\mathcal{J}}^\mu(0) | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle \langle \mathbf{p}' \sigma', \mathbf{p}_{A-1} \sigma_{A-1} | \hat{\mathcal{J}}^\nu(0) | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle^*, \quad (2.3)$$

która pojawi się przy liczeniu potrzebnego do otrzymania przekroju czynnego elementu  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  wysumowanego po wszystkich spinach i stanach końcowych układu



$A - 1$  nukleonów. Można pokazać, że

$$s^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma', \sigma} \langle p(\mathbf{p}', \sigma') | \hat{J}^\mu(0) | n(\mathbf{p}, \sigma) \rangle \langle p(\mathbf{p}', \sigma') | \hat{J}^\nu(0) | n(\mathbf{p}, \sigma) \rangle^* \\ \times \sum_{\sigma_A, \sigma'', \{A-1\}} \left| \langle \mathbf{p}_{A-1} \sigma_{A-1} | a_{n(\mathbf{p}, \sigma'')} | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle \right|^2,$$

zobacz praca [39] i podane w niej odnośniki. W powyższym równaniu  $\mathbf{p}$  stanowi skrócony zapis  $\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_{A-1}$ . Ze względu na stosowane konwencje, w notacji macierzej

$$s^{\mu\nu} = \frac{\cos^2 \theta_C}{2(2\pi)^6} \frac{M^2}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} \sum_{\sigma', \sigma} \bar{p}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu n(\mathbf{p}, \sigma) (\bar{p}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\nu n(\mathbf{p}, \sigma))^* \\ \times \sum_{\sigma_A, \sigma'', \{A-1\}} \left| \langle \mathbf{p}_{A-1} | a_{n(\mathbf{p})} | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle \right|^2,$$

gdzie  $\Gamma^\alpha$  jest macierzą reprezentacją prądu hadronowego  $\hat{J}^\alpha(0)$ , a  $\cos \theta_C = 0.97377$  to cosinus kąta Cabibbo, czyli element  $V_{ud}$  macierzy Cabibbo-Kobayashi-Maskawy [42]. Żeby uprościć zapis, od tej pory nie będziemy pisali wskaźników spinowych przy operatorze anihilacji i stanie końcowym  $A - 1$  nukleonów. Właściwości macierzy Diraca pozwalają w prosty sposób wyliczyć sprzężenie zespolone:

$$(\bar{p}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\nu n(\mathbf{p}, \sigma))^* = \bar{n}(\mathbf{p}, \sigma) \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 p(\mathbf{p}', \sigma'),$$

dlatego

$$s^{\mu\nu} = \frac{\cos^2 \theta_C}{2(2\pi)^6} \frac{M^2}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} \sum_{\sigma', \sigma} \bar{p}(\mathbf{p}', \sigma') \Gamma^\mu n(\mathbf{p}, \sigma) \bar{n}(\mathbf{p}, \sigma) \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 p(\mathbf{p}', \sigma') \\ \times \sum_{\sigma_A, \{A-1\}} \left| \langle \mathbf{p}_{A-1} | a_{n(\mathbf{p})} | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle \right|^2.$$

Skorzystamy z faktu, że rozwiązania równania Diraca o dodatniej częstotliwości wysumowane po spinach spełniają warunek

$$\sum_s u_\alpha(\mathbf{p}, s) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, s) = \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta},$$

z  $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$ , i zapiszemy  $s^{\mu\nu}$  przy pomocy odpowiedniego śladu macierzy

$$s^{\mu\nu} = \frac{\cos^2 \theta_C}{2(2\pi)^6} \frac{M^2}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} \text{Tr} \left( \Gamma^\mu \frac{\not{p} + M}{2M} \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 \frac{\not{p} + M}{2M} \right) \sum_{\sigma_A, \{A-1\}} \left| \langle \mathbf{p}_{A-1} | a_{n(\mathbf{p})} | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle \right|^2. \quad (2.4)$$

Jak wspomnieliśmy wcześniej, przy obliczeniach dla neutronu uśredniamy tylko po początkowym spinie jądra (tylko jeden spin  $\lambda$  daje niezerowy wkład, piszemy sumę dla wygody rachunków):

$$\overline{\sum_{\text{spiny}} |\mathcal{M}_{fi}|^2} = \overline{\sum_{\sigma_A} \sum_{\{A-1\}} \sum_{\sigma', \lambda', \lambda} |\mathcal{M}_{fi}|^2}$$

stąd na podstawie równań (2.2)–(2.4) otrzymujemy

$$\overline{\sum_{\text{spiny}} |\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2(2\pi)^6 E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu} \overline{\sum_{\sigma_A} \sum_{\{A-1\}} \left| \langle \mathbf{p}_{A-1} | a_{n(\mathbf{p})} | \mathbf{p}_A \sigma_A \rangle \right|^2}, \quad (2.5)$$

z tensorem leptonowym  $L_{\mu\nu}^{\text{weak}}$  i hadronowym  $\widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu}$  zdefiniowanymi jako

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\text{weak}} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\not{k} + m_\nu) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) (\not{k}' + m_\mu) \right], \\ \widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr} \left[ \Gamma^\mu (\not{p}' + M) \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 (\not{p} + M) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tylda nad tensorem hadronowym podkreśla, że otrzymaliśmy go stosując przepis de Foresta.

Żeby w prosty sposób zapisać energię neutronu poza powłoką masy, wprowadzimy energię usunięcia<sup>2</sup> (ang. *removal energy*), określoną ją jako

$$E \equiv E_{A-1} + M - M_A, \quad (2.7)$$

porównaj [44]. W przybliżeniu impulsowym jądro początkowe składa się z oddziałującego nukleonu i jądra końcowego, dlatego różnica

$$M_A - E_{A-1} = M - E$$

jest równa właśnie energii neutronu. Przy podanej definicji energia usunięcia to suma energii wzbudzenia jądra końcowego w jego układzie spoczynkowym i energii kinetycznej  $T_{A-1}$ . W niektórych artykułach korzysta się z energii usunięcia rozumianej jako  $E - T_{A-1}$ , a niekiedy jako  $-E$ .

Masę powstającego jądra możemy zapisać, z jednej strony jako

$$M_{A-1} = E_{A-1} - T_{A-1} = M_A - M + E - T_{A-1},$$

wyodrębiając z jego całkowitej energii część kinetyczną  $T_{A-1}$ , a z drugiej jako

$$M_{A-1} = \sqrt{E_{A-1}^2 - \mathbf{p}_{A-1}^2} = \sqrt{(M_A - M + E)^2 - \mathbf{p}_{A-1}^2}.$$

---

<sup>2</sup>Fizycy doświadczalni przy rozpraszaniu elektronów stosują nazwę brakująca energia (ang. *missing energy*), bo jest to różnica między energią przekazaną przez elektron, a obserwowaną energią kinetyczną wybitego protonu.

Będziemy się zajmowali tarczami średniej wielkości, takimi jak tlen czy wapń, dla których  $(M_A - M + E) \gg |\mathbf{p}_{A-1}|$ , zatem

$$T_{A-1} \simeq \frac{\mathbf{P}_{A-1}^2}{2(M_A - M + E)} \quad (2.8)$$

Wróćmy do wzoru na przekrój czynny i wykorzystajmy to, że względna szybkość neutrina i spoczywającego w układzie laboratoryjnym jądra wynosi 1:

$$\sigma^{\text{weak}} = (2\pi)^4 \int \overline{\sum_{\text{spiny}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta^4(k + p_A - p_{A-1} - p' - k') d^3 p_{A-1} d^3 p' d^3 k'.$$

Pęd układu  $A - 1$  nukleonów możemy wyrazić przez pęd neutronu  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_{A-1}$ , wtedy

$$\delta^4(k + p_A - p_{A-1} - p' - k') = \int dE \delta(M_A - M - E_{A-1} + E) \times \delta(E_{\mathbf{k}} + M - E - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{k}'}) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}'),$$

stąd po scałkowaniu względem pędu  $\mathbf{p}'$

$$\sigma^{\text{weak}} = (2\pi)^4 \int \overline{\sum_{\text{spiny}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(M_A - M - E_{A-1} + E) \times \delta(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'}) dE d^3 p d^3 k',$$

gdzie  $E_{\mathbf{p}'} = \sqrt{M^2 + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2}$ , przekaz energii  $\omega = E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}$ , a przekaz pędu  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Dzięki równaniu (2.5) otrzymujemy, że

$$\sigma^{\text{weak}} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2(2\pi)^2 E_{\mathbf{k}}} \int \frac{dE d^3 p d^3 k'}{E_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} P_{(n)}(\mathbf{p}, E) \delta(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'}) L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu},$$

przyjmując standardową definicję neutronowej funkcji spektralnej  $P_{(n)}(\mathbf{p}, E)$ :

$$P_{(n)}(\mathbf{p}, E) \equiv \overline{\sum_{\sigma_A}} \sum_{\{A-1\}} \left| \langle -\mathbf{p} | a_{n(\mathbf{p})} | \sigma_A \rangle \right|^2 \delta(M_A - M - E_{A-1} + E). \quad (2.9)$$

Pęd początkowego jądra jest równy zero, dlatego uprościliśmy zapis jego stanu. Uwzględniliśmy też, że  $\mathbf{p}_{A-1} = -\mathbf{p}$ . Funkcja spektralna  $P_{(n)}(\mathbf{p}, E)$  zadaje rozkład prawdopodobieństwa usunięcia z tarczy neutronu o pędzie  $\mathbf{p}$  i pozostawienia końcowego jądra z energią  $E_{A-1} = M_A - M + E$  [39, 45]. Dokładnie omówimy ją w podrozdziale 2.4.

Gdy wyrażenie podcałkowe we wzorze na przekrój czynny scałkujemy względem  $dE d^3 p$ , wynik może zależeć jedynie od wektora  $\mathbf{k}$ , bo uśredniamy po spinach: mamy do czynienia z symetrią cylindryczną. Do liczenia całki względem  $\mathbf{k}'$

wyberzmy układ współrzędnych tak, by jego oś  $z$  pokrywała się z  $\mathbf{k}$ . Ponieważ  $|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{k}^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta + \mathbf{k}'^2$ , to  $|\mathbf{q}|d|\mathbf{q}| = -|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| d \cos \theta$ , zaś z  $E_{\mathbf{k}'}^2 = |\mathbf{k}'|^2 + m_\mu^2$  wynika  $|\mathbf{k}'|d|\mathbf{k}'| = E_{\mathbf{k}'}dE_{\mathbf{k}'} = -E_{\mathbf{k}'}d\omega$ , zatem

$$d^3k' = \frac{|\mathbf{q}|E_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k}|} d\omega d|\mathbf{q}| d\phi = \frac{|\mathbf{q}|E_{\mathbf{k}'}}{E_{\mathbf{k}}} d\omega d|\mathbf{q}| d\phi.$$

Wykorzystanie tego jakobianu umożliwia zapisanie przekroju czynnego w końcowej postaci:

$$\frac{d\sigma^{\text{weak}}}{d\omega d|\mathbf{q}|} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi} \frac{|\mathbf{q}|}{E_{\mathbf{k}}^2} \int dE d^3p \frac{P_{(n)}(\mathbf{p}, E)}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}} \delta(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'}) L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Pozostaje nam jeszcze wyjaśnić, co należy rozumieć przez macierz prądu hadronowego i dokonać zwiężenia tensorów  $L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu}$ .

W przypadku rozpraszania na swobodnym neutronie dokładnie wiadomo, jak wyrazić  $\Gamma^\mu$ . Przesłanki doświadczalne<sup>3</sup> mówią o tym, że prąd hadronowy  $\bar{p} \Gamma^\mu n$  jest różnicą lorentzowskiego wektora i pseudowektora. Dlatego macierz operatora prądu otrzymuje się, zapisując tę różnicę w najogólniejszy możliwy sposób i redukując zbędne wyrazy na podstawie równania Diraca (zobacz podręcznik Weinberga [40] podrozdział 10.6 i [46] podrozdział 19.4.). Prowadzi to do postaci

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1 + i\sigma^{\mu\kappa} q_\kappa \frac{F_2}{2M} + \gamma^\mu \gamma_5 F_A + \gamma_5 \frac{q^\mu F_P}{M} \quad (2.11)$$

lub

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu (F_1 + F_2) - \frac{(p + p')^\mu F_2}{2M} + \gamma^\mu \gamma_5 F_A + \gamma_5 \frac{q^\mu F_P}{M}. \quad (2.12)$$

Obie są równoważne, bo rozkład Gordona przeprowadza jedną w drugą. Współczynniki  $F_i$  to skalarne funkcje kwadratu przekazu czteropędu  $q^2$ , zwane czynnikami postaci (ang. *form factors*).

Skoro oddziałujący z neutrinem neutron o pędzie  $\mathbf{p}$  ma energię  $M - E$ , to jego energia wiązania wynosi  $\varepsilon_{\mathbf{p}, E} = E_{\mathbf{p}} - M + E > 0$ , więc znajduje się on poza powłoką masy. *A priori* nie ma żadnego uzasadnienia, żeby stosować równanie (2.11) czy (2.12), bo nie są spełnione założenia wykorzystane przy ich wyrowadzaniu. Przepis de Foresta pozwala jednak skorzystać ze swobodnych macierzy prądu i spinorów, o ile zmienimy argument czynników postaci z  $q^2$  na  $\tilde{q}^2$ , gdzie  $\tilde{q} = (\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}, E}, \mathbf{q})$ . W ten sposób uwzględnimy, że z przekazanej przez neutrino energii część równą  $\varepsilon_{\mathbf{p}, E}$  pochłania jądro końcowe.

<sup>3</sup>Oddziaływania słabe nie zachowują parzystości, a produkując parę lepton-antylepton, preferują przeciwne skrętności powstających cząstek [47].

Standardowe obliczenia prowadzą do

$$L_{\mu\nu}^{\text{weak}} = 2(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - k \cdot k' g_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma),$$

$$\widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} M^2 \widetilde{H}_1 + p^\mu p^\nu \widetilde{H}_2 + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} p_\kappa \tilde{q}_\lambda \widetilde{H}_3 - \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \widetilde{H}_4 + \frac{1}{2} (p^\mu \tilde{q}^\nu + \tilde{q}^\mu p^\nu) \widetilde{H}_5,$$

ze skalarnymi współczynnikami  $\widetilde{H}_i$  zależnymi od  $\tau = -\tilde{q}^2/(4M^2)$  i czynników postaci w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_1 &= F_A^2(1 + \tau) + \tau(F_1 + F_2)^2, \\ \widetilde{H}_2 &= F_A^2 + F_1^2 + \tau F_2^2, \\ \widetilde{H}_3 &= 2F_A(F_1 + F_2), \\ \widetilde{H}_4 &= \frac{1}{4} F_2^2(1 - \tau) + \frac{1}{2} F_1 F_2 + F_A F_P - \tau F_P^2 \\ \widetilde{H}_5 &= \widetilde{H}_2.\end{aligned}$$

Ich zwężenie jest równe

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu} &= 2M^2 k \cdot k' \widetilde{H}_1 + (2p \cdot k p \cdot k' - M^2 k \cdot k') \widetilde{H}_2 \\ &+ (p \cdot k' k \cdot \tilde{q} - p \cdot k k' \cdot \tilde{q}) \widetilde{H}_3 + (k \cdot k' \tilde{q}^2 - 2k \cdot \tilde{q} k' \cdot \tilde{q}) \widetilde{H}_4 \\ &+ (p \cdot k k' \cdot \tilde{q} + p \cdot k' k \cdot \tilde{q} - k \cdot k' p \cdot \tilde{q}) \widetilde{H}_5.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Dzięki hipotezie o zachowaniu prądu wektorowego,  $F_1$  i  $F_2$  wyrażają się poprzez różnice elektrycznych i magnetycznych czynników postaci dla protonu i neutronu. W tej pracy stosujemy dla nich parametryzację BBBA05 [48]. Niewystępujący w oddziaływaniach elektromagnetycznych czynnik pseudowektorowy (czyli aksjalny)  $F_A$  i pseudoskalarny  $F_P$ ,

$$F_A(q^2) = \frac{g_A}{(1 - q^2/M_A^2)^2}, \quad F_P(q^2) = \frac{2M^2 F_A(q^2)}{m_\pi^2 - q^2},$$

znane są z nieporównanie mniejszą dokładnością. Ze względu na hipotezę częściowego zachowania prądu pseudowektorowego (ang. *partially conserved axial current*) przyjmuje się, że  $F_P$  wyraża się przez  $F_A$ . Przyjmujemy wartość  $g_A = -1.2673$ , masę aksjalną  $M_A = 1.03$  GeV i masę pionu  $m_\pi = 139.57$  MeV. Przy analizie wyników doświadczeń masę aksjalną często traktuje się jako swobodny parametr, który pozwala dopasować kształt przekroju różniczkowego względem  $Q^2 = -q^2$  do danych. Prowadzi to do znacznego rozrzutu otrzymanych wartości: od 0.94 do 1.23 GeV [49, 50, 51]. Ustaleniem, ile faktycznie wynosi  $M_A$  zajmuje się wiele grup doświadczalnych.

## 2.3 Rozpraszanie elektronów

W przybliżeniu impulsowym inkluzywny przekrój czynny dla elektronów oddziałujących z jądrem jest sumą wkładów od protonów i neutronów:

$$\frac{d\sigma}{d\omega d|\mathbf{q}|} = \frac{d\sigma_{(p)}}{d\omega d|\mathbf{q}|} + \frac{d\sigma_{(n)}}{d\omega d|\mathbf{q}|}.$$

Każdy z czynników wyraża się poprzez standardowy wzór

$$\frac{d\sigma_t}{d\omega d|\mathbf{q}|} = 2\pi\alpha^2 \frac{|\mathbf{q}|}{E_{\mathbf{k}}^2 q^4} \int dE d^3p \frac{P_t(\mathbf{p}, E)}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} \delta(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'}) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

w którym wskaźnik  $t$  oznacza izospin nukleonów. Różnice w stosunku do równania (2.10) pochodzą od innej stałej sprzężenia i propagatora fotonu,

$$\frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{e^2}{q^2} = \frac{4\pi\alpha}{q^2},$$

uśredniania po początkowym spinie elektronu (wiązka niespolaryzowana, dodatkowe dzielenie przez dwa) i nieobecności czynnika pseudowektorowego [wcześniej dwa czynniki  $(1 - \gamma_5)$  po wymnożeniu dawały  $2(1 - \gamma_5)$ , dlatego musimy podzielić przez dwa], zobacz podręcznik [52].

Tensor leptonowy zdefiniowaliśmy włączając dodatkowy czynnik 2, żeby zachować jego postać:

$$L_{\mu\nu}^{\text{em}} = 2(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - k \cdot k' g_{\mu\nu}),$$

Tensor hadronowy

$$\widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu} = M^2 \widetilde{H}_{1,t} \left( -g^{\mu\nu} + \frac{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu}{\tilde{q}^2} \right) + \widetilde{H}_{2,t} \left( p^\mu - \frac{p \cdot \tilde{q}}{\tilde{q}^2} \tilde{q}^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot \tilde{q}}{\tilde{q}^2} \tilde{q}^\nu \right),$$

różni się od  $\widetilde{H}_{\text{weak}}^{\mu\nu}$  jedynie zerowym wkładem pseudowektorowym, dlatego

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{1,t} &= \tau(F_{1,t} + F_{2,t})^2, \\ \widetilde{H}_{2,t} &= F_{1,t}^2 + \tau F_{2,t}^2. \end{aligned}$$

Funkcje  $F_{i,t} = F_{i,t}(\tilde{q}^2)$  są wyrażone przez odpowiedni elektryczny  $G_{e,t}$  i magnetyczny  $G_{m,t}$  czynnik postaci [48].

Ze względu na to, że przepis de Foresta narusza zachowanie prądu elektromagnetycznego, przywracamy je, dodając do zwiężenia tensorów poprawkę [14, 33]

$$L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu} \rightarrow L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu} + L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{cor}, t}^{\mu\nu} \quad (2.15)$$

równą

$$L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{cor}, t}^{\mu\nu} = \frac{M^2}{\widetilde{q}^2} c_1 \widetilde{H}_{1,t} + c_2 \widetilde{H}_{2,t}. \quad (2.16)$$

Współczynniki  $c_1$  i  $c_2$  można zapisać jako

$$\begin{aligned} c_1 &= (\omega - \widetilde{\omega}) \left[ (\mathcal{Q}^2 - \omega^2)(\omega + \widetilde{\omega}) - 4(|\mathbf{k}||\mathbf{q}|\mathcal{Q} - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \right], \\ c_2 &= c_1 \mathcal{P}^2 + 4(\omega - \widetilde{\omega}) \mathcal{P} \mathcal{Q} \left( \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} \right), \end{aligned}$$

ze zwiążą notacją wprowadzoną dla

$$\mathcal{Q} = \frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - |\mathbf{q}|, \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2|\mathbf{q}|} (2E_{\mathbf{p}} + \omega). \quad (2.17)$$

## 2.4 Funkcja spektralna

Wyprowadzając przekrój czynny, zdefiniowaliśmy w równaniu (2.9) neutronową funkcję spektralną. W ogólnej postaci możemy napisać

$$P_t(\mathbf{p}, E) \equiv \overline{\sum_{\sigma_A} \sum_{\{A-1\}} \left| \langle -\mathbf{p} | a_{t(\mathbf{p})} | \sigma_A \rangle \right|^2 \delta(M_A - E_{A-1} - M + E)}, \quad (2.18)$$

gdzie wskaźnik  $t$  oznacza izospin. Do pełnej charakterystyki jądra potrzebujemy dwóch funkcji spektralnych: neutronowej i protonowej. Mówią one jaki jest rozkład na płaszczyźnie  $(|\mathbf{p}|, E)$  prawdopodobieństwa usunięcia z początkowego jądra nukleonu o pędzie  $|\mathbf{p}|$  i danym izospinie i pozostawienia dowolnego końcowego układu  $A - 1$  nukleonów z energią  $E_{A-1} = M_A - M + E$ . Rozpatrujemy tarczę niespolaryzowaną, dlatego dokonujemy uśrednienia po początkowym spinie. Wybieramy umormowanie do liczby nukleonów:

$$\int P_t(\mathbf{p}, E) d^3p dE = N_t, \quad (2.19)$$

to znaczy do  $Z$  dla protonów, a do  $N$  dla neutronów.

Ponieważ funkcja spektralna opisuje rozkład nukleonów względem energii usunięcia i pędu, to wyciąłkowanie zależności od  $E$  powinno dawać rozkład pędów nukleonów w jądrze  $n_t(\mathbf{p})$ . Faktycznie

$$\int dE P_t(\mathbf{p}, E) = \overline{\sum_{\sigma_A} \langle \sigma_A | a_{t(\mathbf{p})}^\dagger a_{t(\mathbf{p})} | \sigma_A \rangle},$$

tn. otrzymujemy operator liczby cząstek o pędzie  $\mathbf{p}$  działający na początkowe jądro, więc zgodnie z naszym przypuszczeniem definicja funkcji spektralnej prowadzi do wniosku, że rozkład pędów

$$n_t(\mathbf{p}) = \int P_t(\mathbf{p}, E) dE. \quad (2.20)$$

Z rozpraszania elektronów na jądrach o  $A \geq 12$  wiadomo [15, 53], że model powłokowy z nieoddziałującymi nukleonami dość dobrze opisuje dane zbierane przy niskiej energii usunięcia i pędzie protonu ( $E < 80$  MeV i  $|\mathbf{p}| < 150$  MeV), o ile uwzględni się, że powłoki są obsadzone w około 80%. Wyniki przedstawione w pracy [15] pokazują na przykład, że model powłokowy prawidłowo przewiduje stosunki obsadzeń poziomów energetycznych, ale nie — ich wartości bezwzględne. Oprócz tego, gdy uwzględni się czynnik normalizacyjny zmniejszający obsadzenie, uzyskiwane rozkłady pędów zgadzają się z obliczeniami. Źródłem konieczności zmiany normalizacji są oddziaływania, czyli tzw. korelacje, między nukleonami.

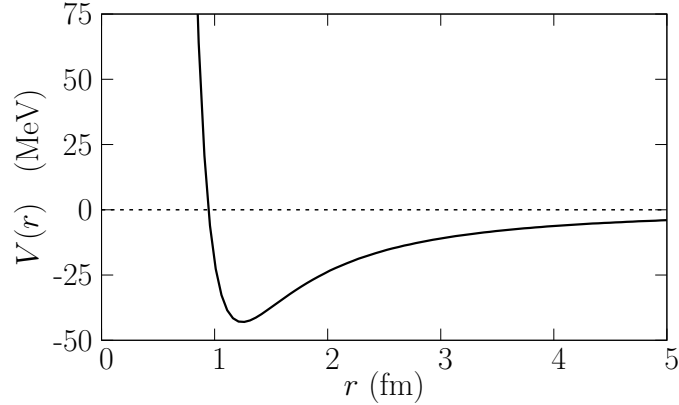
Korelacje występujące między składnikami jądra są dwojakiej natury: długozasięgowej i krótkozasięgowej [54, 55]. Korelacje długozasięgowe (ang. *long-range correlations*) przejawiają się w kolektywnych wzbudzeniach, takich jak gigantyczne rezonanse jądrowe, i występują przy niskich przekazach energii i pędu. W oddziaływaniu z leptonem uczestniczy wtedy grupa nukleonów lub nawet całe jądro, więc nie można ich opisać w obrębie przybliżenia impulsowego. Przy interesujących nas energiach istotny wpływ wywierają głównie korelacje krótkozasięgowe (ang. *short-range correlations*), które biorą się z silnie odpychającego rdzenia potencjału nukleon-nukleon i prowadzą do powstawania par nukleonów o dużym pędzie względnym. Ten potencjału pokazujemy schematycznie na rysunku 2.2. Przy wysokiej energii usunięcia i wysokim pędzie wkład do funkcji spektralnej pochodzi wyłącznie od oddziaływań krótkozasięgowych. Ponieważ dla  $A \geq 12$  rozkłady pędów w obszarze dużych wartości  $\mathbf{p}$  skalują się jak  $A^{1/3}$ , czyli nie zależą od efektów powierzchniowych, to rozmiary jądra nie wpływają na korelacje krótkozasięgowe i są one takie same jak dla nieskończonej materii jądrowej.

Skoro (w sensie prawdopodobieństwa) większość nukleonów w jądrze można opisać jako cząstki poruszające się swobodnie w potencjale pola średniego (MF, od ang. *mean field*) i zajmujące stany z modelu powłokowego, a pozostałe należy potraktować w inny sposób, to wygodnie będzie podzielić funkcję spektralną na część średniopolową i korelacyjną [21, 56, 57, 58]:

$$P_t(\mathbf{p}, E) = N_t \left[ P_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}, E) + P_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}, E) \right]. \quad (2.21)$$

Analogicznie do równania (2.20) wprowadza się część MF i korelacyjną rozkładu





Rys. 2.2: Schematyczny wykres centralnej części potencjału nukleon-nukleon jako funkcji odległości między nukleonami.

pędów:

$$n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) = \int P_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}, E) dE, \quad (2.22)$$

$$n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}) = \int P_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}, E) dE, \quad (2.23)$$

wtedy rozkład pędów jest sumą

$$n_t(\mathbf{p}) = N_t \left[ n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) + n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}) \right]. \quad (2.24)$$

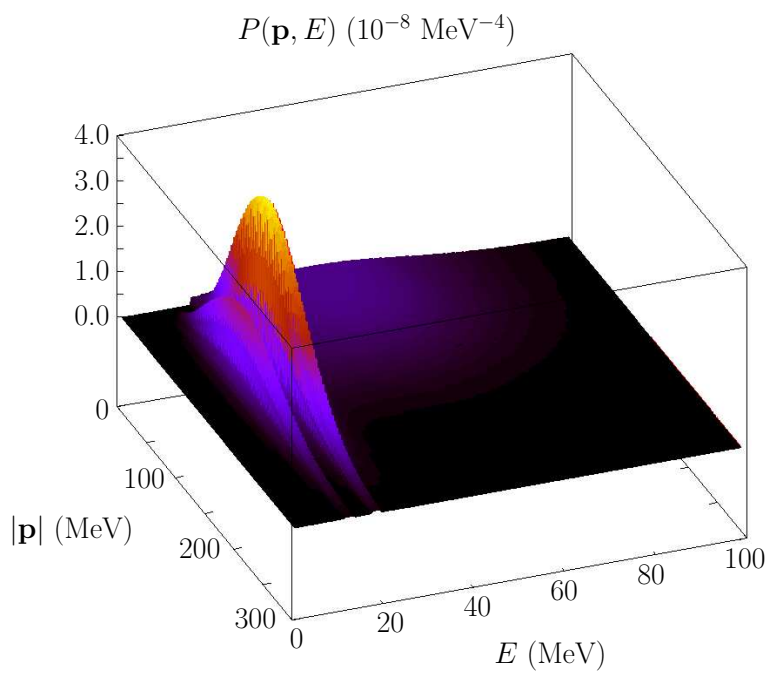
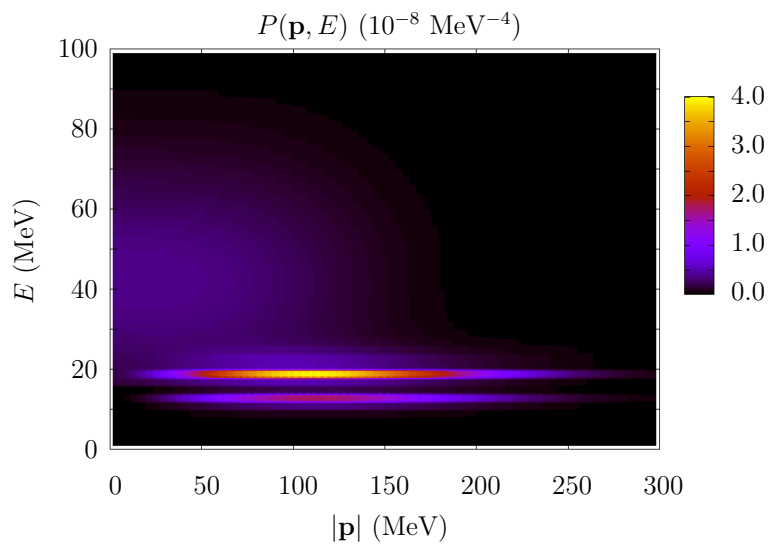
### Obliczenia funkcji spektralnych

Benhar i inni [21] opracowali funkcje spektralne wielu jąder, od węgla poprzez tlen i żelazo, aż do złota. Odnosząc się do ich wyników będziemy stosowali nazwę funkcje spektralne Benhara. Do opisanie części średniopolowych posłużyli się oni parametryzacjami jednocząstkowych funkcji falowych otrzymanymi z rozpraszania elektronów. Obliczyli część korelacyjną  $P_{\text{NM}}^{\text{corr}}(\rho, \mathbf{p}, E)$  i poziom obsadzenia części MF dla nieskończonej materii jądrowej o różnej gęstości  $\rho$  [59]. Następnie zastosowali te wyniki do skończonych jąder w przybliżeniu lokalnej gęstości:

$$P^{\text{corr}}(\mathbf{p}, E) = \int d^3R \rho(\mathbf{R}) P_{\text{NM}}^{\text{corr}}(\rho(\mathbf{R}), \mathbf{p}, E).$$

Części średniopolowe ich funkcji spektralnych zawierają pewien wkład od oddziaływań długozasięgowych, bo pochodzą z danych eksperymentalnych. Części korelacyjne uwzględniają tylko oddziaływania krótkozasięgowe.

Na rysunku 2.3 pokazujemy wykresy funkcji spektralnej tlenu [21]. Widzimy wyraźnie wkłady od poszczególnych powłok. Przy energii usunięcia około 12 MeV



Rys. 2.3: Wykresy funkcji spektralnej tlenu [21]. Im większe prawdopodobieństwo znalezienia nukleonu, tym cieplejszy kolor.

pojawia się  $p_{1/2}$ , nieco wyżej —  $p_{3/2}$ , a koło 45 MeV bardzo rozmyty poziom  $s_{1/2}$ . Jedyne  $s_{1/2}$  ma zerowy moment pędu, dlatego tylko jego rozkład prawdopodobieństwa nie znika w okolicy  $|\mathbf{p}| = 0$ . Część korelacyjna jest co najmniej o rząd mniejsza od średniopolowej, dlatego nie widać jej na wykresach.

## Gaz Fermiego

Symulacje Monte Carlo dla oddziaływań neutrin są oparte najczęściej na modelu gazu Fermiego, dlatego teraz pokażemy, że jest on szczególnym przypadkiem funkcji spektralnej.

Traktujemy jądro jako układ nieoddziałujących cząstek zamkniętych w sześciennym pudle i nakładamy cykliczne warunki brzegowe (wycinek nieskończonej materii jądrowej o stałej gęstości). Nukleony obsadzają wtedy wszystkie stany o pędach od zera do maksymalnej wartości  $p_{F,t}$ , nazywanej pędem Fermiego. Przyjmujemy stałą energię wiązania  $\bar{\epsilon}_B^t$ . Stąd

$$a_{t(\mathbf{p})}|\sigma_A\rangle = |-\mathbf{p}\rangle \theta(p_{F,t} - |\mathbf{p}|).$$

Żeby wybić nukleon z jądra musimy mu dostarczyć energię równą  $\bar{\epsilon}_B^t$ , zatem

$$M_A = E_{\mathbf{p}} - \bar{\epsilon}_B^t + E_{A-1}$$

Wykorzystanie tych własności i definicji (2.18) pozwala stwierdzić, że gaz Fermiego odpowiada funkcji spektralnej

$$P_t^{\text{FG}}(\mathbf{p}, E) = \frac{3N_t}{4\pi p_{F,t}^3} \theta(p_{F,t} - |\mathbf{p}|) \delta(E_{\mathbf{p}} - \bar{\epsilon}_B^t - M + E), \quad (2.25)$$

zawierającej stałą, która wynika z wybranej normalizacji [równanie (2.19)]. Parametry gazu Fermiego wyznacza się w eksperymentach z rozpraszaniem elektronów [60, 61], poprzez dopasowanie do danych doświadczalnych szerokości pików kwazielastycznego (pęd Fermiego) i jego położenia (energia wiązania).

W rozdziale 6 będzie nam potrzebny wzór na przekrój czynny dla kwazielastycznego rozpraszania neutrin w modelu gazu Fermiego. Z równań (2.10) i (2.25) wynika, że ma on postać

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{FG}}}{dE_\mu} &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi E_\nu^2} \frac{3N}{4\pi p_F^3} \int d|\mathbf{q}| d^3p \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \\ &\quad \times \delta(\omega + E_{\mathbf{p}} - \bar{\epsilon}_B - E_{\mathbf{p}'}) \frac{|\mathbf{q}|}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} L_{\mu\nu} \widetilde{H}_{\text{FG}}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

ze zwężeniem  $L_{\mu\nu} \widetilde{H}_{\text{FG}}^{\mu\nu}$  wyrażonym jak w równaniu (2.13), ale z  $\tilde{q} = (\omega - \bar{\epsilon}_B, \mathbf{q})$ .

## Blokowanie Pauliego

Zakaz Pauliego nie pozwala fermionom na znajdowanie się w dokładnie tym samym stanie kwantowym. Konsekwencją zakazu Pauliego jest uniemożliwienie oddziaływania, jeśli w jego wyniku nukleon miałby się znaleźć w stanie już obsadzonym. Efekt ten będziemy określali terminem blokowanie Pauliego (ang. *Pauli blocking*).

W podrozdziale 2.2, licząc przekrój czynny, założyliśmy milcząco, że stan

$$|p'\sigma', p_{A-1}\sigma_{A-1}\rangle = a_{p(\mathbf{p}', \sigma')}^\dagger |p_{A-1}\sigma_{A-1}\rangle,$$

może powstać. Dla gazu Fermiego łatwo wprowadzić ten warunek: skoro protony zajmują wszystkie stany o pędach poniżej  $p_{F,p}$ , to możemy zamienić

$$|p'\sigma', p_{A-1}\sigma_{A-1}\rangle \rightarrow |p'\sigma', p_{A-1}\sigma_{A-1}\rangle \theta(p_{F,p} - |\mathbf{p}'|).$$

Sprowadza się to do zastąpienia

$$P_t^{\text{FG}}(\mathbf{p}, E) \rightarrow \theta(p_{F,t'} - |\mathbf{p}'|) P_t^{\text{FG}}(\mathbf{p}, E) \quad (2.27)$$

we wzorach na przekrój czynny. W przypadku funkcji spektralnej stany nukleonów nie są w pełni obsadzone, co komplikuje sytuację. Najprostsze rozwiązanie polega na obliczeniu średniego pędu Fermiego z profilu gęstości jądra i użyciu go w sposób analogiczny do powyższego równania.

## 2.5 Funkcja składająca

Gdy w doświadczeniach badających oddziaływania elektronów porówna się liczbę rozproszonych elektronów i zaobserwowanych protonów, to okaże się, że pewna część nukleonów grzęźnie w jądrze lub traci pęd (obserwuje się tylko protony z odpowiednio dużym pędem). Jest to skutek oddziaływań końcowych, czyli efektu FSI (od ang. *final-state interactions*), do których dochodzi pomiędzy wybijanym nukleonem a otaczającymi go składnikami jądra.

Miarą oddziaływań końcowych jest przezroczystość jądra  $T_A$  (ang. *nuclear transparency*). Definiuje się ją jako prawdopodobieństwo, że wybijany nukleon wyjdzie z jądra bez żadnych oddziaływań [14]. Im większe jądro, tym mniejsza wartość  $T_A$ , bo rośnie średnia droga, którą ma do przebycia nukleon. Przy energii kinetycznej większej od 1 GeV przekrój na rozpraszanie nukleon-nukleon stabilizuje się, dlatego również przezroczystość dąży do stałej zależnej od rozmiarów jądra. Na przykład dla węgla około 40% wybijanych protonów uczestniczy w reinterakcjach, a dla żelaza — aż 60% [53, 62, 63].

Jak zaproponowano w artykule [20], oddziaływania końcowe można opisać jako propagację nukleonu w potencjale optycznym  $U = V - iW$ . Sprowadza się to do

zastąpienia w równaniu (2.14) tensora hadronowego przez jego splot z tak zwaną funkcją składającą (ang. *folding function*) [19]:

$$\delta(\omega + \dots) \widetilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu} \rightarrow \int d\omega' \delta(\omega' - V + \dots) \widetilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu} f_{\mathbf{p}'}(\omega - \omega'). \quad (2.28)$$

Funkcję składającą wiąże z urojoną częścią potencjału optycznego relacja

$$f_{\mathbf{p}'}(\omega - \omega') = \frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty dt e^{i(\omega - \omega')t} e^{-Wt}, \quad (2.29)$$

por. [14], gdzie symbol  $\Re$  oznacza część rzeczywistą. Gdy potencjał znika, powyższe równanie staje się deltą Diraca. Obrazowo można powiedzieć, że obecność oddziaływań końcowych rozmywa zachowanie energii, dlatego różne stany początkowe nukleonu mogą prowadzić do tego samego stanu końcowego i próg energetyczny na rozpraszanie ulega obniżeniu.

Jeśli określimy oddziaływania końcowe jako takie, które jedynie redystrybuują końcowe stany hadronowe między różnymi kanałami, to z definicji nie zmieniają one całkowitego inkluzywnego przekroju czynnego. Rozumiany w ten sposób efekt FSI stosuje się w programach Monte Carlo. Zgadza się to również z podejściem, w którym oddziaływania końcowe wprowadza się poprzez funkcję składającą. Faktycznie, ponieważ

$$\begin{aligned} & \int d\omega d\omega' \delta(\omega' - V + \dots) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu} f_{\mathbf{p}'}(\omega - \omega') \\ &= \int d\omega' \delta(\omega' - V + \dots) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu} \int d\omega f_{\mathbf{p}'}(\omega - \omega'), \end{aligned}$$

to splot z unormowaną funkcją składającą nie zmienia przekroju czynnego, zob. praca [64]. Należy jednak wspomnieć, że opis FSI stosowany na przykład w artykule [18] nie ma tej własności.

Dla neutrin nie jest ważna znajomość przekroju czynnego na rozpraszanie pod ustalonym kątem, ale raczej różniczkowego przekroju względem  $Q^2$ , na który efekt FSI wpływa w niewielkim stopniu [34]. Z tego powodu w rozważaniach dotyczących neutrin nie będziemy uwzględniali oddziaływań końcowych.

## Rozdział 3

# Czy potrzebujemy funkcji spektralnej?

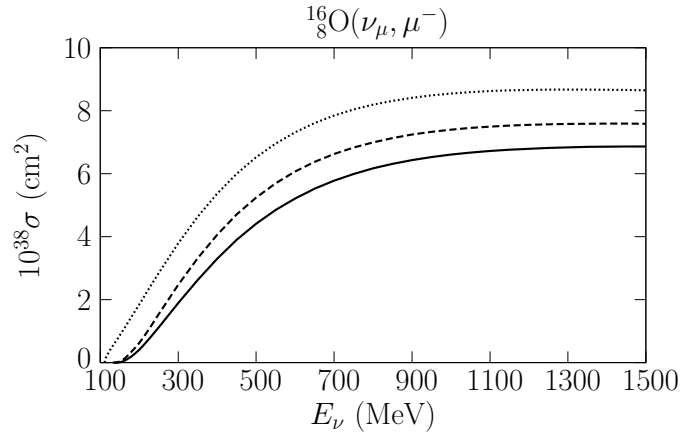
Dla skończonych jąder o  $A > 4$  dokładne wyliczenia funkcji spektralnej przeprowadzono tylko kilka razy [21, 22, 65], co pokazuje jak trudne jest to zadanie. Samo stosowanie funkcji spektralnej jako opisu jądra do otrzymywania przekroju czynnego czy symulacji Monte Carlo wymaga nieco dłuższego czasu obliczeń i bardziej złożonego programu niż dla gazu Fermiego. Czy zatem warto w fizyce neutrin wykraczać poza model gazu Fermiego? Odpowiemy na to pytanie twierdząco, pokazując, że przewidywania dokładniejszego opisu są istotne dla fizyków doświadczalnych. Prezentowane rezultaty odnoszą się do funkcji spektralnej tlenu z pracy [21] oraz gazu Fermiego z pędem Fermiego 225 MeV i energią wiązania 27 MeV. Dla innych tarcz wnioski byłyby podobne.

Efekty jądrowe zmniejszają przekrój czynny, zobacz rysunek 3.1. Źródła redukcji to w kolejności malejącego znaczenia: energia wiązania wraz ze sprowadzaniem nukleonu na powłokę masy, ruch Fermiego oraz blokowanie Pauliego. Energia wiązania obniża przekrój z dwóch przyczyn. Po pierwsze, wprowadza progowy przekaz energii, poniżej którego zderzenia nie zachodzą. Po drugie, nukleon w jądrze jest poza powłoką masy i dlatego jego tensor hadronowy różni się od tensora w przypadku swobodnym, z czym wiąże się dodatkowe zmniejszenie przekroju o około 5–8%. Oddziaływanie preferuje nukleony, których pęd spełnia warunek<sup>1</sup>  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \geq 0$ , dlatego ruch Fermiego redukuje przekrój czynny. Z kolei blokowanie Pauliego uniemożliwia wyprodukowanie swobodnego nukleonu poniżej poziomu Fermiego, więc z samej definicji ogranicza możliwość zajścia rozpraszania.

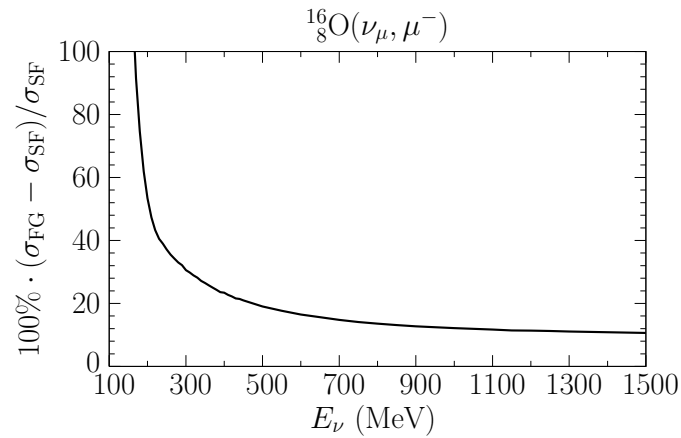
W przypadku funkcji spektralnej [21] energia wiązania może osiągać nawet 500 MeV (rysunek 9 w artykule [30]), a jej średnia wartość 67.86 MeV jest dużo wyższa niż  $\bar{\epsilon}_B$  dla gazu Fermiego. Zakres pędów (do 800 MeV) jest znacznie szerszy niż w modelu gazu Fermiego. Powoduje to, że w przypadku funkcji spektralnej ener-

---

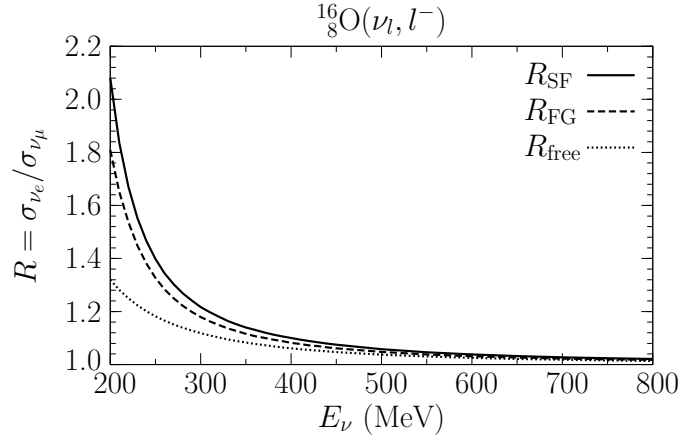
<sup>1</sup>Tensor hadronowy znika dla ujemnych  $\tilde{\omega} = E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}$ , czyli dla  $E_{\mathbf{p}'} < E_{\mathbf{p}}$ , co podniesieniu do kwadratu daje  $\mathbf{p}'^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 < \mathbf{p}^2$ . Wybierzmy oś z układu współrzędnych zgodnie z przekazem pędu. Po uproszczeniu składowych prostopadłych otrzymamy, że nukleony, których pęd spełnia  $(p_z + |\mathbf{q}|)^2 < p_z^2$ , nie dają wkładu do przekroju czynnego. Innymi słowy, nukleony z  $p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} / |\mathbf{q}| \geq 0$  mogą uczestniczyć w oddziaływaniach bez względu na wartość  $\mathbf{q}$ , a z  $p_z < 0$  — tylko dla przekazów pędu większych lub równych  $2|p_z|$ .



Rys. 3.1: Zależność kwazielastycznego przekroju czynnego od energii dla swobodnych nukleonów (linia kropkowana), gazu Fermiego (linia przerywana) i funkcji spektralnej tlenu [21].



Rys. 3.2: Wykres procentowej różnicy przewidywań gazu Fermiego i funkcji spektralnej [21] dla całkowitego przekroju czynnego neutrina mionowego rozpraszanego na jądrze tlenu.

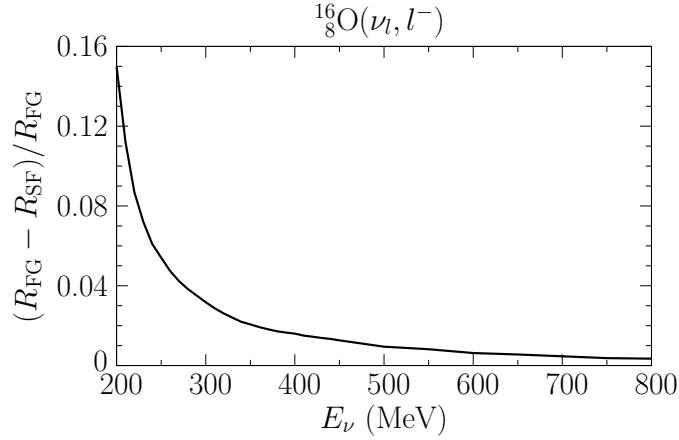


Rys. 3.3: Wykres stosunku przekroju czynnego neutronów elektronowych do przekroju czynnego neutronów mionowych na tarczy tlenowej w przypadku swobodnych nukleonów (linia kropkowana), gazu Fermiego (linia przerywana) i funkcji spektralnej tlenu [21].

gła wiązania i ruchy Fermiego w jeszcze większym stopniu zmniejszają przekrój czynny, niż obserwujemy to dla gazu Fermiego. Blokowanie Pauliego wprowadzamy ze średnim pędem Fermiego  $\bar{p}_F = 209$  MeV. Różni się on tylko nieznacznie od  $p_F$  w modelu gazu Fermiego i dlatego modyfikuje wyniki w porównywalny sposób. Jak prezentuje rysunek 3.1, sumaryczny wpływ czynników redukujących przekrój jest dużo większy dla funkcji spektralnej. Na przykład przy energii neutrona 800 MeV gaz Fermiego daje wyniki o 14.6% niższe od swobodnych neutronów, zaś funkcja spektralna — aż o 24.8%. Oznacza to, że korzystając z modelu gazu Fermiego przeszacowujemy przekrój o 13.6% w stosunku do funkcji spektralnej. Rysunek 3.2 pokazuje, że różnicę między omawianymi podejściami widać szczególnie wyraźnie dla niewielkich energii i że ze wzrostem  $E_\nu$  dąży ona do 10%. Nasuwa się pytanie, który model jest lepszy. W rozdziale 5 pokażemy, że dane dotyczące rozpraszania elektronów rozstrzygają tę kwestię na korzyść funkcji spektralnej. Jest to wynik niezwykle ważny dla powstającego eksperymentu MINER $\nu$ A [66], który ma wyznaczyć kwazielastyczny przekrój czynny z niepewnością ograniczoną jedynie stopniem znajomości strumienia neutronów. Jeśli w symulacji Monte Carlo nie zostaną uwzględnione przewidywania funkcji spektralnej, to interpretacja wyników w modelu gazu Fermiego może być błędna i sprowadzać się do sztucznego obniżenia wartości masy aksjalnej.

Z kolei dla doświadczeń badających pojawianie się  $\nu_e$  w wiązce neutronów mionowych, jak MiniBooNE [67] czy planowany NO $\nu$ A [68, 69], szczególnie istotną informację stanowi pokazany na rysunku 3.3 fakt, iż funkcja spektralna wpływa na stosunek przekrojów neutronów mionowych do elektronowych inaczej niż gaz Fer-



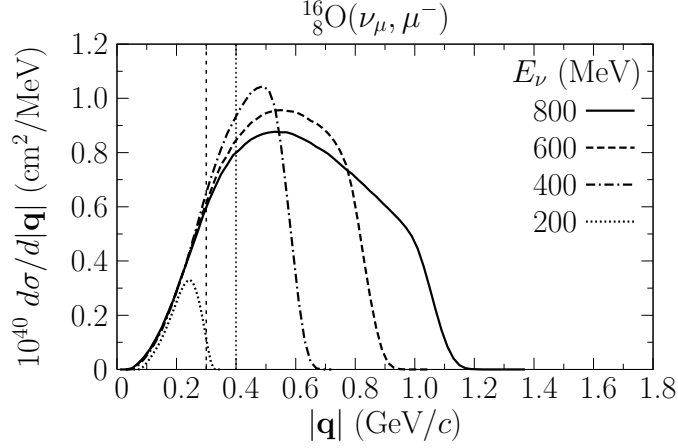


Rys. 3.4: Unormowana różnica stosunków  $R = \sigma_{\nu_\mu}/\sigma_{\nu_e}$  dla gazu Fermiego i funkcji spektralnej jako funkcja energii.

miego. Przedstawiliśmy to w raporcie [70]: stosowanie gazu Fermiego w symulacji powoduje, że im niższa energia, tym bardziej niedoszacowana produkcja neutrin elektronowych, powstających w wyniku oscylacji. Różnica między wynikami dla gazu Fermiego i funkcji spektralnej nie jest wprawdzie duża, patrz rysunek 3.4, ale może tłumaczyć przynajmniej część nadmiaru  $\nu_e$  zaobserwowanego w obszarze niskich energii przez MiniBooNE [71].

Analizę rozpraszania przy niskiej energii komplikuje załamanie się przybliżenia impulsowego: nie można już twierdzić, że w pierwotnym wierzchołku oddziaływania uczestniczy tylko jeden nukleon, więc cały formalizm stosowany w tej pracy przestaje funkcjonować. Z taką sytuacją zaczynamy mieć do czynienia, gdy typowa wartość przekazu pędu w piku kwazielastycznym jest mniejsza niż około 400 MeV/c, zaś poniżej 300 MeV/c różnice między obliczeniami a danymi doświadczalnymi stają się znaczące. Są to wnioski, do których doszliśmy, stosując funkcje spektralne tlenu, wapnia i argonu, opisane w rozdziale 4, do modelowania jądra przy rozpraszaniu elektronów. Dzięki uwzględnieniu oddziaływań końcowych udało się nam osiągnąć bardzo dobrą zgodność z szerokim spektrum pomiarów, zaobserwowaliśmy jednak systematycznie pojawiające się rozbieżności przy niskich przekazach pędu. Dlatego po wyeliminowaniu innych możliwości, mogliśmy zidentyfikować źródło problemów właśnie jako załamanie się przybliżenia impulsowego. Po więcej szczegółów odsyłamy do rozdziału 5.

Jak istotny wkład do przekroju kwazielastycznego dają niskie przekazy pędu? Odpowiedzi na to pytanie udzielają rysunek 3.5 i tabela 3.1. Gdy energia neutrina równa się lub przewyższa 400 MeV, przekrój różniczkowy względem przekazu pędu w obszarze  $|\mathbf{q}| \leq 230$  MeV/c praktycznie nie zależy od  $E_\nu$ . Inaczej mówiąc, nawet przy energii  $\sim 1$  GeV istotny udział mają procesy, których *nie można* opi-



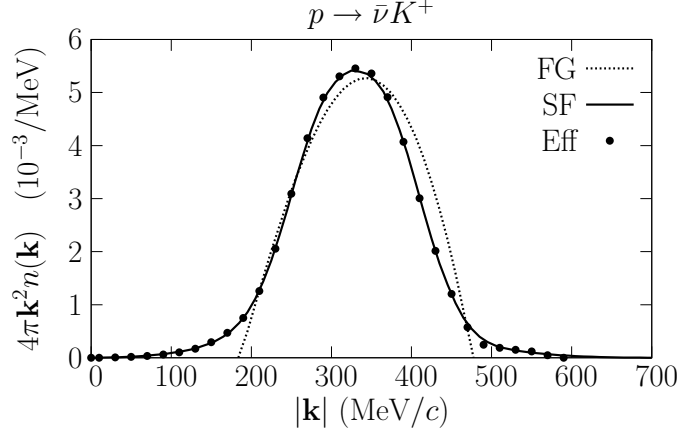
Rys. 3.5: Różniczkowy przekrój czynny względem przekazu pędu dla procesu  $^{16}_8\text{O}(\nu_\mu, \mu^-)$  przy różnych energiach neutrina  $E_\nu$ . Pionowe linie pokazują granice  $|\mathbf{q}| = 300 \text{ MeV}/c$  i  $400 \text{ MeV}/c$ .

Tabela 3.1: Udział zdarzeń z niskim przekazem pędu w całkowitym przekroju czynnym neutrin dla różnych wartości energii.

	Energia neutrina (MeV)						
	200	400	600	800	1000	1200	1400
$ \mathbf{q}  \leq 300 \text{ MeV}/c$	97.2%	18.9%	11.9%	10.1%	9.4%	9.1%	9.0%
$ \mathbf{q}  \leq 400 \text{ MeV}/c$	100.0%	43.3%	26.2%	21.6%	19.8%	19.1%	18.8%

sać w formalizmie przybliżenia impulsowego — możemy być pewni jedynie  $\sim 90\%$  przewidywanego przekroju czynnego. Im niższa energia, tym większy wkład oddziaływań, które wymykają się naszemu podejściu. Dla  $E_\nu = 200 \text{ MeV}$  nie mamy już żadnej gwarancji, że nasze przewidywania odpowiadają rzeczywistości. Analiza rozpraszanie elektronów sugeruje, że niedoszacowujemy przekroju czynnego, ale wyniki nie są jednoznaczne. Rozstrzygnięcie mogą przynieść wyniki eksperymentu MINER $\nu$ A. Podsumowując, chcemy wyraźnie podkreślić, że ani gaz Fermiego, ani starannie obliczona funkcja spektralna jądra nie dostarczą właściwego opisu zdarzeń, których wkład do przekroju czynnego może stanowić aż 10–20% w zakresie energii badanym właśnie przez np. MiniBooNE, a w przyszłości — przez T2K.

Na koniec chcemy rozważyć, co funkcja spektralna może wnieść do badania hipotetycznego rozpadu protonu, przewidywanego przez wszystkie teorie wielkiej unifikacji [42]. Jeden z istotnych kanałów stanowi proces  $p \rightarrow \bar{\nu}K^+$  [24]. Sygnałem jego zajścia byłoby zaobserwowanie kaonów o charakterystycznym pędzie, rozmy-



Rys. 3.6: Rozkład pędów kaonów powstających w hipotetycznym rozpadzie protonu w jądrze tlenu. Linia kropkowana prezentuje przewidywania gazu Fermiego, linia ciągła — funkcji spektralnej [21], a punkty — opisu efektywnego, czyli przybliżenia SF, które przedstawimy w rozdziale 6. Wszystkie rozkłady zostały unormowane do jedności.

tym przez ruch protonów. W układzie spoczywającego protonu energia dostępna dla reakcji jest równa jego masie efektywnej

$$M_{\text{eff}} = \sqrt{(E_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}, E})^2 - \mathbf{p}^2} = \sqrt{(M - E)^2 - \mathbf{p}^2},$$

ponieważ energia wiązania  $\varepsilon_{\mathbf{p}, E} = E_{\mathbf{p}} - M + E$ . Dlatego mogą się rozpaść tylko te protony, których masa efektywna przewyższa masę kaonu. Obliczyliśmy, że tego warunku nie spełnia około 1.8% wszystkich protonów. Opisany efekt nie występuje dla gazu Fermiego ze względu na stałą i niską energię wiązania. Choć jest to interesująca różnica między przewidywaniami omawianych podejść, to trudno sobie wyobrazić, by można ją było zaobserwować doświadczalnie. Na rysunku 3.6 pokazujemy, że dokładne modelowanie efektów jądrowych prowadzi do powstania nisko- i wysokoenergetycznego ogona w rozkładzie kaonów, jaki zaobserwowano by w układzie laboratoryjnym, gdyby dysponowano odpowiednią statystyką zdarzeń. W naszej analizie nie zostały uwzględnione oddziaływania końcowe. Warto zauważyć, że opis efektywny — uproszczone podejście oparte na funkcji spektralnej, które zaprezentujemy w rozdziale 6 — dobrze przybliża pełny model. Można go łatwo wprowadzić do symulacji Monte Carlo dla gazu Fermiego, dlatego stanowi ciekawą propozycję do zastosowań numerycznych.

Podsumowując ten rozdział: funkcja spektralna redukuje kwazielastyczny przekrój czynny, a także zmienia stosunek przekrojów neutrin elektronowych i mionowych w odniesieniu do gazu Fermiego. Równie istotne są konsekwencje załamania się przybliżenia impulsowego przy niskich przekazach pędu: nawet dla wysokiej

energii istotny udział w rozpraszaniu mają procesy, których nie można opisać stosowanym powszechnie podejściem, bo w pierwotnym wierzchołku oddziaływania uczestniczy więcej niż jeden nukleon. Zignorowanie tych faktów może skutkować błędną interpretacją wyników doświadczeń.

## Rozdział 4

# Opis modelu

W tym rozdziale przedstawiamy szczegółowo dwie metody przybliżania funkcji spektralnych: gaussowską i najprostszą. Pierwsza z nich stanowi centralny punkt tej rozprawy. Wprowadziliśmy ją w artykule [31], który dotyczył tarczy tlenowej. Wstępne wyniki dla wapnia i argonu przedstawiliśmy na konferencji NuInt07 [32], a ostateczne zostały opublikowane w pracy [33]. Drugą opisujemy tutaj pokrótce, a po więcej szczegółów odsyłamy do publikacji [30].

Pierwsze dwa podrozdziały poświęcamy podejściu do części średniopolewej i korelacyjnej. W podrozdziale 4.3 prezentujemy przybliżony opis oddziaływań końcowych. Chcieliśmy, żeby każdy mógł odtworzyć nasze rezultaty, dlatego wszystkie szczegóły potrzebne do modelowania tlenu, wapnia i argonu zbieramy w podrozdziale 4.4. Rozdział kończymy podrozdziałem 4.5, w którym przedstawiamy algorytmy programu liczącego przekroje czynne z uwzględnieniem oddziaływań końcowych i bez nich.

### 4.1 Opis części średniopolewej

Zacznijmy od rozważenia czysto teoretycznej sytuacji, w której nukleony w jądrze nie oddziałują ze sobą (model cząstek niezależnych). Wtedy poziomy energetyczne mają dokładnie określone wartości liczbowe; nie pojawia się żadne ich rozmycie. Minimalną energię potrzebną do uwolnienia nukleonu z poziomu  $\alpha$  stanowi wartość poziomu energetycznego  $E_\alpha$ :

$$M_A + E_\alpha = M_{A-1} + M.$$

Korzystając z tej zależności, przepiszemy deltę Diraca zawartą w definicji funkcji spektralnej (2.18):

$$\delta(E + M_A - E_{A-1} - M) = \delta(E - E_\alpha + M_{A-1} - E_{A-1}) = \delta(E - E_\alpha - T_{A-1}),$$

z energią kinetyczną końcowego jądra  $T_{A-1}$  wyrażoną równaniem (2.8). Końcowy stan jądra możemy opisać jako dziurę o liczbach kwantowych  $\alpha$  i funkcji falowej  $\phi_\alpha(\mathbf{p})$ , unormowanej do jedynki. Dlatego dla modelu cząstek niezależnych funkcja spektralna jest postaci

$$P_t^{\text{IP}}(\mathbf{p}, E) = \sum_\alpha \frac{1}{N_t} |\phi_\alpha(\mathbf{p})|^2 \delta(E_\alpha + T_{A-1} - E). \quad (4.1)$$

ze wskaźnikiem  $\alpha$  przebiegającym od 1 do  $N_t$ , gdzie  $N_t$  to liczba nukleonów o izospinie  $t$ .

Gdy pojawiają się oddziaływania między nukleonami, część średniopolowa nie dostarcza już opisu całości jądra. Musimy uwzględnić, że dziury nie są unormowane do jedynki, wprowadzając tak zwane czynniki spektroskopowe  $c_\alpha$  [55, 72]. Poziomy energetyczne stają się rozmyte, dlatego deltę Diraca trzeba zastąpić przez funkcje opisujące ich szerokość  $F_\alpha$ . Wtedy

$$P_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}, E) = \sum_\alpha \frac{c_\alpha}{N_t} |\phi_\alpha(\mathbf{p})|^2 F_\alpha(E_\alpha + T_{A-1} - E). \quad (4.2)$$

Przy oznaczeniach czynników spektroskopowych, funkcji falowych, poziomów energetycznych i funkcji  $F_\alpha$  opuściliśmy izospinowy indeks  $t$  dla przejrzystości zapisu.

W rozprawie zajmujemy się głównie opisem jąder średniej wielkości, takich jak wapń i argon. W części MF funkcji spektralnej możemy zatem zaniedbać energię odrzutu końcowego jądra  $T_{A-1}$ , ponieważ jej typowa wartość to  $\sim 0.5$  MeV (zobacz średnie wartości pędu dla części MF podane w tabeli 4.1).

Założmy dla uproszczenia, że szerokości poziomów energetycznych nie zależą od pędu. Ponieważ funkcje falowe  $\phi_\alpha(\mathbf{p})$  są unormowane do jedynki, to  $\int F_\alpha(E) dE = 1$ , i w konsekwencji średniopolowy rozkład pędów (2.22) możemy wyrazić jako

$$n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) = \sum_\alpha \frac{c_\alpha}{N_t} |\phi_\alpha(\mathbf{p})|^2. \quad (4.3)$$

Zakładamy, że każda powłoka daje w przybliżeniu taki sam wkład do części MF rozkładu pędów. Oznacza to, że w równaniu (4.2) dla każdego  $\alpha$  można dokonać podstawienia

$$c_\alpha |\phi_\alpha(\mathbf{p})|^2 \rightarrow n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}). \quad (4.4)$$

Ostateczna postać średniopolowej części funkcji spektralnej,

$$P_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}, E) = n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) \frac{1}{N_t} \sum_\alpha F_\alpha(E_\alpha - E), \quad (4.5)$$

musi zostać dookreślona poprzez podanie rodzaju funkcji opisujących szerokość poziomów. Przy ustalonej szerokości połówkowej rozkład Breita-Wignera ma dłuższe ogony niż gaussowski, dlatego ten drugi uznaliśmy za odpowiedniejszy (porównaj praca [15]):

$$F_\alpha(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi D_\alpha^2}} \exp\left(-8x^2/D_\alpha^2\right). \quad (4.6)$$

Czynnik 8 w argumentie funkcji wykładniczej został wprowadzony dla wygody: umożliwia użycie okrągłych wartości parametrów  $D_\alpha$ . Ze względu na postać  $F_\alpha$ , model, który opiszemy w tym rozdziale, będziemy nazywali *gaussowską funkcją*

spektralną (GSF, od ang. *Gaussian SF*). Żeby zastosować GSF do opisu części MF funkcji spektralnej konkretnego jądra, trzeba znać jego średniopolowy rozkład pędów, wartości poziomów energetycznych i ich szerokości  $D_\alpha$ .

Chcemy podkreślić, że w równaniu (4.5) suma rozciąga się po *wszystkich* obsadzonych stanach. Pozwala to uniknąć osobliwości w funkcji spektralnej argonu i różni GSF od modelu opisanego w pracy [30], który teraz krótko przedstawimy.

### Dygresja o najprostszej funkcji spektralnej

W ogólnym przypadku do scharakteryzowania jądra w tym modelu potrzebne są trzy wkłady do funkcji spektralnej, to znaczy średniopolowy i korelacyjny oraz izowektorowy:

$$P_t^{\text{SSF}}(\mathbf{p}, E) = \frac{A}{2} \left[ P_t^{\text{MF, SSF}}(\mathbf{p}, E) + P_t^{\text{corr, SSF}}(\mathbf{p}, E) \right] + \frac{2N_t - A}{2} P_t^{\text{vec, SSF}}(\mathbf{p}, E).$$

Ich unormowania są następujące

$$\int \left[ P_t^{\text{MF, SSF}}(\mathbf{p}, E) + P_t^{\text{corr, SSF}}(\mathbf{p}, E) \right] d^3p dE = 1,$$

$$\int P_t^{\text{vec, SSF}}(\mathbf{p}, E) d^3p dE = 1.$$

Część izowektorowa odpowiada za opis różnic między funkcją spektralną protonów i neutronów w sytuacji, gdy liczba protonów nie jest równa liczbie neutronów. Części MF i korelacyjna łącznie dostarczają opisu  $\frac{1}{2}A$  nukleonów, zaniebując między nimi wszelkie różnice. Po dalsze informacje odsyłamy do prac [30, 57, 58].

Część MF funkcji spektralnej jest określona tak jak w równaniu (4.2), ale z sumą po  $\alpha$  od 1 do  $\frac{1}{2}A$ . Pomijamy oddziaływania między nukleonami, co prowadzi do poziomów energetycznych o zerowej szerokości, to znaczy do rozkładu energii w postaci sumy delt Diraca:

$$P_t^{\text{MF, SSF}}(\mathbf{p}, E) = n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) \frac{2}{A} \sum_{\alpha=1}^{A/2} \delta(E_\alpha - E).$$

Gdy zastąpimy  $E_\alpha$  przez jednonukleonową energię oddzielenia  $E^{(1)}$  — średnią obliczoną po poziomach energetycznych — to po zsumowaniu  $\frac{1}{2}A$  jednakowych czynników otrzymamy, że

$$P_t^{\text{MF, SSF}}(\mathbf{p}, E) = n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) \delta(E^{(1)} - E). \quad (4.7)$$

Wkład izowektorowy do funkcji spektralnej można przybliżyć w sposób zaproponowany przez Kulagina i Pettiego [58]: ze względu na zakaz Pauliego dodatkowe

nukleony muszą się znajdować w pobliżu poziomu Fermiego  $\alpha_F$ ; opisując je jako gaz Fermiego otrzymamy

$$P_t^{\text{vec, SSF}}(\mathbf{p}, E) = \frac{1}{4\pi\bar{p}_F^2} \delta(|\mathbf{p}| - \bar{p}_F)\delta(E - E_F),$$

gdzie  $\bar{p}_F$  to średni pęd Fermiego w jądrze, a  $E_F$  — energia poziomu Fermiego.

Z samej definicji wynika, że  $E_F > E^{(1)}$ , więc część izowektorowa znacznie dawać wkład do przekroju czynnego przy mniejszym przekazie energii niż część średniopolowa. (Podobnie rzecz się ma z częścią izowektorową i korelacyjną.) Gdybyśmy chcieli opisać kwazielastyczne rozpraszanie  $\bar{\nu}_\mu$  na protonach w  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ , potrzebna byłaby funkcja spektralna protonów:

$$P_{(p)}^{\text{SSF}}(\mathbf{p}, E) = 20 \left[ P_{(p)}^{\text{MF, SSF}}(\mathbf{p}, E) + P_{(p)}^{\text{corr, SSF}}(\mathbf{p}, E) \right] - 2P_{(p)}^{\text{vec}}(\mathbf{p}, E),$$

która daje niefizyczne wyniki: ujemny przekrój różniczkowy dla niskich wartości przekazu energii. Podsumowując, możemy zatem stwierdzić, że uproszczenia tego podejścia idą zbyt daleko, by opisać dowolne oddziaływania leptonów z jądrem argonu. Jednak — jak się przekonamy, analizując w podrozdziale 5.3 wyniki dla kwazielastycznego rozpraszania neutrin na neutronach w argonie — w typowych sytuacjach najprostsza funkcja spektralna stanowi dobre przybliżenie dokładniejszego modelu.

Przejdziemy teraz do opisu części korelacyjnej w podejściu wspólnym dla gausowskiej i najprostszej funkcji spektralnej.

## 4.2 Część korelacyjna

Wiadomo (patrz praca [73] i podane w niej odnośniki), że wśród korelacji krótkozasięgowych dominują takie, które tworzą pary nukleonów o wysokim pędzie względnym. Dlatego do korelacyjnej części funkcji spektralnej stosujemy podejście z artykułów [57, 58] i nie uwzględniamy oddziaływań wyższego rzędu. Wtedy  $P_t^{\text{corr}}$  można wyrazić analitycznie w postaci

$$P_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}, E) = n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}) \frac{M}{|\mathbf{p}|} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha \mathbf{p}_{\text{min}}^2) - \exp(-\alpha \mathbf{p}_{\text{max}}^2) \right]. \quad (4.8)$$

Występująca powyżej stała  $\alpha$  stanowi zwięzły zapis wyrażenia  $3/(4\langle \mathbf{p}_{\text{MF}}^2 \rangle \beta)$ , z  $\beta = (A - 2)/(A - 1)$  oraz średnim kwadratem pędu dla części średniopolowej  $\langle \mathbf{p}_{\text{MF}}^2 \rangle$  zdefiniowanym jako

$$\langle \mathbf{p}_{\text{MF}}^2 \rangle = \frac{\int \mathbf{p}^2 n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) d^3p}{\int n_t^{\text{MF}}(\mathbf{p}) d^3p}, \quad (4.9)$$



zaś

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\min}^2 &= \left\{ \beta|\mathbf{p}| - \sqrt{2M\beta[E - E^{(2)} - T_{A-1}]} \right\}^2, \\ \mathbf{p}_{\max}^2 &= \left\{ \beta|\mathbf{p}| + \sqrt{2M\beta[E - E^{(2)} - T_{A-1}]} \right\}^2.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Dwunukleonowa energia oddzielenia  $E^{(2)}$  jest średnim wzbudzeniem układu  $(A-2)$  nukleonów. Z uwagi na to, że — z definicji — uśrednianie należy przeprowadzić jedynie po niskich wzbudzeniach, jej wartość można przybliżyć różnicą mas  $E^{(2)} = M_{A-2} + 2M - M_A$ .

Ponieważ wkład do części korelacyjnej pochodzi głównie od pików przy

$$E \approx E^{(2)} + \frac{\mathbf{p}^2}{2M},$$

a energia odrzutu  $T_{A-1}$  jest mniejsza niż  $\mathbf{p}^2/(2M)$  o czynnik  $(A-1)$ , to równanie (4.10) można uprościć do

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\min}^2 &= \left\{ \beta|\mathbf{p}| - \sqrt{2M\beta[E - E^{(2)}]} \right\}^2, \\ \mathbf{p}_{\max}^2 &= \left\{ \beta|\mathbf{p}| + \sqrt{2M\beta[E - E^{(2)}]} \right\}^2.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Dla najbliższego rozważanego przez nas jądra, to znaczy tlenu, takie uproszczenie modyfikuje przekrój czynny co najwyżej o  $\sim 0.2\%$ .

### 4.3 Uwzględnienie oddziaływań końcowych

Jak napisaliśmy w podrozdziale 2.5, wybijany nukleon porusza się w materii jądrowej i może oddziaływać z otaczającymi go składnikami jądra. Jest on więc układem otwartym w tym sensie, że mierzona  $E_{\mathbf{p}'}$  różni się od energii nukleonu w wierzchołku oddziaływania. Można opisać tę sytuację używając potencjału optycznego, zob. równanie (2.29). Założymy, że potencjał nie zależy od czasu; wtedy

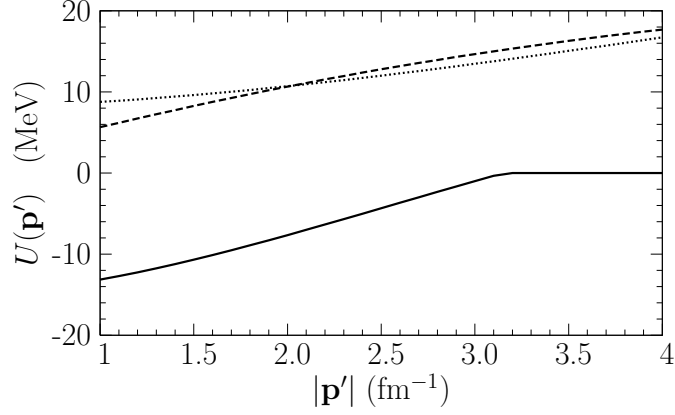
$$f_{\mathbf{p}'}(\omega - \omega') = \frac{1}{\pi} \Re \frac{1}{W - i(\omega - \omega')} = \frac{1}{\pi} \Re \frac{W + i(\omega - \omega')}{W^2 - (\omega - \omega')^2} = \frac{W/\pi}{W^2 - (\omega - \omega')^2},$$

zatem

$$\int d\omega' \delta(\omega' - V + \dots) \widetilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu} f_{\mathbf{p}'}(\omega - \omega') = \widetilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu} \frac{W/\pi}{W^2 - (\omega - V + \dots)^2}.$$

Dlatego uwzględnienie efektu FSI sprowadza się do zastąpieniu we wzorze na przekrój czynny (2.14)

$$\delta(\omega + \dots) \rightarrow \frac{W/\pi}{W^2 + [\omega - V + \dots]^2}, \quad (4.12)$$



Rys. 4.1: Potencjał optyczny używany w tej rozprawie. Linia przerywana reprezentuje jego część urojoną zadaną równaniem (4.13), a linia ciągła — rzeczywistą otrzymaną z równania (4.14). Dodana dla porównania część urojona obliczona z równania (4.14) jest pokazana linią kropkowaną.

zobacz równanie (2.28). Urojoną część potencjału optycznego przybliżymy wyrażeniem [19]

$$W = \frac{\hbar c}{2} \rho_{\text{nucl}} \sigma_{NN} \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{\mathbf{p}'}}. \quad (4.13)$$

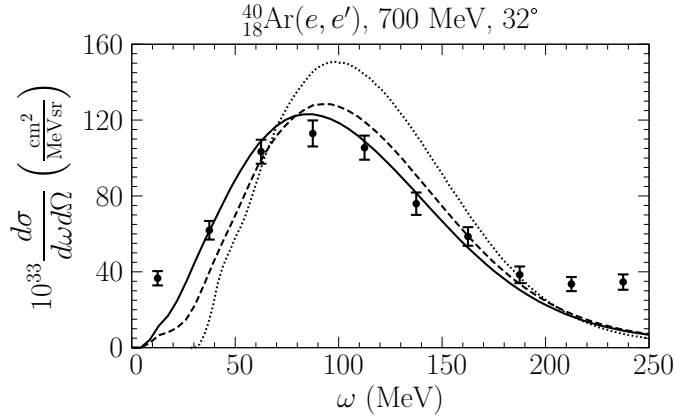
W tej pracy interesuje nas głównie opis jąder średniej wielkości, jak wapń i argon, dlatego przyjmujemy, że gęstość jądra  $\rho_{\text{nucl}}$  jest stała i równa gęstości nasycenia materii jądrowej  $\rho_{\text{sat}} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ . W interesującym nas obszarze kinematycznym typowa energia kinetyczna wybijanego nukleonu to 100–300 MeV, zaś przekrój nukleon-nukleon  $\sigma_{NN} = \frac{1}{2}(\sigma_{pp} + \sigma_{pn})$  przy  $\rho_{\text{sat}}$  waha się między 16.2 a 19.1 mb [74]. Ustalimy jego wartość na 17.4 mb, odpowiadającą nukleonom o energii 200 MeV.

Część rzeczywistą potencjału otrzymaliśmy w następujący sposób: W artykule [75] podano dirakowski potencjał optyczny<sup>1</sup> jądra  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  dopasowany do danych z rozpraszania protonów w zakresie energii 161–1040 MeV. Jest on funkcją energii kinetycznej protonu i położenia w jądrze. Ponieważ potrzebujemy potencjału zależnego tylko od energii, musimy go w jakiś sposób uśrednić po współrzędnej przestrzennej. Wykonujemy to, obliczając jego wartość dla promieni średnich kwadratowych z pracy [76]. W wyniku tego otrzymujemy potencjał  $U(\mathbf{p}')$  związany ze skalarną i wektorową częścią potencjału z publikacji [75] poprzez<sup>2</sup>

$$E_{\mathbf{p}'} + U(\mathbf{p}') = \sqrt{[M + S(T_{\mathbf{p}'}, \bar{r}_S)]^2 + \mathbf{p}'^2} + V(T_{\mathbf{p}'}, \bar{r}_V). \quad (4.14)$$

<sup>1</sup>Równanie Diraca z uwzględnionym potencjałem ma postać  $(\gamma^\mu p_\mu - M^* - \gamma^0 V)\psi = 0$ , gdzie  $M^* = M + S$ ,  $S$  to skalarna, a  $V$  — wektorowa część zespolonego potencjału optycznego.

<sup>2</sup>Równania Diraca zapisane jako  $(-\gamma^i p_i + M^*)\psi = \gamma^0(\epsilon - V)\psi$  po iteracji pozwala stwierdzić, że dodatnia wartość  $\epsilon \equiv E_{\mathbf{p}'} + U$  wynosi  $\epsilon = \sqrt{M^{*2} + \mathbf{p}'^2} + V$ , porównaj podrozdział 3.2 pracy [77].



Rys. 4.2: Wpływ oddziaływań końcowych na przekrój czynny elektron-jądro. Linia kropkowana pokazuje przekrój bez nich, linia przerywana — z uwzględnioną tylko częścią urojoną, a linia ciągła — z pełnym opisem oddziaływań końcowych.

W powyższym równaniu symbol  $\bar{r}_S$  oznacza faktycznie dwa parametry, bo rzeczywista część  $S$  ma inną wartość promienia średniego kwadratowego niż urojona. Podobnie rzecz się ma z  $\bar{r}_V$  i  $V$ . Dla  $|\mathbf{p}'| > 3.1 \text{ fm}^{-1}$  część rzeczywista  $U(\mathbf{p}')$  jest dodatnia, co nie zgadza się z korelacyjną teorią Glaubera [21]. Dlatego gdy  $|\mathbf{p}'| > 3.1 \text{ fm}^{-1}$ , ustaliśmy jej wartość na zero, jak pokazuje rysunek 4.1.

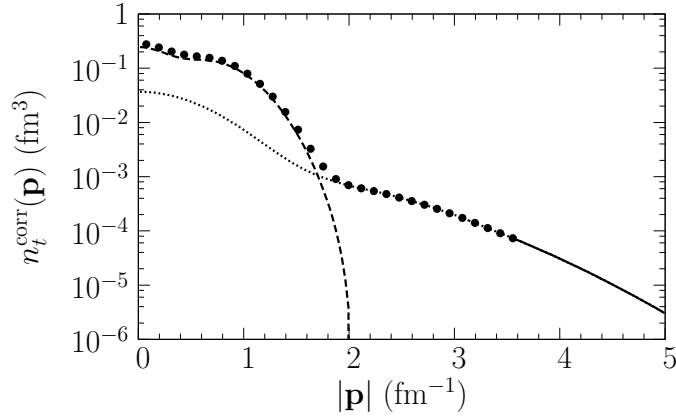
Spośród kilku parametryzacji potencjału podanych w artykule [75] zdecydowaliśmy się użyć tej nazwanej „case 2”. Sprawdziliśmy, że część urojona potencjału  $U(\mathbf{p}')$  jest wtedy bardzo bliska  $W$  otrzymanej z równania (4.13) (porównaj linię kropkowaną i przerywaną na rysunku 4.1), co zapewnia naszemu podejściu wewnętrzną spójność.

Przyjęcie, że potencjał optyczny nie zależy od czasu, prowadzi do splotu przekroju czynnego z funkcją Lorentza [równanie (4.12)]. Aby rozwiązać problem z niezerowym przekrojem czynnym dla  $\omega < 0$  (porównaj rysunek 4 w pracy [78]), nakładamy dodatkowy warunek na górną granicę całkowania względem  $E$ :

$$E \leq \omega. \quad (4.15)$$

Gdy nie uwzględnia się oddziaływań końcowych, ograniczenie to wynika automatycznie z energetycznej delty Diraca.

Jak widać na rysunku 4.2, zasadniczy wpływ urojonej części potencjału polega na poszerzeniu piku kwazielastycznego, a część rzeczywista głównie przesuwając przekrój w stronę niższych wartości  $\omega$ . Dzięki tym dwóm efektom, zgodność obliczonych przekrojów czynnych z danymi doświadczalnymi jest wyraźnie większa. Jednakże niezależny od czasu urojony potencjał przeszacowuje oddziaływania końcowe: za dużo przekroju zostaje przekazane z piku kwazielastycznego do ogonów. Omówienie tej kwestii odłożymy do podrozdziału 5.4.



Rys. 4.3: Rozkład pędów protonów w  $^{40}_{20}\text{Ca}$  z pracy [55] (kropki) podzielony na część MF (linia przerywana) i korelacyjną (linia kropkowana i ciągła). Linia ciągła pokazuje ekstrapolację jak w równaniu (4.16) z parametrami podanymi w tabeli 4.1.

## 4.4 Szczegóły techniczne

W tym podrozdziale chcemy podać wszystkie szczegóły opisu trzech jąder — tlenu, wapnia i argonu — przez gaussowskie funkcje spektralne. Przedstawimy i uzasadnimy sposób podzielenia rozkładów pędów podanych w artykule [55] na części MF i korelacyjne. Skupimy się na  $n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p})$ , a części średniopolo-we otrzymamy z równania (2.24). Następnie zaprezentujemy parametryzację poziomów energetycznych i skomentujemy sposób, w jaki zostały otrzymane ich szerokości.

### 4.4.1 Rozkłady pędów

Artykuł [55] podaje całkowite rozkłady pędów dla wielu jąder. Do gaussowskich funkcji spektralnych potrzebujemy jednak wyodrębnienia wkładów średniopolo-wych i korelacyjnych [zobacz równania (4.5) i (4.8)]. Prace [79, 80] zawierają wykresy z rozkładami pędów podzielonymi w sposób, który jest nam potrzebny. Prowadzą one do wniosku, że powyżej  $|\mathbf{p}| = 2 \text{ fm}^{-1}$  część korelacyjna daje przy-tłaczającą większość wkładu. Założymy, że powyżej  $2 \text{ fm}^{-1}$  ten wkład jest równy całkowitemu rozkładowi pędów i że  $n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p})$  można wyrazić jak podane tam roz-kłady korelacyjne, mianowicie jako sumę dwóch funkcji wykładniczych. Oprócz tego wymagamy, by zszycie przy  $2 \text{ fm}^{-1}$  było gładkie.

Rozkłady ze źródeł [35, 55], oznaczane przez nas jako  $n(t, \mathbf{p})$ , są obliczone do  $|\mathbf{p}| = 3.585 \text{ fm}^{-1}$ . Ekstrapolowaliśmy je do  $5 \text{ fm}^{-1}$ , choć okazało się, że ma to bardzo mały wpływ na przekroje czynne.

Przyjmujemy, że każda korelacyjna część rozkładu pędów jest postaci

$$n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^3} \frac{A}{N_t} [C_1 \exp(-e_1 \mathbf{p}^2) + C_2 \exp(-e_2 \mathbf{p}^2)] & \text{dla } 0 \leq |\mathbf{p}| \leq 2.025 \text{ fm}^{-1}, \\ \frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^3} \frac{A}{N_t} n(t, \mathbf{p}) & \text{dla } 2.025 \text{ fm}^{-1} < |\mathbf{p}| \leq 3.585 \text{ fm}^{-1}, \\ \frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^3} \frac{A}{N_t} C_3 \exp(-e_3 \mathbf{p}^2) & \text{dla } 3.585 \text{ fm}^{-1} < |\mathbf{p}| \leq 5.0 \text{ fm}^{-1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

W powyższym równaniu  $A$  oznacza liczbę nukleonów w jądrze. Normujemy rozkłady pędów, wprowadzając czynnik  $\mathcal{F}$ :

$$\frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^3} \frac{A}{N_t} \int_0^{5 \text{ fm}^{-1}} 4\pi \mathbf{p}^2 n(t, \mathbf{p}) d|\mathbf{p}| = 1.$$

Żeby znaleźć wartości parametrów w równaniu (4.16), zakładamy, że  $e_1 \gg e_2$ , więc tylko czynnik zawierający  $e_2$  odpowiada za zachowanie się  $n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p})$  przy wysokich pędach. Żądając ciągłości i różniczkowalności  $n_t^{\text{corr}}$ , możemy wyznaczyć  $C_2$  i  $e_2$  przy  $|\mathbf{p}| = 2.025 \text{ fm}^{-1}$ , zaś  $C_3$  i  $e_3$  przy  $|\mathbf{p}| = 3.585 \text{ fm}^{-1}$ . Wartości  $e_1$  bierzemy z pracy [80]; w podrozdziale 5.4 pokażemy, że parametr  $e_1$  w praktyce nie wpływa na wielkość przekrojów czynnych. Wartości  $C_1$  są ustalone ze względu na normalizację  $n_t^{\text{corr}}$  wynikającą z artykułu [55]: dane przedstawione tam w tabelach II i III pozwalają obliczyć, jaka część nukleonów nie może zostać przypisana do żadnej powłoki i — w konsekwencji — musi być opisana przez korelacyjną część funkcji spektralnej. Normalizacja  $n_t^{\text{corr}}$  w stosunku do  $n_t$  jest taka sama jak normalizacja korelacyjnej części funkcji spektralnej do jej całości.

Przykładowy wynik opisanej procedury przedstawia rysunek 4.3. Jak widać, w punktach zszycia,  $|\mathbf{p}| = 2.025 \text{ fm}^{-1}$  i  $3.585 \text{ fm}^{-1}$ , wkład korelacyjny jest gładki.

Zarówno całkowite rozkłady pędów, jak i normalizacje części korelacyjnych są zaczerpnięte z pracy [55], dlatego zestaw parametrów podany w tabeli 4.1 można uważać za wewnętrznie spójny.

Z brakiem informacji na temat rozkładów pędów dla protonów i neutronów w argonie radzimy sobie, stosując odpowiednie rozkłady obliczone dla wapnia  $^{40}_{20}\text{Ca}$ .

#### 4.4.2 Opis poziomów energetycznych

W podejściu GSF każda powłoka  $\alpha$  jest w pełni charakteryzowana dwoma parametrami: poziomem energetycznym  $E_\alpha$  i szerokością  $D_\alpha$  zdefiniowaną poprzez równanie (4.6).

Poziomy energetyczne wapnia zebrane w tabeli 4.2 są wynikiem teoretycznych obliczeń przedstawionych w pracy [81] (dla neutronów) i [82] (dla protonów). Kilka dostępnych poziomów dla neutronów w argonie [83] układa się w schemat bardzo podobny do odpowiednich poziomów dla neutronów w wapniu: odległość między  $1d_{3/2}$  a  $2s_{1/2}$  to 1.7 MeV dla argonu i 1.74 MeV dla wapnia, zaś  $1d_{3/2}$  i poziom

Tabela 4.1: Parametry korelacyjnych części rozkładów pędów [równanie (4.16)] z pracy [55] i ich normalizacje względem całkowitego rozkładu dla różnych jąder. Ostatni wiersz pokazuje średnie pędy części MF zdefiniowane równaniem (4.9).

	$^{16}_8\text{O}$	$^{40}_{20}\text{Ca}$		$^{48}_{20}\text{Ca}$	
		proton	neutron	proton	neutron
$\mathcal{F}$	1.0200	1.0370	1.0370	1.0440	1.0200
$C_1$	2.1280	4.2150	4.2700	4.0040	4.6700
$e_1$	1.4000	1.7700	1.7700	1.7700	1.7700
$C_2$	0.1427	0.1940	0.1855	0.1536	0.1656
$e_2$	0.2260	0.2260	0.2142	0.2018	0.2065
$C_3$	0.1678	0.2282	0.2451	0.2500	0.2960
$e_3$	0.2410	0.2580	0.2648	0.2972	0.2940
Normal.	12.00%	16.20%	16.20%	17.10%	13.64%
$\sqrt{\langle \mathbf{p}_{\text{MF}}^2 \rangle}$ (MeV)	174.4	189.1	187.1	180.8	196.4

Tabela 4.2: Poziomy energetyczne  $E_\alpha$  i ich szerokości  $D_\alpha$  dla wapnia  $^{40}_{20}\text{Ca}$  (po lewej) i argonu  $^{40}_{18}\text{Ar}$  (po prawej).

Stan	protony		neutrony		Stan	protony		neutrony	
	$E_\alpha$	$D_\alpha$	$E_\alpha$	$D_\alpha$		$E_\alpha$	$D_\alpha$	$E_\alpha$	$D_\alpha$
$1s_{1/2}$	57.38	25 <sup>a</sup>	66.12	25 <sup>a</sup>	$1s_{1/2}$	52 <sup>a</sup>	25	62 <sup>a</sup>	25
$1p_{3/2}$	36.52	15 <sup>a</sup>	43.80	15 <sup>a</sup>	$1p_{3/2}$	32 <sup>a</sup>	15	40 <sup>a</sup>	15
$1p_{1/2}$	31.62	15 <sup>a</sup>	39.12	15 <sup>a</sup>	$1p_{1/2}$	28 <sup>a</sup>	15	35 <sup>a</sup>	15
$1d_{5/2}$	14.95	4 <sup>a</sup>	22.48	6 <sup>a</sup>	$1d_{5/2}$	11 <sup>a</sup>	4	18 <sup>a</sup>	5
$2s_{1/2}$	10.67	2 <sup>b</sup>	17.53	4 <sup>b</sup>	$2s_{1/2}$	8 <sup>a</sup>	2	13.15 <sup>b</sup>	4
$1d_{3/2}$	8.88	2 <sup>b</sup>	15.79	4 <sup>b</sup>	$1d_{3/2}$	6 <sup>a</sup>	2	11.45 <sup>b</sup>	3
$\alpha_F$	4.71		12.0		$1f_{7/2}$			5.56 <sup>b</sup>	3
					$\alpha_F$			8.0 <sup>b</sup>	

<sup>a</sup>Dopasowanie do wykresów z prac [81, 82].

<sup>b</sup>Nasze oszacowanie, szczegóły w tekście.

<sup>a</sup>Nasze oszacowanie, szczegóły w tekście.

<sup>b</sup>Obliczenia teoretyczne [83].

Tabela 4.3: Jak tabela 4.2, ale dla  $^{16}\text{O}$ . Wartości  $D_\alpha$  są otrzymane inaczej, zobacz szczegóły w tekście.

Stan	protony		neutrony	
	$E_\alpha$	$D_\alpha$	$E_\alpha$	$D_\alpha$
$1s_{1/2}$	45.00	70	47.00	70
$1p_{3/2}$	18.44	4	21.80	4
$1p_{1/2}$	12.11	4	15.65	4

Fermiego  $\alpha_F$  dzieli 3.5 MeV dla argonu i 3.8 MeV dla wapnia. Aby uzupełnić brakujące dane, zakładamy, że wszystkie poziomy dla neutronów zachowują się zgodnie z tym schematem, patrz tabela 4.2. Ze względu na brak danych o poziomach energetycznych protonów w argonie, używamy zmodyfikowanych wartości dla wapnia. Poziomy dla jądra tlenu [84, 85] zestawia tabela 4.3; używane przez nas starsze dane znakomicie się zgadzają z niedawnym pomiarem [86].

Szerokość większości poziomów wapnia można wyznaczyć poprzez dopasowanie rozkładów do wykresów rozkładu energii w artykułach [81, 82]. Brakujące wartości oszacowaliśmy korzystając z faktu, że  $D_\alpha$  powinny być, w przybliżeniu, funkcją odległości od poziomu Fermiego [15, 81, 82, 83]:

$$D_\alpha \propto \frac{(E_\alpha - E_F)^2}{(E_\alpha - E_F)^2 + a^2}.$$

Szerokości  $D_\alpha$  dla argonu otrzymaliśmy, przyjmując, że ich wartości leżą z grubsza na tej samej krzywej, co szerokości dla wapnia.

Dla tlenu nie znaleźliśmy rozkładów energii obliczonych w ten sam sposób co dla wapnia w pracach [81, 82]. Ponieważ jądro tlenu odgrywa jedynie rolę „poligonu doświadczalnego” dla naszego modelu, zdecydowaliśmy się otrzymać  $D_\alpha$  dla protonów bezpośrednio z rozkładu energii w funkcji spektralnej Benhara i użyć tych samych wartości dla neutronów. W ten sposób unikamy dodatkowych źródeł rozbieżności pomiędzy dwoma opisami.

## 4.5 Algorytm programu

W tym podrozdziale omówimy algorytm programu liczącego przekrój czynny jądra w przybliżeniu impulsowym bez oddziaływań końcowych i z ich uwzględnieniem. Skoncentrujemy się na opisie przekroju czynnego dla rozpraszania elektronów pod ustalonym kątem w funkcji przekazu energii.

### 4.5.1 Wprowadzenie teoretyczne

Najpierw musimy przekształcić wyrażenie (2.14) do postaci odpowiedniej do obliczeń numerycznych i znaleźć granice całkowania. Rozważamy energię wiązki  $E_{\mathbf{k}}$  rzędu kilkuset MeV, dlatego zaniedbujemy masę elektronu:  $E_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$  i  $E_{\mathbf{k}'} = |\mathbf{k}'|$ .

Znając kąt rozpraszania  $\theta$ , dla ustalonej wartości przekazu energii  $\omega$  możemy obliczyć przekaz pędu:

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta + |\mathbf{k}'|^2}, \quad (4.17)$$

gdzie  $|\mathbf{k}'| = E_{\mathbf{k}} - \omega$ . Wynika to bezpośrednio z definicji przekazu pędu  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Oprócz tego

$$\frac{d|\mathbf{q}|}{d\cos \theta} = -\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}{|\mathbf{q}|},$$

więc interesujący nas przekrój czynny dla ustalonego  $\theta$  wiąże z przekrojem (2.14) relacja

$$\frac{d\sigma_t}{d\omega d\cos \theta} = \frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}{|\mathbf{q}|} \frac{d\sigma_t}{d\omega d|\mathbf{q}|}.$$

W otrzymanym wyrażeniu, mianowicie

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_t}{d\omega d\cos \theta} &= 2\pi\alpha^2 \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{\mathbf{k}}q^4} \int dE d^3p \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \frac{P_t(\mathbf{p}, E)}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}} \\ &\times \delta(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'}) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

pojawia się delta Diraca, której pozbedziemy się wykonując jedno całkowanie.

Wybieramy układ współrzędnych tak, żeby oś  $z$  była skierowana jak wektor przekazu pędu, początkowy pęd elektronu leżał w płaszczyźnie  $zx$ , a jego składowa  $k_x$  była dodatnia, to znaczy

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (0, 0, |\mathbf{q}|), \\ \mathbf{k} &= (k_x, 0, k_z). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Na razie będziemy korzystali tylko z postaci  $\mathbf{q}$ . W wybranym sferycznym układzie współrzędnych kąt biegunowy  $\theta_{\mathbf{p}}$  jest kątem między wektorem  $\mathbf{q}$  a wektorem  $\mathbf{p}$ , zaś

$$d^3p = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\cos \theta_{\mathbf{p}} d\phi_{\mathbf{p}}.$$

Skoro  $E_{\mathbf{p}'} = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta_{\mathbf{p}} + \mathbf{q}^2}$ , to korzystając ze wzoru na zamianę argumentu delty Diraca otrzymujemy równość

$$\delta(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'}) = \frac{E_{\mathbf{p}'}}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \delta(\cos \theta_{\mathbf{p}} - \cos \theta_{\mathbf{p}}^0),$$



gdzie  $\theta_{\mathbf{p}}^0$  oznacza kąt, dla którego spełnione jest zachowanie energii. Zatem przekrój czynny możemy zapisać jako

$$\frac{d\sigma_t}{d\omega d\cos\theta} = 2\pi(\hbar c\alpha)^2 \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{q}|E_{\mathbf{k}}q^4} \int dE d|\mathbf{p}| d\phi_{\mathbf{p}} \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} P_t(\mathbf{p}, E) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

W powyższym równaniu uwzględniliśmy czynnik  $(\hbar c)^2$ , który zapewnia, że przekrój czynny ma wymiar powierzchni.

Ustalmy granice całkowania. Z zachowania energii wiemy, że  $E_{\mathbf{p}'} = \omega + M - E$ . Wybity proton znajduje się na powłoce masy, więc  $E_{\mathbf{p}'} \geq M$  i dlatego

$$E \leq \omega. \quad (4.21)$$

Energia usunięcia  $E$  jest dodatnia (ograniczamy się do stabilnych jąder), zatem  $E_{\mathbf{p}'} < \omega + M$ . Z drugiej strony  $(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 \geq (|\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|)^2$ , więc zachodzi nierówność

$$\sqrt{M^2 + (|\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|)^2} < \omega + M.$$

Obustronne podniesienie jej do kwadratu daje

$$(|\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|)^2 < \omega(\omega + 2M),$$

co prowadzi do wniosku, że pęd początkowego nukleonu musi spełniać warunki

$$|\mathbf{q}| - \sqrt{\omega(\omega + 2M)} < |\mathbf{p}| < |\mathbf{q}| + \sqrt{\omega(\omega + 2M)}, \quad (4.22)$$

które określają granice całkowania względem  $|\mathbf{p}|$ .

Przejdźmy do przekroju czynnego z uwzględnionym wpływem oddziaływań końcowych. Otrzymamy go stosując do równania (4.18) przepis (4.12). Wybieramy orientację osi sferycznego układu współrzędnych tak jak poprzednio; wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_t}{d\omega d\cos\theta} &= 2\pi(\hbar c\alpha)^2 \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{\mathbf{k}}q^4} \int dE d|\mathbf{p}| d\cos\theta_{\mathbf{p}} d\phi_{\mathbf{p}} \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \frac{|\mathbf{p}|^2}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}} P_t(\mathbf{p}, E) \\ &\quad \times f_{\mathbf{p}'}(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'} - V) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em}, t}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdzie  $f_{\mathbf{p}'}(\omega + M - E - E_{\mathbf{p}'} - V)$  to funkcja składająca określona jako

$$f_{\mathbf{p}'}(\omega + \dots) = \frac{1}{\pi} \frac{W(\mathbf{p}')}{[W(\mathbf{p}')]^2 + [\omega + \dots]^2},$$

a  $W(\mathbf{p}')$  jest częścią urojoną potencjału optycznego:

$$W(\mathbf{p}') = \frac{\hbar c}{2} \rho_{\text{nuc}} \sigma_{NN} \frac{|\mathbf{p}'|}{E_{\mathbf{p}'}}.$$

Jak pisaliśmy w podrozdziale 4.3, górną granicę całkowania względem  $E$  przyjmujemy zgodnie z nierównością (4.21). Na pęd nie nakładamy żadnych warunków.

#### 4.5.2 Algorytm obliczania przekroju czynnego bez FSI

Szukamy wartości przekroju (4.20) dla ustalonej energii wiązki  $E_{\mathbf{k}}$ , kąta rozpraszania  $\theta$  i wybranego przekazu energii  $\omega \in [0; E_{\mathbf{k}}]$ . Korzystamy z metody Monte Carlo: żeby wyliczyć całkę, należy wielokrotnie obliczyć wyrażenie podcałkowe dla punktów losowo wybranych w obszarze całkowania, znaleźć jego średnią wartość i pomnożyć wynik przez długość każdego przedziału całkowania. W tym celu musimy żadaną liczbę razy powtórzyć następującą procedurę:

1. Obliczyć  $|\mathbf{q}| = \sqrt{\omega^2 + 2E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}} - \omega)(1 - \cos \theta)}$ .
2. Wylosować  $|\mathbf{p}| \in [\max\{0, |\mathbf{p}|_{-}\}; \min\{|\mathbf{p}|_{+}, |\mathbf{p}|_{\max}\}]$  i  $E \in [0; \min\{\omega, E_{\max}\}]$ , gdzie  $|\mathbf{p}|_{\pm} = |\mathbf{q}| \pm \sqrt{\omega(\omega + 2M)}$ .
3. Znaleźć wartości

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{p}} &= \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2}, \\ E_{\mathbf{p}' } &= M - E + \omega, \\ |\mathbf{p}'| &= \sqrt{E_{\mathbf{p}' }^2 - M^2}, \\ \tilde{\omega} &= E_{\mathbf{p}' } - E_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

4. Sprawdzić, czy

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}'| &> \bar{p}_F, \\ |\mathbf{p}'| + |\mathbf{q}| &\geq |\mathbf{p}| \geq \left| |\mathbf{p}'| - |\mathbf{q}| \right|, \\ \tilde{\omega} &> 0. \end{aligned}$$

Jeśli któryś warunek nie jest spełniony, to wrócić do kroku 2, bo wkład do przekroju czynnego jest zerowy.

5. Wyliczyć składowe wektorów  $\mathbf{k}$  i  $\mathbf{p}$  równoległe do przekazu pędu  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} k_z &= \frac{\omega(2E_{\mathbf{k}} - \omega) + |\mathbf{q}|^2}{2|\mathbf{q}|}, \\ p_z &= \frac{\tilde{\omega}(2E_{\mathbf{p}} + \tilde{\omega}) - |\mathbf{q}|^2}{2|\mathbf{q}|}. \end{aligned}$$

6. Sprawdzić, czy  $|k_z/|\mathbf{k}|| \leq 1$  i czy  $|p_z/|\mathbf{p}|| \leq 1$ . Jeśli któryś warunek nie zachodzi, to wrócić do kroku 2, przyjmując, że wkład do przekroju wynosi zero.

7. Wylosować azymutalny kąt początkowego pędu nukleonu  $\phi_{\mathbf{p}} \in [0; 2\pi]$ .

8. Obliczyć

$$k_x = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - k_z^2},$$

$$p_x = \cos \phi_{\mathbf{p}} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 - p_z^2}.$$

9. Otrzymać wartości iloczynów skalarnych

$$\begin{aligned}\tilde{q} \cdot k &= \tilde{\omega} E_{\mathbf{k}} - k_z |\mathbf{q}|, \\ \tilde{q} \cdot p &= \tilde{\omega} E_{\mathbf{p}} - p_z |\mathbf{q}|, \\ p \cdot k &= E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{k}} - p_x k_x - p_z k_z, \\ \tilde{q} \cdot k' &= \tilde{\omega} (E_{\mathbf{k}} - \omega) - |\mathbf{q}| (k_z - |\mathbf{q}|), \\ p \cdot k' &= p \cdot k - E_{\mathbf{p}} \omega + p_z |\mathbf{q}|, \\ k \cdot k' &= -E_{\mathbf{k}} \omega + k_z |\mathbf{q}|.\end{aligned}$$

10. Wyliczyć wyrażenie podcałkowe w równaniu (4.20) z  $\tilde{q}^2$  jako argumentem czynników postaci  $F_{i,t}$ .

Po obliczeniu średniej wartości wyrażenia podcałkowego należy wymnożyć ją przez: stałe w przekroju (4.20), długości przedziałów całkowania względem  $|\mathbf{p}|$  i  $E$  oraz czynnik  $2\pi$ , wynikający z całkowania względem  $\phi_{\mathbf{p}}$ .

**Objaśnienie algorytmu.** Zaczynamy w *kroku 1.* od otrzymania  $|\mathbf{q}|$  z wyrażenia równoważnego równaniu (4.17). Ponieważ funkcja spektralna ma niezerową wartość na obszarze  $[0; |\mathbf{p}|_{\max}] \times [0; E_{\max}]$ , po uwzględnieniu warunków (4.21) i (4.22) otrzymujemy przedziały podane w *kroku 2.* W *kroku 3.* korzystamy jedynie z zachowania energii i definicji wyznaczanych wielkości. Musimy sprawdzić — na tym polega *krok 4.* — czy oddziaływanie byłoby dopuszczone we względu na blokowanie Pauliego, czy można uzyskać wektor  $\mathbf{p}'$  z wektorów  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{q}$ , a także czy  $\tilde{\omega} > 0$ , bo tylko wtedy tensor jądrowy  $W^{\mu\nu}$  jest różny od zera. W *kroku 5.* obliczamy zetowe składowe wektorów  $\mathbf{k}$  i  $\mathbf{p}$ , potrzebne później do iloczynów skalarnych. Pierwszy z podanych wzorów otrzymuje się, korzystając z tego, że z jednej strony  $\mathbf{k}'^2 = (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2$ , z drugiej zaś  $\mathbf{k}'^2 = (E_{\mathbf{k}} - \omega)^2$ ; drugi wzór wynika ze związków  $\mathbf{p}'^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2$  i  $\mathbf{p}'^2 = E_{\mathbf{p}'}^2 - M^2 = (E_{\mathbf{p}} + \tilde{\omega})^2 - M^2$ . *Krok 6.* ma na celu sprawdzenie, czy obliczone wielkości są dozwolone kinematycznie. Następnie w *kroku 7.* losujemy orientację składowej  $\mathbf{p}$  prostopadłej do  $\mathbf{q}$ . Układ współrzędnych wybraliśmy tak, żeby  $k_x \geq 0$ , zobacz równanie (4.19); odwołujemy się do tej własności w *kroku 8.* Znajomość współrzędnych wektorów jest potrzebna w *kroku 9.* — wyliczeniu iloczynów skalarnych występujących w zwężeniu  $L_{\mu\nu}^{\text{em}} \tilde{H}_{\text{em},t}^{\mu\nu}$ ; posługujemy

się tu równością  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ . Przy obliczaniu wyrażenia podcałkowego — to znaczy w *kroku 10*. — używamy przepisu de Foresta i procedury przywracającej zachowanie prądu (2.15), zgodnie z tym, co napisaliśmy w rozdziale 2.

### 4.5.3 Algorytm obliczania przekroju czynnego z FSI

Gdy chcemy uwzględnić wpływ oddziaływań końcowych, zamiast procedury podanej poprzednio musimy zastosować następujący algorytm:

1. Obliczyć  $|\mathbf{q}| = \sqrt{\omega^2 + 2E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}} - \omega)(1 - \cos \theta)}$ .
2. Wylosować  $|\mathbf{p}| \in [0; |\mathbf{p}|_{\max}]$ ,  $E \in [0; \min\{\omega, E_{\max}\}]$  i  $\cos \theta_{\mathbf{p}} \in [-1; 1]$ .
3. Znaleźć wartości

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{p}} &= \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2}, \\ p_z &= |\mathbf{p}| \cos \theta_{\mathbf{p}}, \\ |\mathbf{p}'|^2 &= |\mathbf{p}|^2 - p_z^2 + (p_z + |\mathbf{q}|)^2, \\ E_{\mathbf{p}'} &= \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}'|^2}, \\ \tilde{\omega} &= E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

4. Sprawdzić, czy

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}'| &> \bar{p}_F, \\ |\mathbf{p}'| + |\mathbf{q}| &\geq |\mathbf{p}| \geq \left| |\mathbf{p}'| - |\mathbf{q}| \right|, \\ \tilde{\omega} &> 0. \end{aligned}$$

Jeśli któryś warunek nie jest spełniony, to wrócić do kroku 2, ponieważ wylosowany punkt nie daje wkładu do przekroju czynnego.

5. Wyliczyć składową wektora  $\mathbf{k}$  równoległą do przekazu pędu  $\mathbf{q}$ :

$$k_z = \frac{\omega(2E_{\mathbf{k}} - \omega) + |\mathbf{q}|^2}{2|\mathbf{q}|}.$$

6. Sprawdzić, czy  $|k_z/|\mathbf{k}|| \leq 1$ . Jeśli nie, to wrócić do kroku 2, bo nie ma wkładu do przekroju czynnego.
7. Wylosować azymutalny kąt początkowego pędu nukleonu  $\phi_{\mathbf{p}} \in [0; 2\pi]$ .

8. Obliczyć

$$k_x = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - k_z^2},$$

$$p_x = \cos \phi_{\mathbf{p}} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 - p_z^2}.$$

9. Otrzymać wartości iloczynów skalarnych

$$\begin{aligned}\tilde{q} \cdot k &= \tilde{\omega} E_{\mathbf{k}} - k_z |\mathbf{q}|, \\ \tilde{q} \cdot p &= \tilde{\omega} E_{\mathbf{p}} - p_z |\mathbf{q}|, \\ p \cdot k &= E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{k}} - p_x k_x - p_z k_z, \\ \tilde{q} \cdot k' &= \tilde{\omega} (E_{\mathbf{k}} - \omega) - |\mathbf{q}| (k_z - |\mathbf{q}|), \\ p \cdot k' &= p \cdot k - E_{\mathbf{p}} \omega + p_z |\mathbf{q}|, \\ k \cdot k' &= -E_{\mathbf{k}} \omega + k_z |\mathbf{q}|.\end{aligned}$$

10. Wylczyć wyrażenie podcałkowe w równaniu (4.23) z  $\tilde{q}^2$  jako argumentem czynników postaci  $F_{i,t}$ .

Średnią wartość wyrażenia podcałkowego trzeba wymnożyć przez: stałe w przekroju (4.23), długości przedziałów całkowania względem  $|\mathbf{p}|$  i  $E$  oraz czynnik  $4\pi$ , wynikający z całkowania po kątach.

**Różnice między algorytmami.** Podana procedura różni się od opisanej dla przypadku bez oddziaływań końcowych, bo przekrój czynny (4.23) nie zawiera energetycznej delty Diraca. Dlatego w *kroku 3.* obliczamy  $|\mathbf{p}'|$  korzystając jedynie z zachowania pędu i z tego, że składowa  $p_z$  jest równoległa do  $\mathbf{q}$ .

#### 4.5.4 Szczegóły implementacji

Jak obliczyliśmy, prawie dokładnie 80% normalizacji funkcji spektralnej<sup>3</sup> leży w regionie  $|\mathbf{p}| \in [0; 250]$  MeV/c i  $E \in [0; 100]$  MeV. Pozostałe 20% pochodzi od obszaru 8.6 razy większego. Gdybyśmy w obszarze dozwolonym kinematycznie losowali punkty z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa, to uzyskana zbieżność byłaby bardzo powolna.

Szybszą zbieżność uzyskalibyśmy, losując więcej punktów tam, gdzie wkład do przekroju czynnego jest większy, a mniej tam, gdzie jest on mniejszy. Dlatego obszar, po którym całkujemy, dzielimy na kostki jednakowej wielkości (30–60 przedziałów w każdej zmiennej całkowania). W pierwszym etapie losujemy jednakową

<sup>3</sup>Przedstawione wartości dotyczą funkcji spektralnej tlenu z pracy [21]. Jest ona określona na obszarze  $|\mathbf{p}| \in [0; 800]$  MeV/c i  $E \in [0; 300]$  MeV.

liczbę punktów we wszystkich kostkach i sprawdzamy, jaki wkład do przekroju daje każda z nich. Drugi etap obliczeń polega na tym, że w danej kostce losujemy liczbę punktów proporcjonalną do jej wkładu (jeśli dla jakiejś kostki otrzymana liczba punktów jest mniejsza niż pierwotna, to dla tej kostki używamy wkładu wyliczonego w pierwszym etapie). W obu etapach normujemy wkłady odpowiednimi liczbami punktów. Po zsumowaniu przyczynków od wszystkich kostek dostajemy szukany przekrój.

## Rozdział 5

# Wyniki

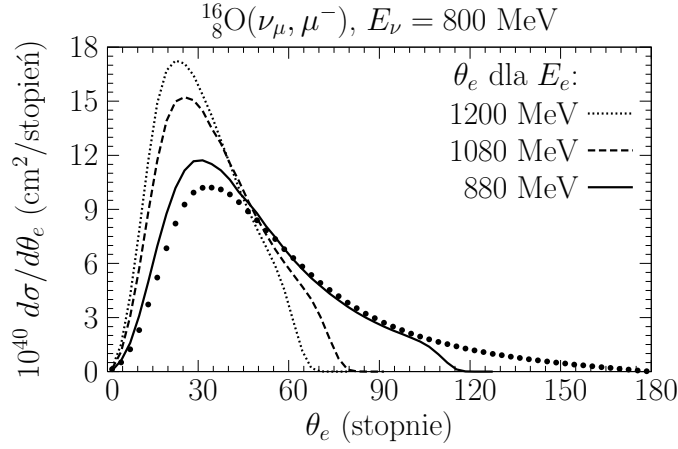
Głównym celem rozprawy doktorskiej jest ulepszenie opisu jądra argonu w oddziaływaniach neutrin. Jak dotąd nie zebrano precyzyjnych danych dla neutrin, z którymi można by skonfrontować przewidywania modelu, dlatego musimy się uciec do innej metody: Najpierw na płaszczyźnie przekazu pędu i przekazu energii wyznaczymy obszar dający największy wkład do przekroju czynnego na oddziaływania neutrin. Następnie sprawdzimy, które pomiary dla rozpraszania elektronów na tlenie i wapniu leżą wewnątrz tego obszaru. Później porównamy przewidywania funkcji spektralnych tych jąder z możliwie szerokim zbiorem punktów doświadczalnych, żeby mieć pewność, że otrzymana zgodność nie jest dziełem przypadku, i żeby poznać granice stosowalności modelu. Ostatni test stanowi zestawienie uzyskanych wyników z jedynym znanym nam pomiarem przekroju czynnego elektronów na argonie. Tak możemy streścić części 5.1 i 5.2 tego rozdziału. Dzięki pozytywnym wynikom opisanej w nich analizy jesteśmy przekonani o precyzji przykładowego przekroju czynnego dla rozpraszania neutrin na argonie, który prezentujemy w podrozdziale 5.3. Na końcu tego rozdziału szczegółowo omawiamy niepewności modelu teoretycznego.

Dlaczego, wybierając tarcze do testów, zdecydowaliśmy się właśnie na tlen i wapń? Pomiary dla tlenu [87] i argonu [88] zostały wykonane w taki sam sposób, więc są obciążone podobnymi niepewnościami. Oprócz tego jądro tlenu umożliwia porównanie naszego przybliżonego modelu z funkcją spektralną obliczoną przez Benhara i innych [21, 89]. Z kolei wapń to najbardziej zbliżone do argonu jądro, dla którego istnieją precyzyjne pomiary elektronowych przekrojów czynnych.

Dzięki konfrontacji z szerokim spektrum danych, przedstawiona w tym rozdziale analiza pozwala nam wyciągnąć wniosek natury ogólnej: przybliżenie impulsowe zaczyna się załamywać, gdy typowy przekaz pędu w piku kwazielastycznym jest mniejszy niż około 400 MeV. Poniżej tej wartości rozbieżności z danymi nie są jeszcze duże, a stają się znaczące dla  $|\mathbf{q}| \lesssim 300$  MeV.

### 5.1 Selekcja danych

Zacznijmy od określenia na płaszczyźnie  $(\omega, |\mathbf{q}|)$  obszaru najbardziej istotnego dla kwazielastycznego rozpraszania *neutrin*. Przekazy pędu i energii są związane z ką-



Rys. 5.1: Analiza zależności przekroju czynnego dla  $^{16}\text{O}(\nu_\mu, \mu^-)$  od przekazu energii i pędu. Linie pokazują, jakie kąty rozpraszania elektronów  $\theta_e$  w  $^{16}\text{O}(e, e')$  odpowiadają temu samemu obszarowi kinematycznemu. Punkty obrazują standardowy przekrój różniczkowy po kącie mionu, powstającego przy oddziaływaniu  $^{16}\text{O}(\nu_\mu, \mu^-)$ .

tem produkcji mionu  $\theta$  poprzez wyrażenie

$$\cos \theta = \frac{E_\nu - \omega}{|\mathbf{k}'|} + \frac{\omega^2 - \mathbf{q}^2 - m_\mu^2}{2E_\nu |\mathbf{k}'|}, \quad (5.1)$$

gdzie  $|\mathbf{k}'| = \sqrt{(E_\nu - \omega)^2 - m_\mu^2}$ , dlatego wybranie przedziału w  $\theta$  jest równoważne wyznaczeniu obszaru na płaszczyźnie  $(\omega, |\mathbf{q}|)$ . Punkty na rysunku 5.1 przedstawiają różniczkowy przekrój  $d\sigma^{\text{weak}}/d\theta$  dla neutrina o energii  $E_\nu = 0.8$  GeV. Widzimy, że pik przy  $\sim 33^\circ$  jest dość szeroki, zaś  $\sim 50\%$  przekroju czynnego bierze się z  $\theta \in [20^\circ; 56^\circ]$ . Dla  $E_\nu = 1.2$  GeV maksimum przesuwa się do  $\sim 22^\circ$  i staje się węższe (nie pokazujemy tego na rysunku).

Ustaliliśmy, jaki udział w przekroju czynnym mają poszczególne kąty produkcji mionów. Chcemy je teraz odwzorować w kąty rozpraszania *elektronów* odpowiadające tym samym  $\omega$  i  $|\mathbf{q}|$ , zachowując informację o wielkości wkładu do przekroju neutrin. Ponieważ dla wiązki elektronów o energii  $E_e$  relacja analogiczna do (5.1) ma postać

$$\cos \theta_e = 1 + \frac{\omega^2 - \mathbf{q}^2}{2E_e(E_e - \omega)}, \quad (5.2)$$

to, dla ustalonej wartości  $E_\nu$  i wybranej  $E_e$ , kątowi produkcji mionu odpowiada kąt rozpraszania elektronu:

$$\theta \mapsto \theta_e.$$



Kątom rozpraszania elektronu możemy przypisać wagę przekrojem czynnym neutrina, licząc wielkość

$$\frac{d\theta}{d\theta_e} \frac{d\sigma^{\text{weak}}}{d\theta} \quad (5.3)$$

dla jądra tlenu opisanego funkcją spektralną Benhara. (Sprawdziliśmy, że model gazu Fermiego i opis efektywny [30] prowadzą do podobnych wniosków.)

Od tej pory do końca rozdziału skupimy się na  $E_\nu = 0.8$  GeV. Rysunek 5.1 pokazuje wielkość (5.3) dla trzech wartości energii elektronu  $E_e$ : 0.88, 1.08 i 1.2 GeV. Wynika z niego, że aby nasz model dobrze przewidywał przekrój czynny neutrin o energii 0.8 GeV, powinien precyzyjnie opisywać dane dla elektronów zebrane przy energii 1.2 GeV i kącie rozpraszania  $\theta_e \sim 23^\circ$ , przy 1.08 GeV i  $\theta_e \sim 25^\circ$ , bądź 0.88 GeV i  $\theta_e \sim 30^\circ$ .

Przejdźmy do szczegółów. Nasza analiza prowadzi do wniosku, że zakresowi kąta produkcji mionu  $[20^\circ; 56^\circ]$  przy  $E_e = 1.2$  GeV odpowiada przedział  $\theta_e \in [15^\circ; 36^\circ]$  z maksimum dla  $23^\circ$ , z kolei dla  $E_e = 1.08$  GeV jest to przedział  $\theta_e \in [17^\circ; 39^\circ]$  z maksimum przy  $25^\circ$ ; zaś dla  $E_e = 0.88$  GeV — przedział  $\theta_e \in [19^\circ; 50^\circ]$  z maksimum przy  $30^\circ$ . Ogólną zasadę można sformułować następująco: im większa energia elektronów, tym mniejsze kąty rozpraszania stają się istotne.

Równanie (5.2) jest dobrze określone dla  $\omega$  i  $|\mathbf{q}|$  opisujących rozpraszanie neutrina, gdy  $E_e \geq E_\nu$ . Dla niższych  $E_e$  ten wzór można stosować kosztem utraty normalizacji, bowiem postać mianownika wyklucza niektóre punkty na płaszczyźnie  $(\omega, |\mathbf{q}|)$ . Na przykład gdy użyje się  $E_e = 0.73$  GeV, to przekrój zmniejsza się o 5%, zaś  $\theta \in [20^\circ; 56^\circ]$  odpowiada  $\theta_e \in [22^\circ; 61^\circ]$  z maksimum przy  $35^\circ$ .

W przypadku rozpraszania elektronów na tlenie pomiarów dokonano przy kącie rozpraszania  $32^\circ$ , używając wiązek o energii 700, 880, 1080, 1200 i 1500 MeV [87, 88] oraz przy kącie  $37.1^\circ$  dla energii 537 i 730 MeV [90]. Żeby zweryfikować model, który ma dobrze opisywać kwazielastyczne rozpraszanie neutrin na jądrze przy energii 800 MeV, najistotniejsze są dane dla 880 i 730 MeV. Przekazy pędu i energii charakteryzujące rozpraszanie przy 1080 i 700 MeV w mniejszym stopniu przypominają te, których potrzebujemy. Punkty doświadczalne dla 1200 i 537 MeV są najmniej ważne, ale jeszcze leżą w naszym obszarze zainteresowań. Zestaw danych dla 1500 MeV został zebrany przy zbyt dużym kącie rozpraszania.

Spośród kilku prac opisujących wyniki eksperymentów, które dotyczyły oddziaływania elektronów z wapniem [60, 91, 92, 93], najbardziej odpowiednia do przetestowania naszego modelu jest ta Williamsona i in. [93]: zawiera ona dane dla najmniejszego kąta rozpraszania, mianowicie  $45.5^\circ$ , i jednocześnie największych wartości energii wiązki — aż do 841 MeV. Sprawdziliśmy, że wszystkie pomiary przy  $45.5^\circ$  leżą w ważnym dla nas obszarze płaszczyzny  $(\omega, |\mathbf{q}|)$ . Oczywiście tylko dane dla  $E_e = 841$  MeV pokrywają cały ten obszar, a im mniejsza energia, tym więcej normalizacji tracimy. Na przykład gdy używa się  $E_e = 545$  MeV,  $\theta \in [20^\circ; 56^\circ]$

odpowiada  $\theta_e \in [29^\circ; 75^\circ]$  z maksimum przy  $46^\circ$ , a wielkość (5.3) jest mniejsza o 27.4% od przekroju. Używając  $E_e = 372$  MeV „gubimy” aż 56.7% normalizacji, a interesujący przedział to  $\theta \in [42^\circ; 90^\circ]$  Dlatego polegamy głównie na testach z użyciem danych dla większych energii elektronów.

Na końcu chcielibyśmy wytłumaczyć, dlaczego wybraliśmy energię neutrina właśnie 0.8 GeV. Otóż przy takim wyborze jest wystarczająco dużo istotnych danych, dotyczących rozpraszania elektronów, żeby zweryfikować model. Dla większej wartości, powiedzmy 1.2 GeV, sytuacja byłaby zupełnie inna — potrzebowalibyśmy przekrojów czynnych zmierzonych przy małych kątach rozpraszania, a dla interesujących nas tarcz ich po prostu nie ma.

## 5.2 Rozpraszanie elektronów

Celem tego podrozdziału jest konfrontacja opisanego w rozdziale 4 modelu GSF z istniejącymi pomiarami przekrojów czynnych na rozpraszanie elektronów na tlenie, wapniu i argonie. Ponieważ opis rezonansu  $\Delta$  i obszaru pomiędzy pikem kwazielastycznym a wzbudzeniem delty, jest nadal niejasny [94, 95, 96, 97, 98, 99, 100], rozważania ograniczyliśmy tylko do oddziaływań kwazielastycznych, a przewidywania otrzymanych funkcji spektralnych testujemy tak naprawdę przy przekazach energii poniżej piku kwazielastycznego.

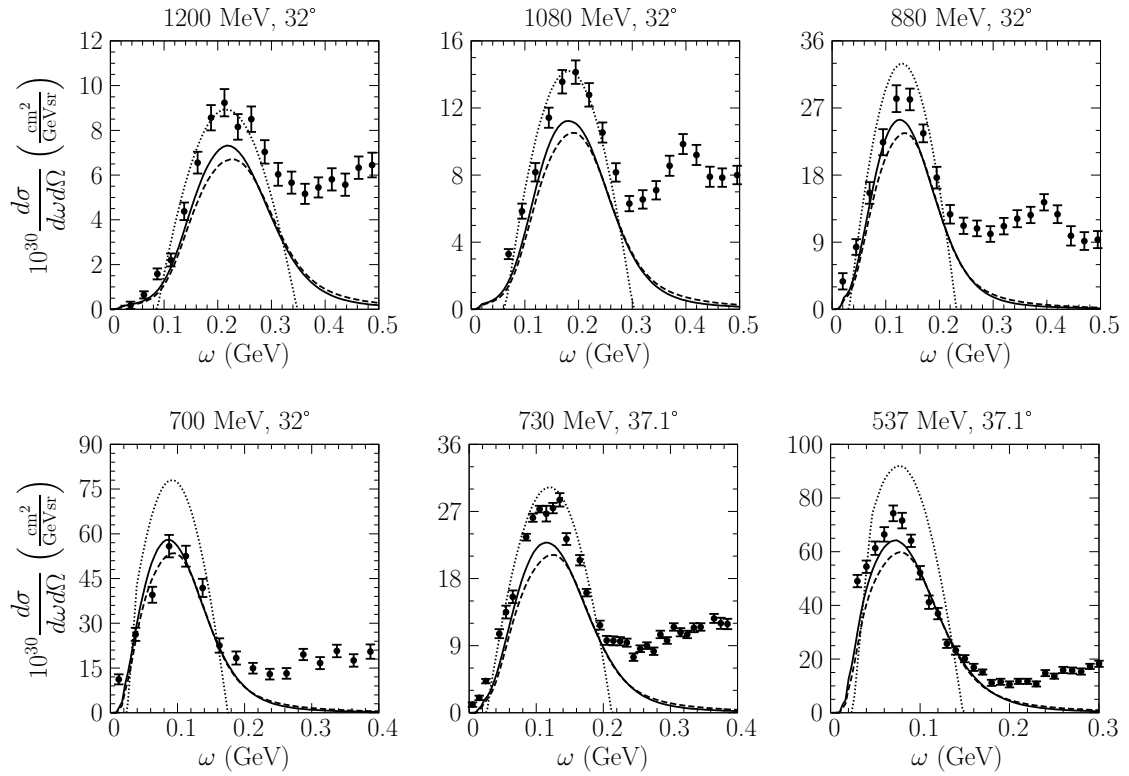
Rysunki 5.2–5.6 pokazują zestawienie wyników obliczeń teoretycznych z szerokim zakresem punktów doświadczalnych. Brakujący przekrój czynny dla przekazów energii większych od piku kwazielastycznego można przypisać oddziaływaniom dwunukleonowym, produkcji rezonansu  $\Delta$  oraz tłu nierezonansowemu. Podpisy pod rysunkami podają wartości przekazu pędu w piku policzone ze wzoru

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\omega^2 + 2E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}} - \omega)(1 - \cos \theta_e)}.$$

Wartości te w niewielkim stopniu zależą od  $\omega$  i dlatego stanowią dobrą charakterystykę analizowanych sytuacji.

### 5.2.1 Tlen

Prezentację wyników rozpoczniemy od jądra tlenu. Rysunek 5.2 przedstawia przewidywania trzech modeli i dane doświadczalne z prac [87, 88, 90]. Linia kropkowana odpowiada gazowi Fermiego (pęd Fermiego  $p_F = 225$  MeV, energia wiązania  $\bar{\epsilon}_B = 25$  MeV, bez FSI), linia ciągła pokazuje przekroje czynne dla GSF tlenu z efektem FSI wprowadzonymi jak w podrozdziale 4.3, a linia przerywana ilustruje wyniki dla funkcji spektralnej Benhara [21] z tymi samymi oddziaływaniami końcowymi.



Rys. 5.2: Przekroje czynne oddziaływania  $^{16}\text{O}(e, e')$  dla różnych energii wiązki rozpraszanej pod kątem  $32^\circ$  [87, 88] i  $37.1^\circ$  [90]. Wyniki dla gaussowskiej (linia ciągła) i funkcji spektralnej Benhara [21] z tymi samymi oddziaływaniami końcowymi (linia przerywana), zestawione z obliczeniami dla gazu Fermiego (linia kropkowana). Wartość przekazu pędu w pikie kwazielastycznym to 637 MeV (dla energii wiązki 1200 MeV), 573 MeV (dla 1080 MeV), 466 MeV (dla 880 MeV), 371 MeV (dla 700 MeV), 441 MeV (dla 730 MeV) oraz 325 MeV (dla 537 MeV).

Różnice między przekrojami czynnymi dla naszego modelu i funkcji spektralnej Benhara są wielkości porównywalnej z niepewnościami pomiarowymi. Jak pokazaliśmy w podrozdziale 5.4, główne źródło tych różnic to inne rozkłady pędów. Obie funkcje spektralne dość dobrze odtwarzają kształt i wysokość pików kwazielastycznego, jednak niedoszacowują przekrojów czynnych przy niskich przekazach energii. Wiąże się to zapewne z niezadowalającym opisem oddziaływań końcowych, które zwiększają przekroje właśnie w tym obszarze.

Najlepsza zgodność z danymi została osiągnięta dla wiązki o energii 880 MeV, zaś najgorsza odpowiada  $E_{\mathbf{k}} = 537$  MeV. Na szczęście ten drugi zestaw danych w najmniejszym stopniu odpowiada oddziaływaniom neutrin.

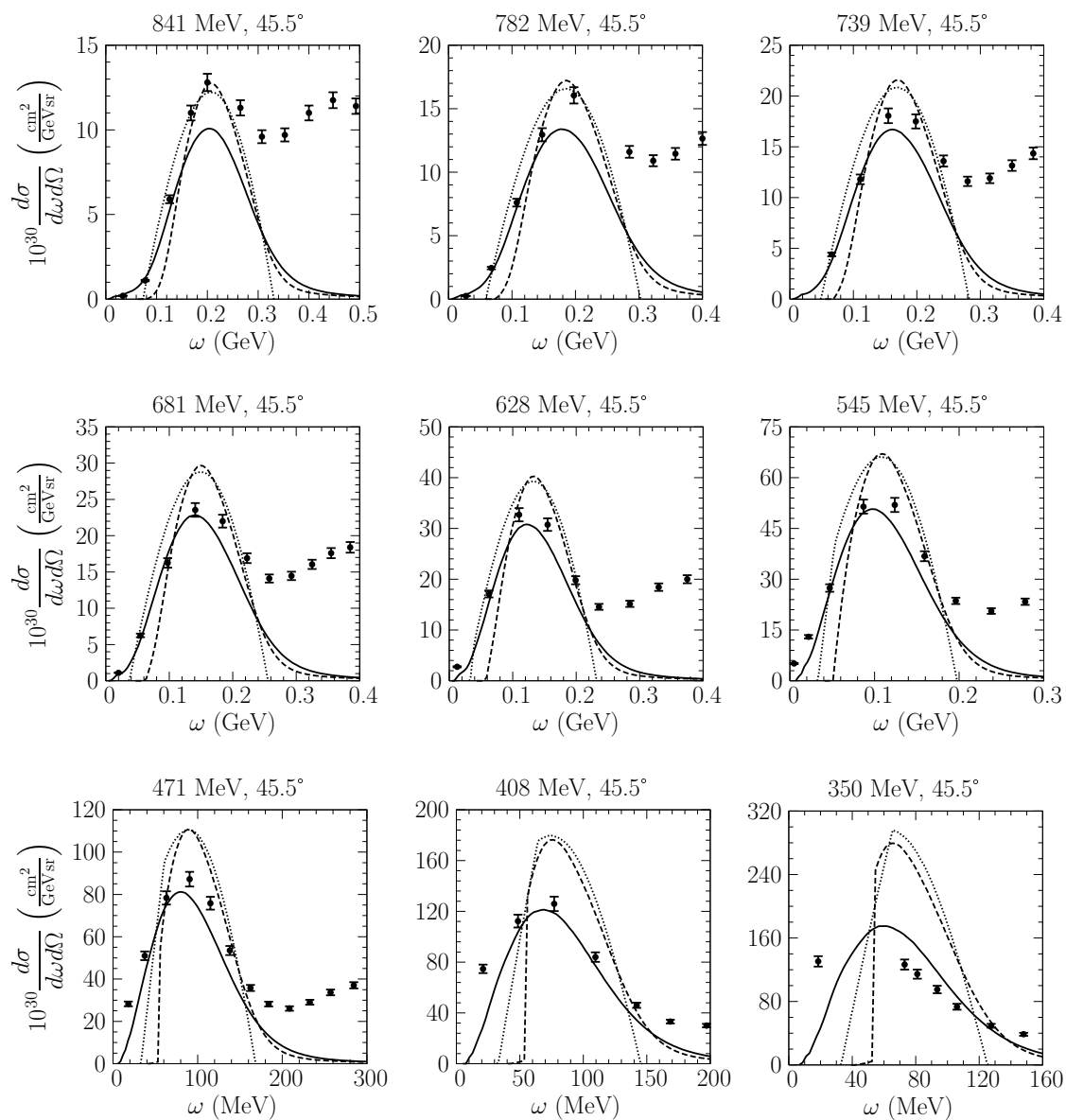
### 5.2.2 Wapń

Na rysunkach 5.3–5.5 porównujemy przekroje czynne dla wapnia otrzymane w obrębie modelu gazu Fermiego ( $p_F = 249$  MeV,  $\bar{\epsilon}_B = 33$  MeV [60]; pokazane linią kropkowaną), GFS (linia ciągła) oraz podejścia Butkevicha i Mikheyeva [101] (tzn. najprostszej funkcji spektralnej wapnia; linia przerywana) z danymi dla rozpraszania elektronów zebranych pod kątami 45.5–140° dla energii 160–841 MeV [93]. Tylko nasz model uwzględnia efekt oddziaływań końcowych.

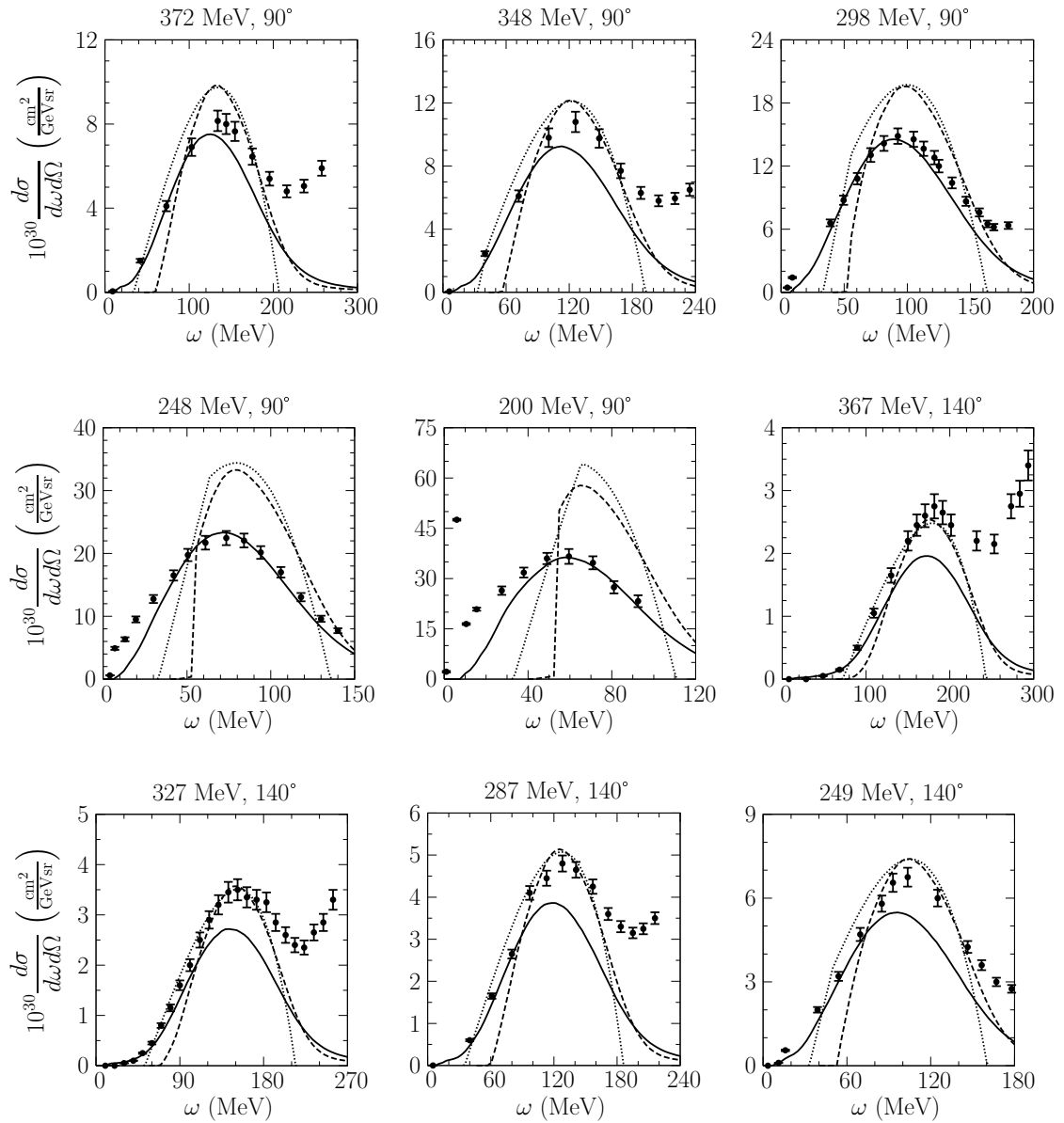
Gaz Fermiego bardzo dobrze opisuje pozycję i wysokość pików kwazielastycznego w przypadku rozpraszania elektronów pod kątem 45.5° przy energiach 841 i 782 MeV oraz pod kątem 140° przy energiach 367, 327 i 287 MeV. Im mniejsza energia dla ustalonego kąta rozpraszania, tym większa rozbieżność przewidywań gazu Fermiego z danymi doświadczalnymi.

Mimo że podejście Butkevicha i Mikheyeva [101] opiera się na funkcji spektralnej, przy wartościach przekazu pędu odpowiadających pikom kwazielastycznym i wyższych prowadzi do wyników bardzo podobnych do gazu Fermiego. Przyczyna takiego zachowania leży w uproszczonym opisie średniopolowej części ich funkcji spektralnej: rozkład energii jest ograniczony do jednej delty Diraca, porównaj (4.7).

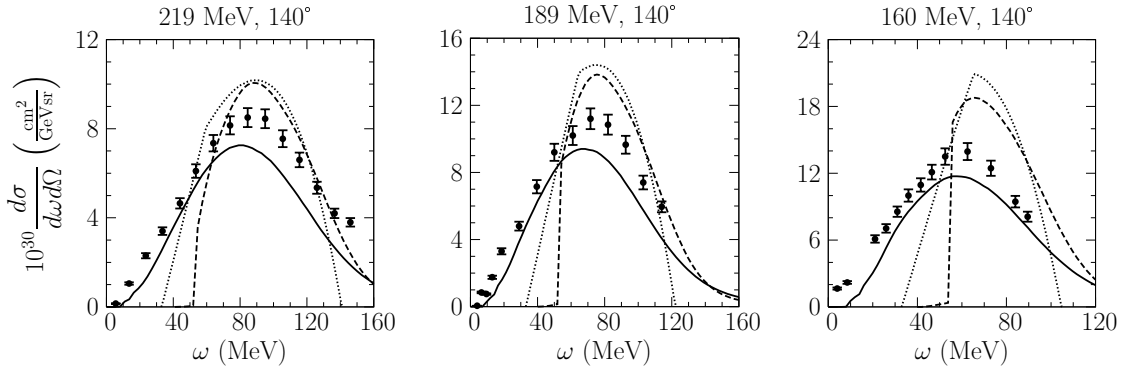
Dla kąta rozpraszania 45.5° przy energii wiązki 628–841 MeV (patrz rysunek 5.3), kąta 90° przy energii 348 i 372 MeV (rysunek 5.4) oraz kąta 140° przy energii 287–367 MeV (rysunek 5.4) obliczenia oparte na gaussowskiej funkcji spektralnej pozostają w zgodzie ze zmierzonymi przekrojami czynnymi. Rozbieżności przy większych przekazach energii można wytłumaczyć dodatkowymi wkładami do przekroju inkluzywnego od nierezonansowej produkcji pionów i wzbudzenia delty, zobacz poglądowy rysunek 1 w pracy [14]. Jednak w kilku przypadkach, m.in. dla energii 841 MeV, przy małych wartościach  $\omega$  przekrój jest nieco przeszacowany. Oznacza to zarazem, że pik kwazielastyczny musi być odrobinę niedoszacowany, bo w naszym podejściu oddziaływania końcowe (redystrybuujące przekrój czynny z pików do „ogonów”) nie zmieniają całkowitego przekroju czynnego [64]. Ten niedostatek modelu wiąże się z używaniem lorentzowskiej funkcji składającej, która



Rys. 5.3: Przekroje czynne na rozpraszanie  $^{40}\text{Ca}(e, e')$  pod kątem  $45.5^\circ$  dla różnych wartości energii wiązki elektronów [93]. Obliczenia dla GSF (linia ciągła) porównane z wynikami Butkevicha i Mikheyeva [101] (linia przerywana) oraz gazem Fermiego (linia kropkowana). Wartości  $|\mathbf{q}|$  odpowiadające pikowi to 602 MeV (dla energii wiązki 841 MeV), 561 MeV (dla 782 MeV), 531 MeV (dla 739 MeV), 490 MeV (dla 681 MeV), 453 MeV (dla 628 MeV), 395 MeV (dla 545 MeV), 342 MeV (dla 471 MeV), 297 MeV (dla 408 MeV) oraz 254 MeV (dla 350 MeV).



Rys. 5.4: Jak na rys. 5.3, ale dla kątów  $90^\circ$  i  $140^\circ$ . Wartości  $|\mathbf{q}|$  w pikie to 446 MeV (dla energii wiązki 372 MeV), 420 MeV (dla 348 MeV), 364 MeV (dla 298 MeV), 304 MeV (dla 248 MeV), 245 MeV (dla 200 MeV), 530 MeV (dla 367 MeV), 481 MeV (dla 327 MeV), 429 MeV (dla 287 MeV) oraz 379 MeV (dla 249 MeV).



Rys. 5.5: Jak na rysunku 5.3, ale dla kąta  $140^\circ$ . Przekaz pędu w pikie to  $337$  MeV (dla energii wiązki  $219$  MeV),  $293$  MeV (dla  $189$  MeV) oraz  $248$  MeV (dla  $160$  MeV).

prowadzi do za dużego wpływu oddziaływań końcowych.

Warto zauważyć, że dla wapnia zgodność z danymi w interesującym nas obszarze (patrz podrozdział 5.1) jest większa niż w przypadku tlenu. Można to przypisać sposobowi w jaki wprowadziliśmy FSI: Założyliśmy, że gęstość jądra jest stała i równa gęstości nasycenia materii jądrowej; to przybliżenie powinno lepiej się sprawdzać dla cięższych jąder. Używana w obliczeniach część rzeczywista potencjału optycznego została otrzymana dla wapnia, więc — siłą rzeczy — w większym stopniu odpowiada tej tarczy niż tlenowi.

Opisu wapnia poprzez GSF traci na precyzji, gdy energia wiązki obniża się do  $545$  MeV przy kącie rozpraszania  $45.5^\circ$ , do  $298$  MeV przy  $90^\circ$  i do  $249$  MeV przy  $140^\circ$ . Na tych wykresach można zauważyć, że dla niskich przekazów pędu punkty doświadczalne znajdują się (czasem tylko nieznacznie) ponad krzywą. Gdybyśmy posługiwali się bardziej wyrafinowaną — niż lorentzowska — funkcją składającą, to rozbieżności między modelem a danymi byłyby jeszcze wyraźniejsze, bo otrzymalibyśmy mniejszy przekrój czynny w „ogonach”. Podobne kłopoty dla tlenu pojawiły się przy energii  $700$  MeV i kącie  $32^\circ$ . Na pierwszy rzut oka tych czterech przypadków nic nie łączy. Gdy jednak przyjrzymy się bliżej wartościom przekazu pędu w pikie kwazielastycznym, odkrywamy, że omawiany model przestaje być adekwatny do danych, gdy  $|\mathbf{q}| \lesssim 400$  MeV. Przyczyna mogłaby leżeć po stronie upraszczających założeń naszego podejścia, traktowania oddziaływań końcowych, czy najbardziej podstawowego założenia: przybliżenia impulsowego. Modele [20, 34], oparte na innych założeniach — oprócz przybliżenia impulsowego — i z systematyczniejszym opisem wpływu oddziaływań końcowych, napotykają na podobne trudności. Dlatego rozbieżności między przewidywaniami GSF a danymi eksperymentalnymi przy przekazach pędu poniżej  $400$  MeV możemy złożyć na karb właśnie załamania się przybliżenia impulsowego. Graniczna wartość

400 MeV wydaje się realistyczna [35] i dość dobrze zgadza się z przesłankami z fizyki jądrowej [89].

Przy jeszcze mniejszych przekazach pędu nasz model nie opisuje prawidłowo ani pozycji, ani kształtu piku kwazielastycznego. Rozbieżności z punktami doświadczalnymi nie są jednak duże, dopóki  $|\mathbf{q}| \gtrsim 350$  MeV, a dopiero poniżej 300 MeV stają się znaczące. W żadnym przypadku nie są one aż tak dramatyczne jak dla gazu Fermiego czy podejścia z pracy [101]: przy energii 350 MeV te modele przeszacowują dane o około 120%, a GSF o 30%. Na kilku wykresach (szczególnie dla 200 MeV) widać pojawiające się wzbudzenia związanych stanów jądrowych i gigantyczne rezonanse jądrowe, które *nie mogą* być opisane przez żaden z rozpatrywanych tutaj modeli.

W podrozdziale 5.1 ustaliliśmy, że w przypadku wapnia obszarowi kinematycznemu istotnemu przy rozpraszaniu neutrin o energii 800 MeV najbliższe są dane zebrane dla elektronów przy największych energiach i kącie rozpraszania  $45.5^\circ$ . Właśnie z tymi pomiarami obliczone przekroje czynne zgadzają się najlepiej. Dlatego sądzimy, że opracowaliśmy dobry sposób na modelowanie efektów jądrowych dla neutrin.

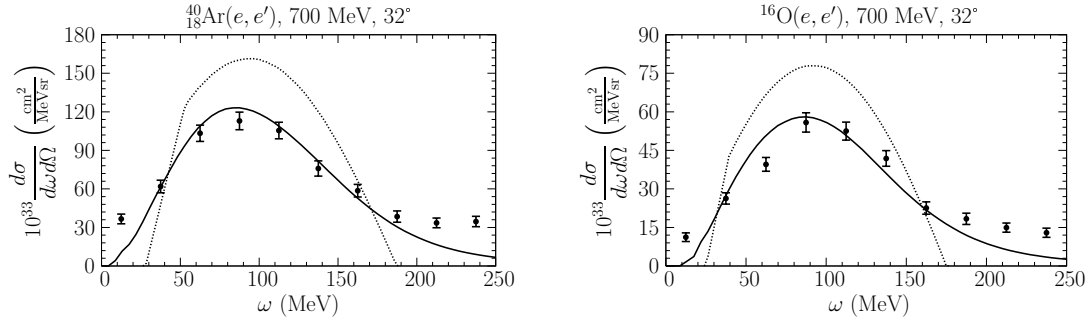
Podsumowując, udało się uzyskać opis jądra wapnia, który dobrze sprawdza się w szerokim zakresie energii, o ile przekaz pędu charakteryzujący pik kwazielastyczny jest odpowiednio duży. Oprócz tego ustaliliśmy, kiedy i w jakim stopniu przewidywania tego modelu przestają odtwarzać dane eksperymentalne. W obszarze kinematycznym, który odpowiada rozpraszaniu neutrin o energii 800 MeV, zgodność z punktami doświadczalnymi jest znakomita.

### 5.2.3 Argon

Przed zastosowaniem naszego modelu do oddziaływań neutrin przeprowadzimy ostatni test, porównując go z danymi dla rozpraszania elektronów na argonie. Znaleźliśmy tylko jeden taki eksperyment [88]; zmierzył on przekrój czynny wiązki o energii 700 MeV rozpraszanej pod kątem  $32^\circ$ .

Po lewej stronie rysunku 5.6 przedstawione są wyniki dla GSF argonu i gazu Fermiego ( $p_F = 251$  MeV i  $\bar{\epsilon}_B = 28$  MeV). Precyzja GSF jest wyraźnie większa, jednak przewidywania naszego modelu — reprezentowanego przez linię ciągłą — nie opisują właściwie przekroju czynnego przy małych przekazach energii. Podobne trudności napotkaliśmy już wcześniej, analizując wyniki dla tlenu i wapnia, i zinterpretowaliśmy je jako załamanie się przybliżenia impulsowego przy  $|\mathbf{q}| \lesssim 400$  MeV. W rozważanym przypadku rozpraszania na argonie przekaz pędu w piku kwazielastycznym wynosi 371 MeV. Gdy zestawimy wynik dla argonu z rezultatem dla tlenu przy identycznej kinematyce — patrz prawa strona rysunku 5.6 — zobaczymy, że ich stopień precyzji jest podobny. Taki sam wniosek daje porównanie z wykresem dla rozpraszania na wapniu przy energiach 249, 298, 471 i 545 MeV,





Rys. 5.6: Po lewej: Porównanie przekroju czynnego GSF (linia ciągła) i gazu Fermiego (linia kropkowana) z punktami doświadczalnymi dla procesu  $^{40}_{18}\text{Ar}(e, e')$  przy energii wiązki 700 MeV i kącie rozpraszania  $32^\circ$  [88]. Po prawej: To samo dla tlenu. Warto zauważyć, że w obu przypadkach osiągnięta jest podobna precyzja. Wartość przekazu pędu w pikach kwazielastycznych to 371 MeV.

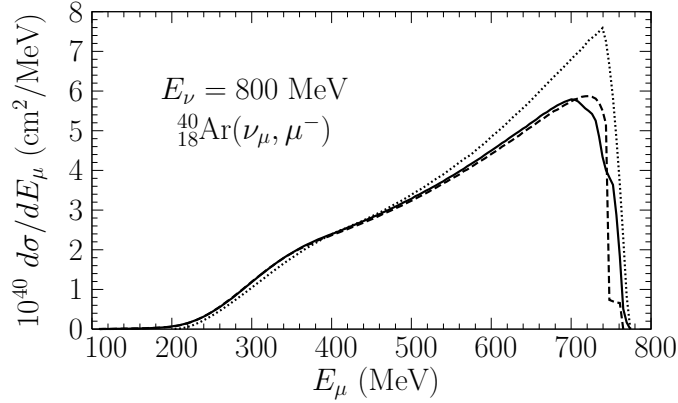
to znaczy przy zbliżonym  $|\mathbf{q}|$ . Dlatego oczekujemy, że gdyby typowy przekaz pędu w danych doświadczalnych dla argonu był wyższy, to osiągnęlibyśmy z nimi jeszcze lepszą zgodność.

Zaobserwowaliśmy, że *nawet dla argonu* neutronową funkcję spektralną można przybliżyć jej protonowym odpowiednikiem, o ile rozważa się rozpraszanie elektronów. Bierze się to z faktu, że wkład neutronów do inkluzywnego przekroju czynnego jest niewielki, co niweluje różnice między funkcjami spektralnymi. Ten wkład wynosi 13% dla elektronów o energii 700 MeV rozpraszanych o  $32^\circ$  i wzrasta do 23%, gdy energia wiązki to 1200 MeV.

### 5.3 Oddziaływania neutrin

Przy rozpraszaniu neutrin interesującymi wielkościami są całkowity przekrój czynny i różniczkowy przekrój względem  $Q^2 = -q^2$  lub przekazu energii (równoważnie: względem energii powstającego mionu).

Na rysunku 5.7 przedstawiamy różnice między  $d\sigma^{\text{weak}}/dE_\mu$  obliczonym dla GSF argonu (linia ciągła), najprostszej funkcji spektralnej [30] (linia przerywana) oraz modelu gazu Fermiego (linia kropkowana). Jak widać, obie funkcje spektralne wyraźnie zmniejszają przekrój czynny, głównie w obszarze niskich przekazów pędu. Linia pokazująca przewidywania modelu GSF jest nieco falista, bo gdy  $\omega$  rośnie, leżące niżej poziomy energetyczne zaczynają kolejno dawać wkład do przekroju czynnego. Nie ma żadnych nieróżniczkowalnych punktów w przekroju czynnym, więc — choćby w tym sensie — GSF jest bardziej realistyczna od funkcji spektralnej z pracy [30]. Oddziaływania końcowe, oprócz blokowania Pauliego, nie zostały uwzględnione, ale ich wpływ na przekrój czynny  $d\sigma^{\text{weak}}/dE_\mu$  jest raczej niewielki



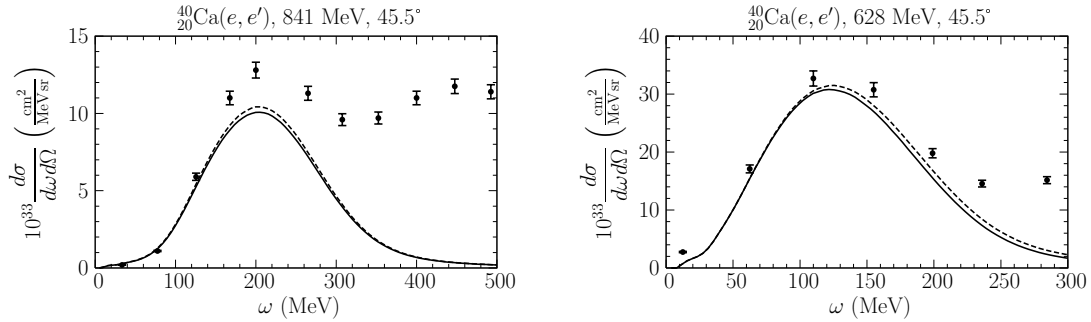
Rys. 5.7: Różniczkowy przekrój czynny  $d\sigma^{\text{weak}}/dE_\mu$  dla kwazielastycznego rozpraszania  $\nu_\mu$  na  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$  jako funkcja energii produkowanego mionu  $E_\mu$  dla GSF (linia ciągła), funkcji spektralnej z pracy [30] (linia przerywana) oraz modelu gazu Fermiego (linia kropkowana).

(zob. rysunek 14 w pracy [34] pokazujący jak FSI wpływają na  $d\sigma^{\text{weak}}/dQ^2$ ). Rysunek 5.7 ma na celu pokazanie rozbieżności między naszym opisem jądra argonu a modelem gazu Fermiego, często używanym w symulacjach Monte Carlo.

Wyników dla neutronów nie można bezpośrednio porównać z danymi eksperymentalnymi. Dlatego najpierw w podrozdziale 5.1 zidentyfikowaliśmy na płaszczyźnie  $(\omega, |\mathbf{q}|)$  obszar, który jest najistotniejszy dla rozpraszania neutronów o energii 800 MeV. Następnie pokazaliśmy precyzję naszego podejścia: uzasadniliśmy w podrozdziale 5.2, że dobrze opisuje ono efekty jądrowe od strony kinematyki. Ta analiza pozwala oczekiwać, iż używając przedstawionego przybliżenia funkcji spektralnej, opisujemy oddziaływania neutronów z dokładnością podobną do tej dla rozpraszania elektronów, gdy sprawdza się przybliżenie impulsowe. Musimy jednak pamiętać, że przy energii 800 MeV około 10–20% przekroju czynnego pochodzi od niskich przekazów pędu, co wprowadza istotne niepewności.

## 5.4 Niepewności modelu

Nasze podejście opiera się na wielu przybliżeniach, dlatego w tym podrozdziale chcielibyśmy się przekonać, jak wpływają one na otrzymane wyniki i jakimi niepewnościami obarczone są przekroje czynne przedstawione w podrozdziałach 5.2 i 5.3.



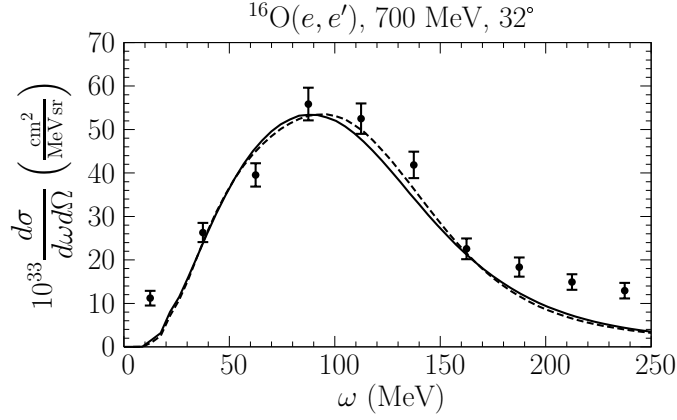
Rys. 5.8: Po lewej: Zależność przekroju czynnego od czynników postaci. Parametryzacja dipolowa (linia przerywana) daje wyniki o  $\sim 3\%$  wyższe niż BBBA05 [48]. Po prawej: Wpływ procedury przywracającej zachowanie prądu (2.15) na przekrój czynny. Wynik otrzymany bez niej reprezentuje linia przerywana.

#### 5.4.1 Uwagi ogólne

**Czynniki postaci.** Wybór różnych parametryzacji elektromagnetycznych czynników postaci może zmienić wyniki o kilka procent. Jak pokazujemy po lewej stronie rysunku 5.8, parametryzacja dipolowa daje wyższe przekroje czynne niż BBBA05 [48], używana w tej pracy doktorskiej. Rozbieżności w pikie kwazielaścycznym wahają się od 3.2% (dla wiązki o energii 350 MeV rozpraszanej pod kątem  $45.5^\circ$ ) do 4.9% (dla energii 372 MeV i kąta  $90^\circ$ ).

**Zachowanie prądu.** Modelując zarówno oddziaływania elektronów, jak i neutronów stosowaliśmy przepis de Foresta do opisu kinematyki poza powłoką masy. Prowadzi to jednak do niezachowania prądu elektromagnetycznego w rozpraszaniu elektronów i prądu wektorowego w oddziaływaniach neutronów. Procedura (2.15), za pomocą której przywracamy zachowanie prądu w przypadku elektronów, modyfikuje przekrój czynny głównie przy przekazach pędu powyżej pików kwazielaścycznych, zob. prawa strona rysunku 5.8. Dla energii wiązki 628 MeV ten efekt jest dość niewielki, bo przekrój w pikcie zmienia się o 1.5%, a ze wzrostem energii jego wpływ dalej maleje.

**Uproszczenia modelu.** Wyprowadzając równanie (4.5), zrobiliśmy dwa upraszczające założenia: szerokości poziomów nie zależą od pędu, a każdy poziom daje taki sam wkład do rozkładu pędów [równanie (4.4)]. Rysunek 5.9 ilustruje jaki wpływ na wyniki mają te uproszczenia. Żeby zobrazować wpływ przybliżeń, użyliśmy rozkładu pędów obliczonego z funkcji spektralnej Benhara zamiast tego z pracy [55]. Ponieważ szerokości poziomów energetycznych tlenu są dopasowane do rozkładu energii w funkcji Benhara, nieco inny kształt przewidywanego pikku kwazielaścycznego jest wynikiem *wyłącznie* upraszczających założeń. Sprawdzili-



Rys. 5.9: Niedokładność naszego modelu wynikająca ze sposobu traktowania części MF funkcji spektralnej. Obliczenia dla funkcji spektralnej Benhara (linia przerywana) zestawiamy z wynikami dla GSF z tym samym rozkładem pędów.

śmy, że dla innych energii wiązki rozbieżności nie są większe. Stwierdzamy zatem, że gaussowską funkcję spektralną można uznać za dość dobre przybliżenie bardziej systematycznego podejścia.

**Parametryzacja rozkładów pędów.** Użycie w naszym modelu rozkładów pędów z pracy [55], wymagało podzielenia każdego z nich na część MF i korelacyjną i wiązało się z wprowadzeniem kilku parametrów. Żeby przekonać się, w jakim stopniu wybór tych parametrów wpływa na przekroje czynne, zaczęliśmy od obliczenia dla tlenu rozkładu  $n_t^{\text{corr}}$  unormowanego zgodnie z tabelą 4.1, ale z  $e_1 = 1.770$  (zamiast 1.400):

$$n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}) = \frac{1.02}{(2\pi)^3} \frac{16}{8} \left[ 2.670 \exp(-1.770 \mathbf{p}^2) + 0.2128 \exp(-0.303 \mathbf{p}^2) \right]$$

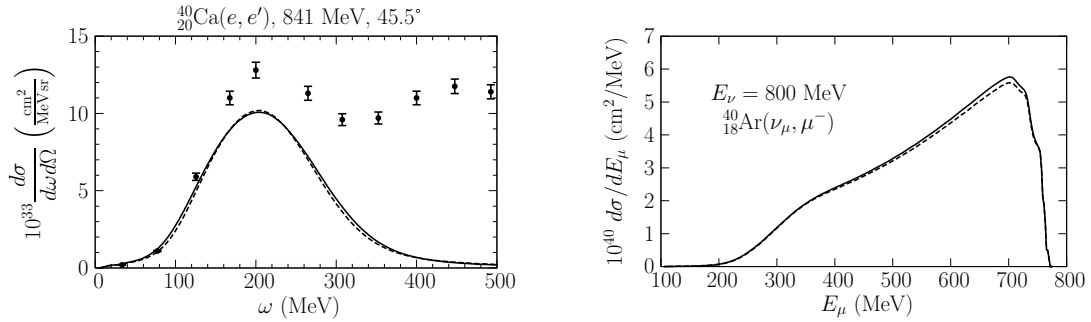
dla  $0 \leq |\mathbf{p}| \leq 2.025 \text{ fm}^{-1}$ . Zastosowanie tego rozkładu zmienia przekroje o mniej niż 0.1% w rozważanym zakresie energii. Nie musimy zatem przywiązywać zbyt dużej uwagi do parametru  $e_1$ , o ile tylko trzymamy się tej samej normalizacji.

Następnie znaleźliśmy rozkład z  $e_1 = 1.400$ , ale z normalizacją 16.2% (zamiast 12.0%):

$$n_t^{\text{corr}}(\mathbf{p}) = \frac{1.02}{(2\pi)^3} \frac{16}{8} \left[ 3.9228 \exp(-1.400 \mathbf{p}^2) + 0.0736 \exp(-0.091 \mathbf{p}^2) \right]$$

w przedziale  $0 \leq |\mathbf{p}| \leq 2.025 \text{ fm}^{-1}$ . Powyższy rozkład pędów prowadzi do przekrojów zmienionych o co najwyżej 2.2%.

Przeanalizowaliśmy kilka takich modyfikacji i okazało się, iż za każdym razem wpływ normalizacji był większy niż samej wartości  $e_1$ . Jest tak, ponieważ zmiana



Rys. 5.10: Po lewej: Niepewności przekroju związane z używanym rozkładem pędów. Linia ciągła pokazuje wynik dla rozkładu z pracy [55] (używanego w tej rozprawie), a linia przerywana — z publikacji [80]. Po prawej: To samo dla rozpraszania  $\nu_\mu$  na argonie.

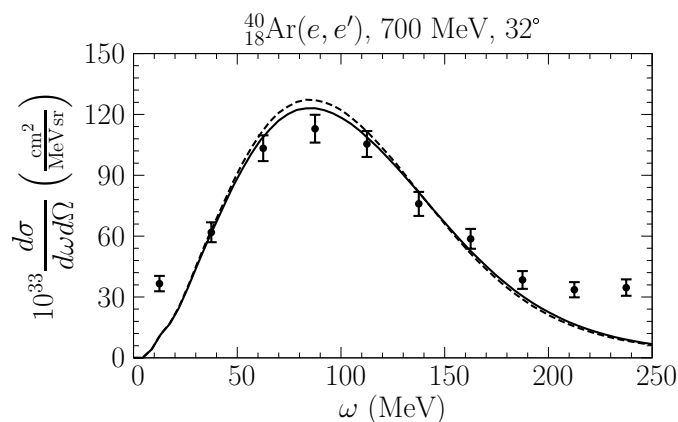
parametru  $e_1$  tylko redystrybuuje prawdopodobieństwo w obrębie danej części rozkładu pędów [i w konsekwencji modyfikuje parametr  $\alpha$  w równaniu (4.8)], zaś modyfikacja normalizacji zmienia sposób, w jaki pewna część prawdopodobieństwa jest traktowana w modelu.

**Rozkłady pędów.** Dla tlenu i wapnia rozkłady pędów w analitycznej postaci można znaleźć w pracy [80]. Choć, jak pokazujemy na rysunku 5.10, przewidują one nieco wyższy pik kwazielastyczny, to jednak całkowity przekrój czynny jest niższy. Ponieważ rozkłady pędów dla wapnia stosujemy do argonu, jego opis „dziedziczny” te same niepewności, zobacz prawa strona rysunku 5.10. W tej rozprawie doktorskiej polegamy na rozkładach z artykułu [55], bo zostały one otrzymane jako wynik bardziej systematycznych obliczeń.

### 5.4.2 Argon

Oprócz przeanalizowanych już źródeł niepewności, opisanie jądra argonu utrudnia brak dostępnych informacji o rozkładzie pędów i poziomach energetycznych. Przybliżamy te dane korzystając z wiedzy o  $^{40}\text{Ca}$ , dlatego kilka dodatkowych słów komentarza chcemy poświęcić precyzji osiągniętej w przypadku argonu.

**Rozkłady pędów.** Dodatkowe neutrony modyfikują zarówno rozkład pędów neutronów, jak i protonów. Z podobną sytuacją mamy do czynienia dla wapnia  $^{48}\text{Ca}$ , którego rozkłady pędów są dostępne [55]. Użyliśmy ich, by oszacować, jak te modyfikacje mogą wpływać na przekroje czynne dla rozpraszania elektronów na argonie, zobacz rysunek 5.11. Przekrój na protonach wzrósł o 4%, a na neutronach obniżył się o 3.8%. Wzrost całkowitego przekroju wyniósł 2.9%. Liczba dodatkowych neutronów w  $^{40}\text{Ar}$  jest mniejsza niż w  $^{48}\text{Ca}$ , dlatego oczekujemy, że dla



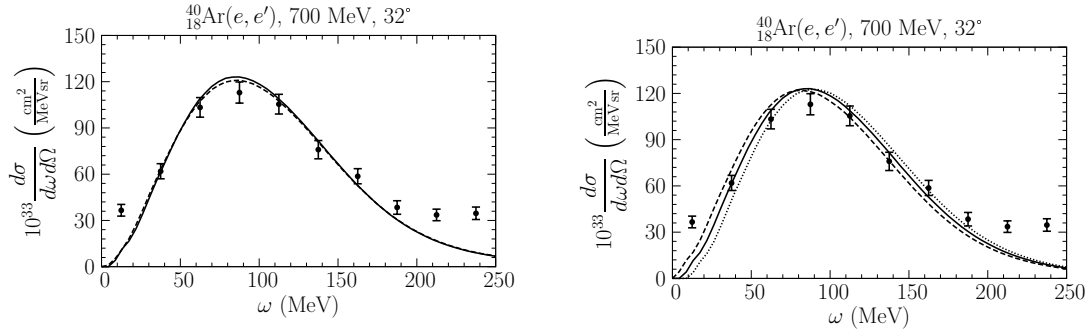
Rys. 5.11: Oszacowanie niepewności ze względu na nieznaną rozkład pędów argonu. Przekrój obliczony dla funkcji spektralnej argonu z rozkładem pędów  $^{40}\text{Ca}$  (linia ciągła) i z rozkładem pędów  $^{48}\text{Ca}$  (linia przerywana).

argonu ich wpływ na wyniki również będzie mniejszy niż dla omówionego izotopu wapnia.

**Szerokości poziomów.** Ze względu na brak jakichkolwiek informacji o szerokościach poziomów energetycznych argonu, używamy danych dla wapnia. Lewa strona rysunku 5.12 pokazuje, że wartości  $D_\alpha$  trzy razy większe niż podane w tabeli 4.2 zmieniają przekroje czynne co najwyżej o 2% (obniżenie piku). Z kolei węższe poziomy owocują ledwie widoczną różnicą: 0.23% dla szerokości podzielonych przez 3, a 0.53% dla szerokości 100 razy mniejszych (podwyższenie piku). W przypadku przekroju  $d\sigma^{\text{weak}}/dE_\mu$ , tym mniej falisty jest jego wykres, im bardziej poziomy się przekrywają.

**Poziomy energetyczne.** Rzeczywiste wartości poziomów energetycznych argonu zapewne nieco różnią się od tych, których używamy, zobacz tabela 4.2. Możemy oczekiwać, że rozbieżności między nimi są rozmieszczone losowo, także co do znaku, więc ich wpływy na przekroje czynne wzajemnie się osłabiają. Prawa strona rysunku 5.12 obrazuje, że nawet jeśli każdy poziom jest przesunięty o tę samą wartość, przyjętą jako 5 MeV, przekrój czynny nie zmienia się znacząco — jedynie pik kwazielastyczny nieznacznie się przesuwa.

Podsumowując, sposobem na zwiększenie dokładności przedstawionej funkcji spektralnej argonu jest zastosowanie prawdziwych wartości poziomów energetycznych; stopień ich rozmycia ma niewielki wpływ na przekroje czynne, zwłaszcza w przypadku elektronów.



Rys. 5.12: Po lewej: Wpływ szerokości poziomów energetycznych na przekrój. Linia ciągła pokazuje wynik obliczeń z wartościami jak w tabeli 4.2, linia przerywana — z wartościami pomnożonymi przez 3. Po prawej: Porównanie przekrojów otrzymanych przy poziomach energetycznych z tabeli 4.2 (linia ciągła), poziomach przesuniętych o +5 MeV (linia kropkowana) i o −5 MeV (linia przerywana).

### 5.4.3 Oddziaływania końcowe

**Potencjał rzeczywisty.** Żeby przekonać się, czy można przybliżyć potencjał rzeczywisty stałą wartością, przyjęliśmy ją równą 10 MeV. W przypadku tlenu zgodność z przekrojami doświadczalnymi nieco wzrosła, jednak ta sama wartość zastosowana do wapnia zmniejszyła dopasowanie modelu do danych. Może to sugerować, że potencjał rzeczywisty tlenu jest głębszy niż potencjał pokazany na rysunku 4.1.

**Potencjał urojony.** Stosowanie urojonej części potencjału  $U(\mathbf{p}')$  zdefiniowanego w równaniu (4.14) zamiast przybliżenia (4.13) ma niewielki wpływ na otrzymywane przekroje czynne. Typowa zmiana to  $\sim 1$ -procentowy wzrost. Stąd w praktycznych zastosowaniach te dwa podejścia są równoważne.

**Przekrój czynny.** Przy obliczaniu potencjału urojonego (4.13), przyjęliśmy stałą wartość przekroju nukleon-nukleon, która odpowiada energii kinetycznej 200 MeV. Ogólnie biorąc, powinno się uwzględnić zależność przekroju czynnego od energii. Aby sprawdzić zasadność naszego przybliżenia, zastosowaliśmy dokładny przekrój nukleon-nukleon [74] w zakresie energii 100–300 MeV, najistotniejszym dla omawianego obszaru kinematycznego. Dla wiązki o energii 545 MeV rozpraszanej pod kątem  $45.5^\circ$  na wapniu wynik zmniejszył się o 1.1% w pikie. Gdy rozpatruje się wyższą energię, różnice są jeszcze mniejsze.

**Gęstość jądra.** Założyliśmy, że gęstość opisywanych jąder jest równa gęstości wysycenia, choć zapewne w ten sposób przeszacowujemy ich średnie gęstości. Wiel-

kości dla nas istotnej nie stanowi jednak sama gęstość, lecz raczej  $\rho_{\text{nucl}}\sigma_{NN}$ . Gdy zmniejszymy  $\rho_{\text{nucl}}$  do  $0.14 \text{ fm}^{-3}$  ( $0.12 \text{ fm}^{-3}$ ), to znaczy o 12.5% (25%), ten iloczyn zmniejsza się o 7% (15.4%). Ponieważ wiążący się z tą zmianą wzrost przekroju czynnego to tylko 1% (2.4%) w pikie, nasze podejście wydaje się dość dobrze uzasadnione.

**Funkcja składająca.** Korzystanie z lorentzowskiej funkcji składającej, to znaczy zaniedbanie wpływu korelacji między składnikami jądra na ich rozkład, jest grubym przybliżeniem [14, 19, 63]. Korelacje sprawiają, że nukleony oddziela odległość  $\sim 1 \text{ fm}$ , dlatego przez pewien czas po oddziaływaniu z elektronem wybijany nukleon porusza się swobodnie i nie ulega rozpraszaniu. Porównanie otrzymanych przez nas przekrojów czynnych z wynikami przedstawionymi w pracy [34] sugeruje, że używanie dokładnie obliczonej funkcji składającej może prowadzić do przekrojów większych w pikie nawet o  $\sim 15\%$  i z niższymi „ogonami”. Precyzyjne wyznaczenie różnic utrudnia jednak inna parametryzacja czynników postaci i to, że nasze obliczenia zawierają jedynie oddziaływanie kwazielastyczne.



## Rozdział 6

# Opis efektywny

W symulacjach Monte Carlo często stosowanym opisem jądra jest model gazu Fermiego. Jak przedstawiliśmy w rozdziale 5, wyniki otrzymane w ten sposób mogą się wyraźnie różnić od danych doświadczalnych i przewidywań (nawet przybliżonej) funkcji spektralnej. Argumentem, która przemawia na korzyść modelu gazu Fermiego, jest szybkość obliczeń numerycznych. Bierze się ona głównie z faktu, że do scharakteryzowania nukleonów w gazie Fermiego wystarczy ich pęd, natomiast funkcja spektralna opisuje cząstki przez podanie pędu i energii usunięcia — zatem przy obliczaniu przekroju czynnego należy przeprowadzić całkowanie w dodatkowym wymiarze. W tym rozdziale opiszemy model [30], który dla neutrin daje rezultaty zbliżone do funkcji spektralnej, zaś jego implementacja sprowadza się do niewielkiej modyfikacji programu dla gazu Fermiego. Przy oddziaływaniach elektronów mierzone przekroje czynne są dużo bardziej szczegółowe (np. przekrój przy ustalonym kącie rozpraszania jako funkcja energii), obnażając wszelkie uproszczenia stosowanego podejścia. Z tej przyczyny opis jądra, który tutaj przedstawimy, nie sprawdza się równie dobrze dla elektronów.

### 6.1 Wprowadzenie modelu

W rozważaniach dotyczących funkcji spektralnej posługiwaliśmy się bilansem energii zapisanym w postaci

$$\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}, E} + E_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{p}'},$$

gdzie  $\varepsilon_{\mathbf{p}, E} = E_{\mathbf{p}} - M + E$ . Gdy traktujemy jądro jako gaz Fermiego, czyli układ nieoddziałujących nukleonów zamkniętych w pudle o stałym potencjale, zasada zachowania energii sprowadza się do

$$\omega - \bar{\varepsilon}_B + E_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{p}'},$$

ze stałą wartością  $\bar{\varepsilon}_B$ . W rozdziale 5 widzieliśmy, że jest to zbyt daleko idące uproszczenie, dlatego zrobimy krok mniej: zastąpimy  $\varepsilon_{\mathbf{p}, E}$  przez jej średnią po energii usunięcia, obliczoną z funkcji spektralnej:

$$\varepsilon_B(\mathbf{p}) \equiv \frac{\int dE (E_{\mathbf{p}} - M + E) P(\mathbf{p}, E)}{\int dE P(\mathbf{p}, E)}.$$

Dla przejrzystości zapisu opuściliśmy izospinowy wskaźnik przy funkcji spektralnej i energii wiązania, poniżej nie napiszemy go też przy rozkładzie pędów. Trzeba jednak pamiętać, że *a priori* wielkości te dla protonów i neutronów są różne. Wyrażenie w mianowniku to po prostu rozkład pędów,

$$n(\mathbf{p}) = \int dE P(\mathbf{p}, E),$$

dlatego *efektywną energię wiązania* możemy prościej zapisać jako

$$\epsilon_B(\mathbf{p}) = \frac{1}{n(\mathbf{p})} \int dE (E_{\mathbf{p}} - M + E) P(\mathbf{p}, E). \quad (6.1)$$

Model, który będziemy nazywali *opisem efektywnym*, definiujemy następująco: do scharakteryzowania danego jądra trzeba podać rozkład pędów nukleonów i zależność energii wiązania od pędu. Obie te funkcje możemy otrzymać z odpowiedniej funkcji spektralnej. Gdy bierzemy pod uwagę złożoność implementacji w programie Monte Carlo, takie podejście nie różni się w sposób istotny od gazu Fermiego.

Zastępując w równaniu (2.26), wyrażającym kwazielastyczny przekrój dla gazu Fermiego, funkcję schodkową Heaviside'a przez realistyczny rozkład pędów,

$$\frac{3}{4\pi p_F^3} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \rightarrow \frac{1}{\int d^3p n(\mathbf{p})} n(\mathbf{p}),$$

stałą pęd Fermiego przez średnią po profilu gęstości,

$$p_F \rightarrow \bar{p}_F,$$

a stałą energię wiązania  $\bar{\epsilon}_B$  przez funkcję zależną od pędu,

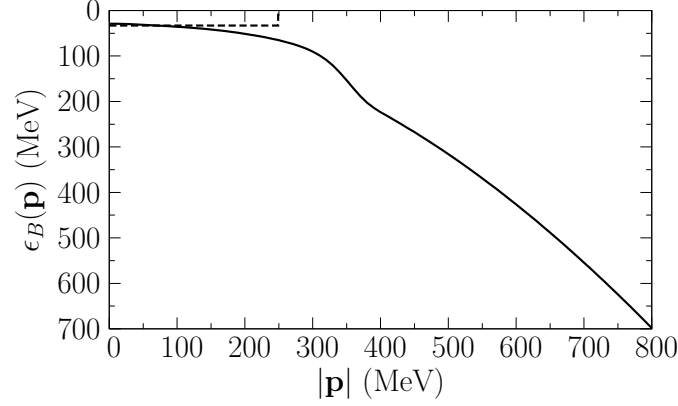
$$\bar{\epsilon}_B \rightarrow \epsilon_B(\mathbf{p}),$$

otrzymamy przekrój czynny w obrębie opisu efektywnego:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{eff}}^{\text{weak}}}{dE_\mu} &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi E_\nu^2} \frac{N}{\int d^3p n(\mathbf{p})} \int d|\mathbf{q}| d^3p n(\mathbf{p}) \delta(\omega + E_{\mathbf{p}} - \epsilon_B(\mathbf{p}) - E_{\mathbf{p}'}) \\ &\quad \times \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \frac{|\mathbf{q}|}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak, eff}}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Występujące powyżej zwężenie  $L_{\mu\nu} \widetilde{H}_{\text{eff}}^{\mu\nu}$  różni się od  $L_{\mu\nu} \widetilde{H}_{\text{FG, weak}}^{\mu\nu}$  z równania (2.26) jedynie tym, że  $\tilde{q} = (\tilde{\omega}, \mathbf{q})$  z  $\tilde{\omega} = \omega - \epsilon_B(\mathbf{p})$ , a nie  $\tilde{\omega} = \omega - \bar{\epsilon}_B$ . Rozkład pędów unormowaliśmy do liczby neutronów  $N$  [równanie (2.24)], dlatego ostatecznie

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{eff}}^{\text{weak}}}{dE_\mu} &= \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi E_\nu^2} \int d|\mathbf{q}| d^3p n(\mathbf{p}) \delta(\omega + E_{\mathbf{p}} - \epsilon_B(\mathbf{p}) - E_{\mathbf{p}'}) \\ &\quad \times \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \frac{|\mathbf{q}|}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'}} L_{\mu\nu}^{\text{weak}} \widetilde{H}_{\text{weak, eff}}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.2)$$



Rys. 6.1: Zależność energii wiązania od pędu obliczona z GSF wapnia (linia ciągła) zestawiona z wartością  $\bar{\epsilon}_B$  dla gazu Fermiego.

Równoważnie można stwierdzić, że opisowi efektywnemu odpowiada funkcja spektralna

$$P_{t, \text{eff}}(\mathbf{p}, E) = n_t(\mathbf{p}) \delta(E_{\mathbf{p}} - \epsilon_B(\mathbf{p}) - M + E) \quad (6.3)$$

i zastosować ją do odpowiednich wzorów na przekroje czynne. Na przykład dla elektronów rozpraszanych pod ustalonym kątem z równania (4.18) dostaniemy

$$\frac{d\sigma_{\text{eff}}}{d\omega d\cos\theta} = 2\pi\alpha^2 \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{\mathbf{k}}q^4} \int d^3p \frac{n(\mathbf{p})}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}} \delta(\omega + E_{\mathbf{p}} - \epsilon_B(\mathbf{p}) - E_{\mathbf{p}'}) \times \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em, eff}}^{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

a po uwzględnieniu oddziaływań końcowych

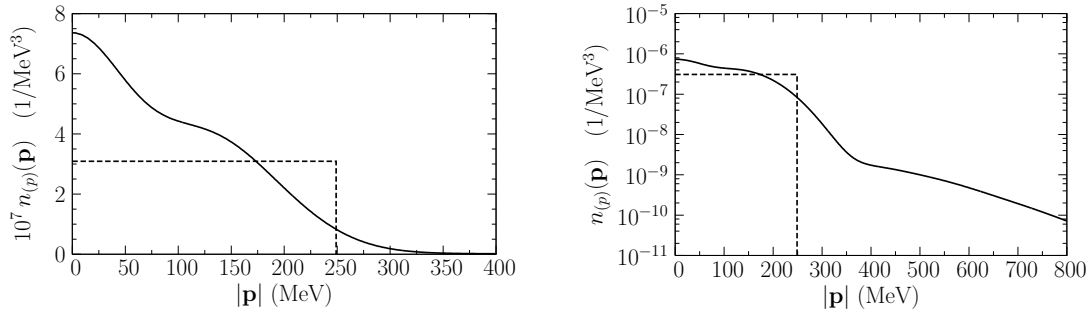
$$\frac{d\sigma_{\text{eff}}}{d\omega d\cos\theta} = 2\pi\alpha^2 \frac{|\mathbf{k}'|}{E_{\mathbf{k}}q^4} \int d^3p \frac{n(\mathbf{p})}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}} \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - \bar{p}_F) \times f_{\mathbf{p}'}(\omega + E_{\mathbf{p}} - \epsilon_B(\mathbf{p}) - E_{\mathbf{p}'} - V) L_{\mu\nu}^{\text{em}} \widetilde{H}_{\text{em, eff}}^{\mu\nu}, \quad (6.5)$$

porównaj przekrój (4.23). Tak samo jak wcześniej przy rozważaniu neutrin, w powyższych wzorach dla prostoty zapisu opuściliśmy wskaźniki izospinowe.

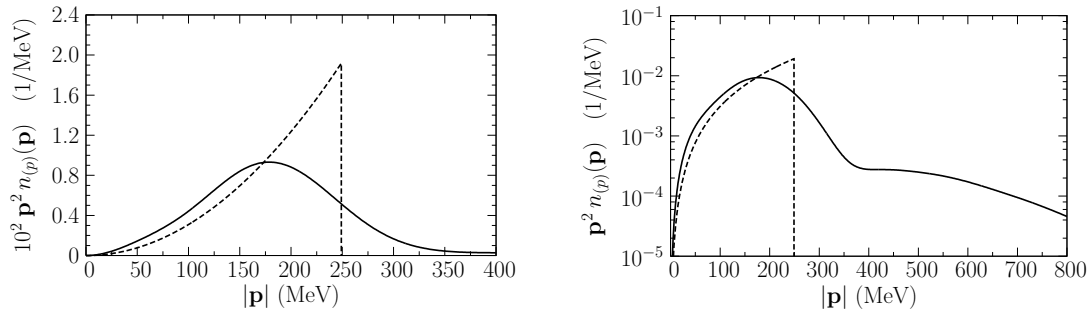
Licząc granice całkowania dla funkcji spektralnej, uwzględnialiśmy warunek (4.21). Jego odpowiednik dla opisu efektywnego ma postać

$$\epsilon_B(\mathbf{p}) \leq \omega. \quad (6.6)$$

W artykule [30] na rysunku 9 przedstawiliśmy zależność energii wiązania od pędu w jądrze tlenu, uzyskaną z funkcji spektralnej [21]. Tutaj na rysunku 6.1 dla odmiany pokazujemy  $\epsilon_B(\mathbf{p})$  dla protonów w jądrze wapnia, obliczoną na podstawie



Rys. 6.2: Porównanie rozkładu pędów protonów w jądrze wapnia  $^{40}_{20}\text{Ca}$  otrzymanego w realistycznych obliczeniach [55] (linia ciągła) i stosowanego w gazie Fermiego. Po lewej: W skali liniowej. Po prawej: W skali logarytmicznej.

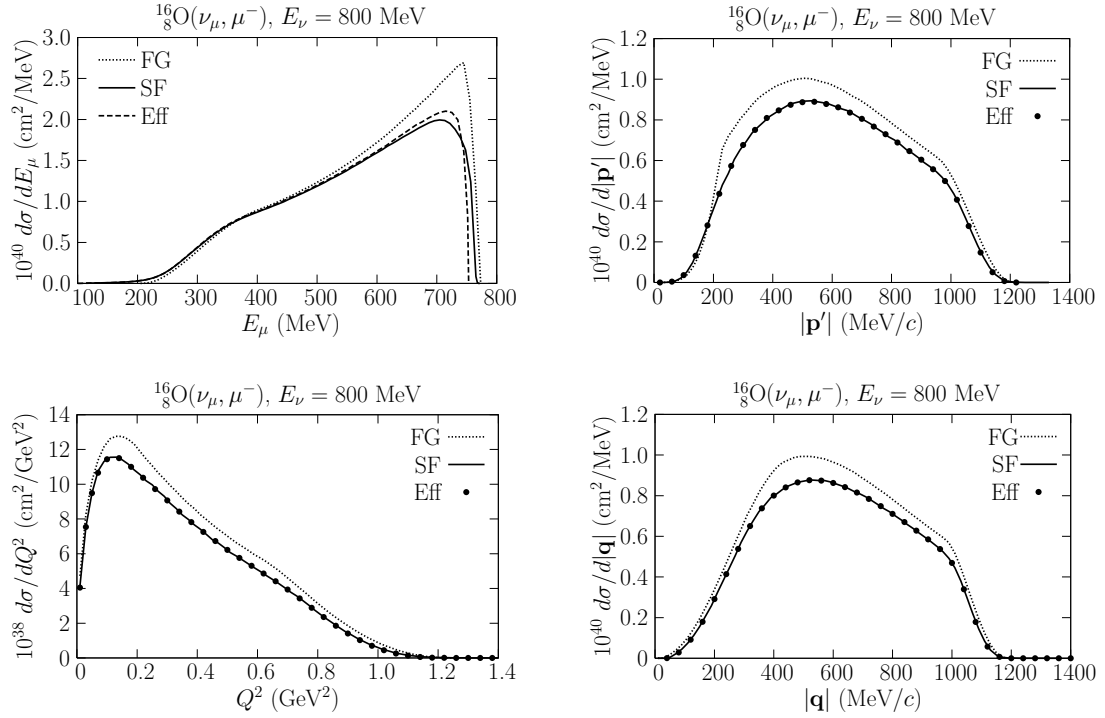


Rys. 6.3: Jak na rysunku 6.2, ale dla rozkładu pomnożonego przez  $\mathbf{p}^2$ .

jego gaussowskiej funkcji spektralnej. Dopóki pęd protonu jest niewielki, wartość  $\epsilon_B(\mathbf{p})$  nie różni się znacząco od  $\bar{\epsilon}_B$ : gdy  $|\mathbf{p}| < 120$  MeV, różnica jest mniejsza niż 4 MeV. Powyżej  $\sim 300$  MeV energia wiązania rośnie szybko, a przy około 370 MeV zmienia się jak  $\mathbf{p}^2$ . Bierze się to z faktu, że wtedy za zachowanie się  $\epsilon_B(\mathbf{p})$  odpowiada już tylko część korelacyjna funkcji spektralnej, której maksimum przypada na  $E \approx \mathbf{p}^2/(2M)$ .

Rysunki 6.2 i 6.3 prezentują porównanie rozkładu pędów w modelu gazu Fermiego z wynikiem dokładnych obliczeń [55]. Do około 200 MeV różnice między nimi są tłumione przez czynnik geometryczny  $\mathbf{p}^2$ . Dla większych pędów widać wyraźnie, że korelacje między nukleonami odpowiadają za zmniejszenie obsadzenia stanów poniżej pędu Fermiego i pojawienie się wysokopędowego „ogona” rozkładu.

W następnym podrozdziale przedyskutujemy, jak uwzględnienie realistycznego rozkładu pędów i zależności energii wiązania od pędu wpływa na otrzymywane przekroje czynne.



Rys. 6.4: Zestawienie przewidywań modelu gazu Fermiego (linia kropkowana), funkcji spektralnej [21] (linia ciągła) i opisu efektywnego (linia przerywana lub punkty) dla kwazielastycznego rozpraszania neutrin. Wykresy pokazują przekroje względem energii powstającego mionu (na górze po lewej), końcowego pędu protonu (na górze po prawej), zmiennej  $Q^2$  (na dole po lewej) oraz przekazu pędu (na dole po prawej).

## 6.2 Wyniki

Zacniemy od rozważania kwazielastycznego rozpraszania neutrin na jądrze tlenu. Dla ustalenia uwagi przedstawione przekroje dotyczą energii neutrina 800 MeV. Tylko na wykresie przekroju czynnego względem końcowego pędu protonu nie uwzględniliśmy wpływu blokowania Pauliego. Okazuje się, zobacz rysunek 6.4, że stosunkowo prosty model dość wiernie odtwarza różniczkowe przekroje czynne otrzymane przy użyciu funkcji spektralnej.

W górnej części rysunku 6.4 po lewej stronie widzimy przekrój względem energii powstającego mionu. Wykres dla opisu efektywnego wyraźnie różni się od tego dla gazu Fermiego: pozostaje mniejszy dla energii mionu powyżej 500 MeV, co widać szczególnie dla  $E_\mu$  około 730 MeV. W naszym modelu dla ustalonej wartości pędu energia wiązania ma ściśle określoną (średnią) wartość, dlatego progowy przekaz

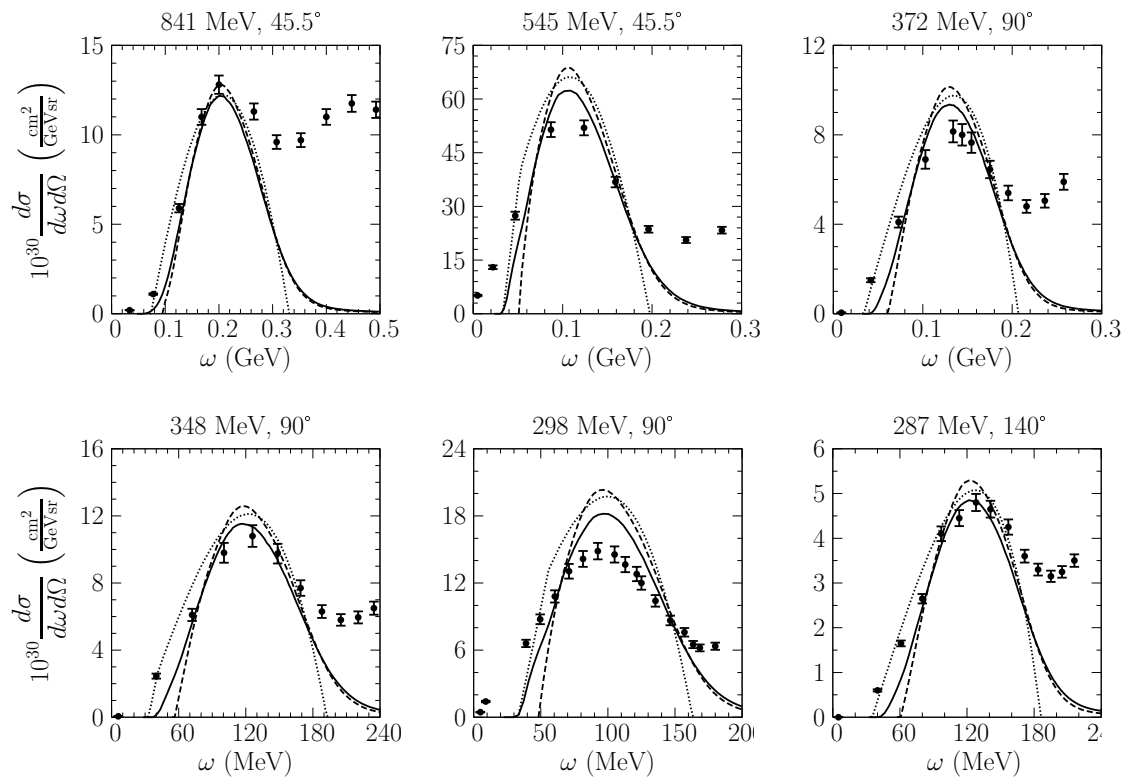
energii dla oddziaływania jest nieco wyższy niż dla funkcji spektralnej (średnia musi być większa od niektórych wartości). Powoduje to, iż dla największych energii mionu otrzymujemy wynik mniejszy niż dla funkcji spektralnej. Z kolei dla  $E_\mu \in [620; 740]$  MeV nieco przeszacowujemy obliczony przekrój, co wynika z faktu, że całkowity przekrój czynny jest taki sam w obu podejściach (porównaj pozostałe wykresy na rysunku 6.4). Podsumowując, możemy stwierdzić, że wprawdzie dla przekroju czynnego po energii mionu występują różnice między opisem efektywnym a funkcją spektralną, to jednak pozostają one nieduże.

Zarówno przy przekroju liczonym po końcowym pędzie protonu, jak i zmiennej  $Q^2 = -q^2$ , czy przekazie pędu nie dają się zauważyć żadne różnice między opisem efektywnym a funkcją spektralną. To bardzo dobra informacja, bo właśnie przekrój względem  $Q^2$  stanowi obserwablę najczęściej stosowaną w fizyce neutrin. Zatem prostym sposobem na ulepszenie symulacji Monte Carlo, tak by dawała wyniki zgodne z przewidywaniami funkcji spektralnej, jest wprowadzenie do niej opisu efektywnego.

Przejdziemy do rozpraszania elektronów. Rysunek 6.5 pokazuje rezultaty otrzymane dla wapnia bez uwzględnienia oddziaływań końcowych. Powyżej pików kwazi-elastycznego opis efektywny dobrze odtwarza przekroje dla funkcji spektralnej, jednak poniżej obserwujemy sytuację analogiczną do tej dla  $d\sigma_{\text{eff}}^{\text{weak}}/dE_\mu$ : ponieważ progowy przekaz energii jest nieco wyższy, to wartość dla niskich  $\omega$  zostaje niedoszacowana, zaś w pikach — przeszacowana. Dla ustalonego kąta rozpraszania im większa energia wiązki, tym mniejsze rozbieżności między opisem efektywnym a funkcją spektralną, ale to pierwsze podejście zawsze daje nieco węższy i wyższy pik kwazi-elastyczny. Sytuacji tej nie zmienia wprowadzenie oddziaływań końcowych, zobacz rysunek 6.6. Przy najniższych przekazach energii przekrój czynny dla gazu Fermiego i opisu efektywnego pozostaje równy zero, co nie zgadza się z danymi doświadczalnymi i wynikami dla funkcji spektralnej. Dla nieco wyższych  $\omega$  gaz Fermiego przewiduje zbyt wysokie, a opis efektywny — zbyt niskie wartości w stosunku do punktów pomiarowych. W pikach dają one prawie taki sam wynik, który nieznacznie przewyższa przekrój dla funkcji spektralnej. Warto zauważyć, że efekt FSI niweluje część różnic między rozpatrywanymi modelami, bo nawet dla gazu Fermiego redystrybuuje on przekrój z pików, powodując powstanie „ogona”. Dla przekazów energii większych od połowy wartości odpowiadającej pikowi różnice między opisem efektywnym a funkcją spektralną są zbliżone do niepewności pomiarowych.

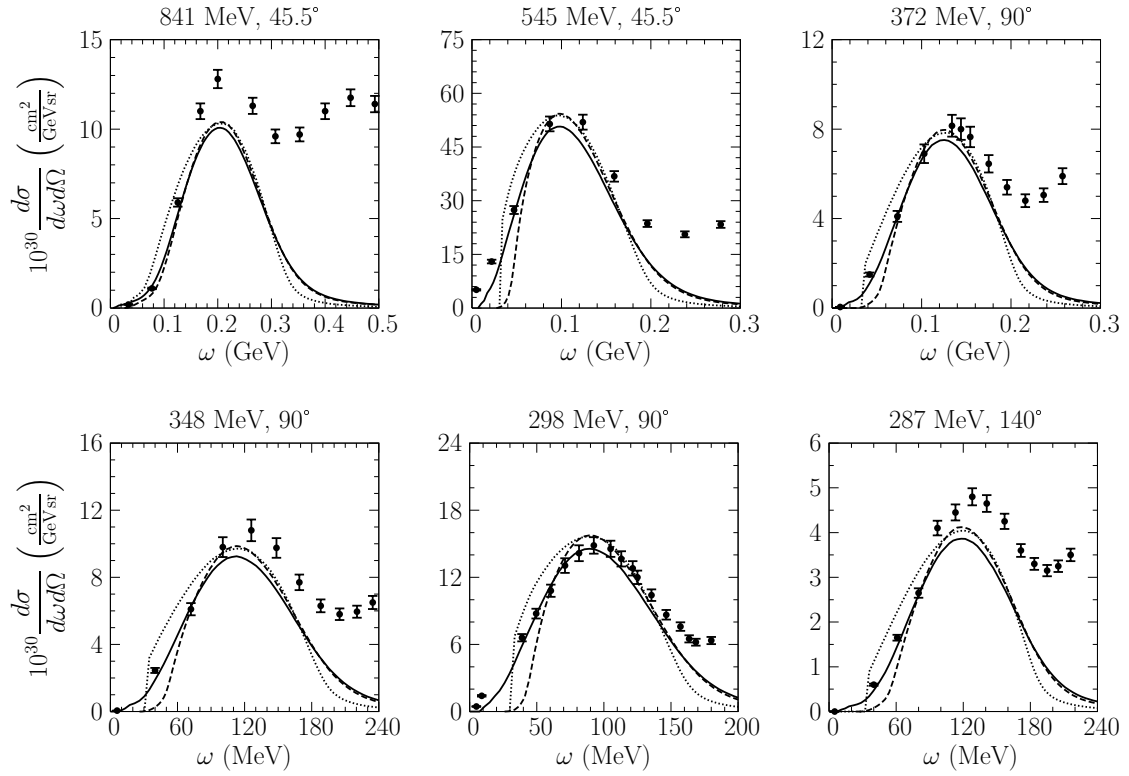
Wyniki otrzymane dla argonu prowadzą do tych samych wniosków. Porównanie wykresów na rysunku 6.7 pozwala też stwierdzić, że w przypadku interakcji elektronów najlepszy kompromis między potrzebnym czasem obliczeń a zgodnością z danymi eksperymentalnymi stanowi gaz Fermiego z oddziaływaniami końcowymi. Gdy zależy nam na jak największej zgodności, najwłaściwszym wyborem pozostaje zawsze funkcja spektralna z FSI.

Podsumowując, w tym rozdziale zaprezentowaliśmy model, który pozwala w łatwy sposób ulepszyć istniejące symulacje Monte Carlo dla neutrin: wystarczy zamienić w nich rozkład pędów i wprowadzić zależną od pędu energię wiązania. Otrzymane przekroje różniczkowe pozostają bliskie przewidywaniom funkcji spektralnej. W przypadku przekrojów względem  $Q^2$ ,  $|\mathbf{q}|$  oraz  $|\mathbf{p}'|$  wyniki są niemal identyczne. Jedynie przekrój względem  $\omega$  ujawnia uproszczenia modelu, ponieważ manifestuje się w nim wartość minimalnego przekazu energii potrzebnego do zajścia oddziaływania. Oprócz tego, naszym modelem można się posługiwać przy symulacjach rozpadu protonu, bo — jak pokazaliśmy w rozdziale 3 — także w tym zastosowaniu dobrze przybliża on wyniki otrzymane dla funkcji spektralnej. Opis efektywny nie sprawdza się w tym samym stopniu przy oddziaływaniach elektronów, dlatego że dla nich potrzebna jest bardzo wysoka precyzja i zwykle rozpatruje się przekroje czynne na rozpraszanie pod ustalonym kątem jako funkcję przekazu energii. Warto jednak zauważyć, że po uwzględnieniu oddziaływań końcowych nasz model poprawnie opisuje przekrój czynny w szerokim zakresie wartości  $\omega$ .

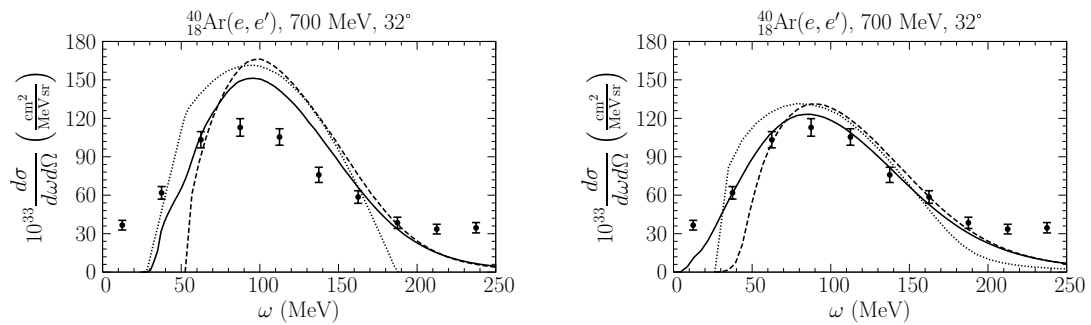


Rys. 6.5: Porównanie przekrojów czynnych dla opisu efektywnego (linia przerywana), GSF (linia przerywana) oraz gazu Fermiego (linia kropkowana) dla procesu  $^{40}\text{Ca}(e, e')$ . Dane doświadczalne pochodzą z pracy [93]. Oddziaływania końcowe nie zostały uwzględnione.





Rys. 6.6: Jak na rys. 6.5, ale z oddziaływaniami końcowymi.



Rys. 6.7: Wyniki dla rozpraszania elektronów pod ustalonym kątem na jądrze argonu otrzymane przy użyciu opisu efektywnego (linia przerywana), gaussowskiej funkcji spektralnej (linia przerywana) oraz gazu Fermiego (linia kropkowana). Po lewej: bez oddziaływań końcowych. Po prawej: z uwzględnieniem ich wpływu.

## Rozdział 7

# Podsumowanie

W przedstawionej rozprawie doktorskiej opracowana została metoda przybliżania funkcji spektralnych dla jąder średniej wielkości. Pokazaliśmy, że zapewnia ona opis rozpraszania elektronów na jądrze wapnia  $^{40}_{20}\text{Ca}$ , który bardzo dobrze zgadza się z danymi doświadczalnymi w szerokim zakresie kinematycznym. Zaobserwowaliśmy jednak rozbieżności, które pojawiają się systematycznie, gdy przekaz pędu charakteryzujący pik kwazielastyczny jest mniejszy niż  $400 \text{ MeV}/c$  i stają się znaczące poniżej  $300 \text{ MeV}/c$ . Można je zinterpretować jako załamanie się przybliżenia impulsowego. W przypadku argonu  $^{40}_{18}\text{Ar}$  porównanie naszych przewidywań z danymi dla oddziaływań elektronów pokazało zgodność zbliżoną do osiągniętej dla wapnia przy podobnych przekazach pędu. Z kolei tlen  $^{16}_8\text{O}$  daje możliwość zestawienia naszego modelu i funkcji spektralnej Benhara, pozwalając stwierdzić, że różnice między otrzymanywanymi dla nich przekrojami praktycznie znikają, gdy stosuje się ten sam rozkład pędów.

Nawet po uwzględnieniu wpływu oddziaływań końcowych, między gazem Fermiego a przedstawionym tu podejściem występują różnice, które przy porównaniach z danymi doświadczalnymi przemawiają na korzyść funkcji spektralnej.

Dzięki ustaleniu, jakie kąty rozpraszania i energie wiązki elektronów kinematycznie odpowiadają interakcjom neutrin, mogliśmy pośrednio pokazać, że dobrze opisujemy efekty jądrowe w ważnym dla nas obszarze. Oddziaływania z niskim przekazem pędu dają — z grubsza — stały wkład do procesów kwazielastycznych przy  $E_\nu \gtrsim 1 \text{ GeV}$ . Z tego względu precyzja podejść opartych na przybliżeniu impulsowym (zarówno gazu Fermiego, jak i funkcji spektralnej) jest ograniczona: możemy być pewni jedynie 80–90% przekroju czynnego; pozostałą część zapewne niedoszacowujemy, licząc jej wkład w sposób nieuprawniony.

Żeby ułatwić implementację opracowanych funkcji spektralnych w generatorach Monte Carlo, podaliśmy wszystkie szczegóły ich parametryzacji i omówiliśmy przykładowe algorytmy. Przedstawiliśmy również sposób na efektywne opisanie jąder, który poprzez prostą modyfikację programu napisanego dla gazu Fermiego pozwala uzyskiwać wyniki różniące się tylko nieznacznie od rezultatów dla dokładniejszego modelu. Naszym zdaniem, może on stanowić ciekawą propozycję dla generatorów stosowanych w fizyce neutrin przez grupy doświadczalne i w symulacjach hipotetycznego rozpadu protonu.

## Podziękowania

Chciałbym serdecznie podziękować osobie, bez której nie rozpoczęłaby się moja przygoda z fizyką neutrin — Janowi Sobczykowi — nie tylko za lata opieki naukowej i setki godzin spędzonych na tłumaczeniu subtelności oddziaływań tych nieuchwytnych cząstek, lecz także za stawianie ambitnych zadań i wyrozumiałość.

Omarowi Benharowi dziękuję za udostępnienie funkcji spektralnych tlenu, węgla i żelaza, a Giampaolo Co' — za rozkłady pędów wykorzystane w tej pracy; Im obu jestem wdzięczny za pełną życzliwości korespondencję.

Niniejsza rozprawa doktorska została sfinansowana ze środków na naukę w latach 2007–2008 jako projekt badawczy numer 3951/B/H03/2007/33.

# Bibliografia

- [1] H. A. Bethe i R. E. Peierls, *Nature* **133**, 532 (1934).
- [2] C. L. Cowan Jr, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse i A. D. McGuire, *Science* **124**, 103 (1956).
- [3] B. T. Cleveland, T. Daily, R. Davis, Jr., J. R. Distel, K. Lande, C. K. Lee, P. S. Wildenhain i J. Ullman, *Astrophys. J.* **496**, 505 (1998).
- [4] J. N. Bahcall, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 300 (1964).
- [5] R. Davis, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **12**, 303 (1964).
- [6] K. S. Hirata *et al.* (Kamiokande-II Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **63**, 16 (1989).
- [7] Q. R. Ahmad *et al.* (SNO Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301 (2002).
- [8] J. N. Bahcall, E. Lisi, D. E. Alburger, L. De Braeckelee, S. J. Freedman i J. Napolitano, *Phys. Rev. C* **54**, 411 (1996).
- [9] V. Gribov, B. Pontecorvo, *Phys. Lett.* **B28**, 493 (1969).
- [10] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **17**, 2369 (1978).
- [11] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [12] J. Hosaka *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), *Phys. Rev. D* **74**, 032002 (2006).
- [13] A. A. Aguilar-Arévalo *et al.* (SciBooNE Collaboration), *Bringing the SciBar Detector to the Booster Neutrino Beam*, Fermi National Accelerator Laboratory, Fermilab-Proposal-0954, 2006; arXiv:hep-ex/0601022.
- [14] O. Benhar, D. Day i I. Sick, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 189 (2008).

- [15] P. K. A. de Witt Huberts, J. Phys. G **16**, 507 (1990).
- [16] D. Rohe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 182501 (2004).
- [17] C. Barbieri, D. Rohe, I. Sick i L. Lapikás, Phys. Lett. **B608**, 47 (2005).
- [18] C. Maieron, M. C. Martínez, J. A. Caballero i J. M. Udías, Phys. Rev. C **68**, 048501 (2003).
- [19] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni, G. A. Miller, V. R. Pandharipande i I. Sick, Phys. Rev. C **44**, 2328 (1991).
- [20] Y. Horikawa, F. Lenz i N. C. Mukhopadhyay, Phys. Rev. C **22**, 1680 (1980).
- [21] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni i I. Sick, Nucl. Phys. **A579**, 493 (1994).
- [22] H. Mütter, G. Knehr i A. Polls, Phys. Rev. C **52**, 2955 (1995).
- [23] V. Barger *et al.*, *Report of the US long baseline neutrino experiment study*, Fermi National Accelerator Laboratory and Brookhaven National Laboratory, Fermilab-0801-AD-E, BNL-77973-2007-IR, 2007; arXiv:0705.4396
- [24] D. Autiero *et al.*, JCAP **11**, 011 (2007).
- [25] S. Amerio *et al.* (ICARUS Collaboration), Nucl. Instrum. Meth. **A527**, 329 (2004).
- [26] A. M. Ankowski *et al.* (ICARUS Collaboration), Nucl. Instrum. Meth. **A556**, 146 (2005).
- [27] A. M. Ankowski *et al.* (ICARUS Collaboration), Eur. Phys. J. C **48**, 667 (2006).
- [28] A. Curioni, B. T. Fleming i M. Soderberg, [w:] *Proceedings of NuInt07*, red. G. P. Zeller, J. G. Morfin i F. Cavanna, AIP Conference Proceedings, Vol. 967, AIP, New York 2007, str. 76–79.
- [29] V. Barger, P. Huber, D. Marfatia i W. Winter, Phys. Rev. D **76**, 053005 (2007); *ib.*, 031301(R) (2007).
- [30] A. M. Ankowski i J. T. Sobczyk, Phys. Rev. C **74**, 054316 (2006).
- [31] A. M. Ankowski, Acta Phys. Pol. B **37**, 2259 (2006).
- [32] A. M. Ankowski i J. T. Sobczyk, [w:] *Proceedings of NuInt07*, red. G. P. Zeller, J. G. Morfin i F. Cavanna, AIP Conference Proceedings, Vol. 967, AIP, New York 2007, str. 106–108.

- [33] A. M. Ankowski i J. T. Sobczyk, Phys. Rev. C **77**, 044311 (2008).
- [34] O. Benhar, N. Farina, H. Nakamura, M. Sakuda i R. Seki, Phys. Rev. D **72**, 053005 (2005).
- [35] G. Co', korespondencja prywatna.
- [36] P. Vogel, [w:] *Proceedings of the 5th international WEIN symposium*, red. P. Herczeg, C. M. Hoffman i H. V. Klapdor-Kleingrothaus, World Scientific, 1999, str. 204–221.
- [37] A. M. Ankowski, Acta Phys. Pol. B **37**, 377 (2006).
- [38] D. Drakoulakos *et al.* (MINER $\nu$ A Collaboration), *Proposal to Perform a High-Statistics Neutrino Scattering Experiment Using a Fine-grained Detector in the NuMI Beam*, Fermi National Accelerator Laboratory, Fermilab-Proposal-0938, 2003; arXiv:hep-ex/0405002, str. 14.
- [39] S. Frullani i J. Mougey, Adv. Nucl. Phys. **14**, 1 (1984).
- [40] S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych*, t. 1, PWN, Warszawa 1999.
- [41] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relatywistyczna teoria kwantów*, PWN, Warszawa 1985.
- [42] W.-M. Yao *et al.*, J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [43] T. de Forest, Jr, Nucl. Phys. **A392**, 232 (1983).
- [44] O. Benhar i V. R. Pandharipande, Phys. Rev. C **47**, 2218 (1993).
- [45] D. H. E. Gross i R. Lipperheide, Nucl. Phys. **A150**, 449 (1970).
- [46] S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych*, t. 2, PWN, Warszawa 1999.
- [47] D. H. Perkins, *Wstęp do fizyki wysokich energii*, PWN, Warszawa 2004.
- [48] R. Bradford, A. Bodek, H. Budd i J. Arrington, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **159**, 127 (2006).
- [49] S. Bonetti, G. Carnesecchi, D. Cavalli, P. Negri, A. Pullia, M. Rollier, F. Romano i R. Schira, Nuovo Cimento **A38**, 260 (1977).
- [50] R. Gran *et al.* (K2K Collaboration), Phys. Rev. D **74**, 052002 (2006).
- [51] A. A. Aguilar-Arévalo *et al.* (MiniBooNE Collaboration), Phys. Rev. Lett. **100**, 032301 (2008).

- [52] J. D. Walecka, *Theoretical nuclear and subnuclear physics*, Second edition, Imperial College Press, London 2004.
- [53] D. Rohe *et al.*, Phys. Rev. C **72**, 054602 (2005).
- [54] D. Rohe, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **159**, 152 (2006).
- [55] C. Bisconti, F. Arias de Saavedra i G. Co', Phys. Rev. C **75**, 054302 (2007).
- [56] C. Ciofi degli Atti, S. Simula, L. L. Frankfurt i M. I. Strikman, Phys. Rev. C **44**, R7 (1991).
- [57] S. A. Kulagin i A. V. Sidorov, Eur. Phys. J. A **9**, 261 (2000).
- [58] S. A. Kulagin i R. Petti, Nucl. Phys. **A765**, 126 (2006).
- [59] O. Benhar, A. Fabrocini i S. Fantoni, Phys. Rev. C **41**, R24 (1990).
- [60] R. R. Whitney, I. Sick, J. R. Ficenec, R. D. Kephart i W. P. Trower, Phys. Rev. C **9**, 2230 (1974).
- [61] G. Garino *et al.*, Phys. Rev. C **45**, 780 (1992).
- [62] K. Garrow *et al.*, Phys. Rev. C **66**, 044613 (2002).
- [63] O. Benhar, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **159**, 168 (2006).
- [64] O. Benhar i D. Meloni, Nucl. Phys. **A789**, 379 (2007).
- [65] D. Van Neck, A. E. L. Dieperink i E. Moya de Guerra, Phys. Rev. C **51**, 1800 (1995).
- [66] R. Gran, [w:] *Proceedings of NuFact07*, red. O. Yasuda, N. Mondal, Ch. Ohmori, AIP Conference Proceedings, Vol. 981, AIP, New York 2007, str. 256–258.
- [67] R. Tayloe, [w:] *Proceedings of NuInt07*, red. G. P. Zeller, J. G. Morfin i F. Cavanaugh, AIP Conference Proceedings, Vol. 967, AIP, New York 2007, str. 39–44.
- [68] D. Ayres *et al.* (NO $\nu$ A Collaboration), *NO $\nu$ A Proposal to Build a 30 Kiloton Off-Axis Detector to Study Neutrino Oscillations in the Fermilab NuMI Beamline*, Fermi National Accelerator Laboratory, Fermilab-Proposal-0929, 2005; arXiv:hep-ex/0503053.

- [69] M. Ishitsuka,[w:] *Proceedings of NuInt07*, red. G. P. Zeller, J. G. Morfin i F. Cavanna, AIP Conference Proceedings, Vol. 967, AIP, New York 2007, str. 57–60.
- [70] T. Abe *et al.* (ISS Detector Working Group), *Detectors and flux instrumentation for future neutrino facilities*, Rutherford Appleton Laboratory, Technical Report No. RAL-TR-2007-24, 2007; arXiv:0712.4129.
- [71] A. A. Aguilar-Arévalo *et al.* (MiniBooNE Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231801 (2007).
- [72] F. Arias de Saavedra, C. Bisconti, G. Co' i A. Fabrocini, *Phys. Rep.* **450**, 1 (2007).
- [73] C. Ciofi degli Atti, S. Liuti i S. Simula, *Phys. Rev. C* **41**, R2474 (1990).
- [74] V. R. Pandharipande i S. C. Pieper, *Phys. Rev. C* **45**, 791 (1992).
- [75] E. D. Cooper, B. C. Clark, R. Kozack, S. Shim, S. Hama, J. I. Johansson, H. S. Sherif, R. L. Mercer i D. B. Serot, *Phys. Rev. C* **36**, 2170 (1987).
- [76] E. D. Cooper, S. Hama, B. C. Clark i R. L. Mercer, *Phys. Rev. C* **47**, 297 (1993).
- [77] B. D. Serot i J. D. Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16**, 1 (1986).
- [78] H. Nakamura, R. Seki i M. Sakuda, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **139**, 201 (2005).
- [79] O. Benhar, C. Ciofi degli Atti, S. Liuti i G. Salmè, *Phys. Lett.* **B177**, 135 (1986).
- [80] C. Ciofi degli Atti i S. Simula, *Phys. Rev. C* **53**, 1689 (1996).
- [81] C. H. Johnson i C. Mahaux, *Phys. Rev. C* **38**, 2589 (1988).
- [82] W. Tornow, Z. P. Chen i J. P. Delaroche, *Phys. Rev. C* **42**, 693 (1990).
- [83] C. H. Johnson, R. F. Carlton i R. R. Winters, *Phys. Rev. C* **44**, 657 (1991).
- [84] V. Gillet i N. Vinh Mau, *Nucl. Phys.* **54**, 321 (1964).
- [85] A. Bohr i B. R. Mottelson, *Struktura jądra atomowego*, PWN, Warszawa 1975, T. 1, s. 232 i 326.
- [86] M. Leuschner *et al.*, *Phys. Rev. C* **49**, 955 (1994).



- [87] M. Anghinolfi *et al.*, Nucl. Phys. **A602**, 405 (1996).
- [88] M. Anghinolfi *et al.*, J. Phys. G 21, L9 (1995).
- [89] O. Benhar, korespondencja prywatna.
- [90] J. S. O'Connell *et al.*, Phys. Rev. C **35**, 1063 (1987).
- [91] Z. E. Meziani *et al.*, Phys. Rev. Lett. **54**, 1233 (1985).
- [92] T. C. Yates *et al.*, Phys. Lett. **B312**, 382 (1993).
- [93] C. F. Williamson *et al.*, Phys. Rev. C **56**, 3152 (1997).
- [94] E. Oset, L. L. Salcedo i D. Strottman, Phys. Lett. **B165**, 13 (1985).
- [95] E. Oset i L. L. Salcedo, Nucl. Phys. **A468**, 631 (1987).
- [96] A. Gil, J. Nieves i E. Oset, Nucl. Phys. **A627**, 543 (1997).
- [97] D. Drechsel, O. Hanstein, S. S. Kamalov i L. Tiator, Nucl. Phys. **A645**, 145 (1999).
- [98] O. Benhar i D. Meloni, Phys. Rev. Lett. **97**, 192301 (2006).
- [99] H. Nakamura, T. Nasu, M. Sakuda i O. Benhar, Phys. Rev. C **76**, 065208 (2007).
- [100] K. M. Graczyk i J. T. Sobczyk, Phys. Rev. D **77**, 053001 (2008).
- [101] A. V. Butkevich i S. P. Mikheyev, Phys. Rev. C **72**, 025501 (2005).