

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Teoretycznej

ROZPRASZANIE ELEKTRONÓW NA JĄDRZE
W PRZYBLIŻENIU IMPULSOWYM

Autor:

TOMASZ GOLAN

praca magisterska napisana pod kierunkiem:
prof. dr. hab. Jana Sobczyka

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Przekrój czynny	3
2.1	Macierz przejścia	3
2.2	Przybliżenie jednofotonowe	6
2.3	Przybliżenie impulsowe	7
2.4	Wyliczenie przekroju czynnego	9
3	Tarcza - swobodny nukleon	13
3.1	Wyliczenie tensora $L_{\mu\nu}$	14
3.2	Wyliczenie tensora $H^{\mu\nu}$	16
3.3	Wyliczenie $L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$	18
3.4	Gaz Fermiego	18
4	Nukleon końcowy w bazie momentu pedu	27
4.1	Równanie Diraca z potencjałem centralnym	27
4.1.1	Część kątowna	28
4.1.2	Równania różniczkowe na $f(r)$ i $g(r)$	32
4.2	Cząstka swobodna	35
4.3	Tensor hadronowy	39
5	Podsumowanie	53

Streszczenie

Celem pracy jest przygotowanie do obliczania przekroju czynnego w formalizmie DWIA (*Distorted Wave Impulse Approximation*), poprzez ustalenie normalizacji funkcji falowej w bazie momentu pędu. Pierwsza część pracy jest poświęcona rachunkom prowadzonym w bazie pędowej. Zostanie wyliczony inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na pojedynczym nukleonie, następnie otrzymany wynik będzie uogólniony na przypadek jądra opisywanego jako gaz Fermiego oraz porównany z danymi doświadczalnymi. W drugiej części pracy zostaną przeprowadzone analogiczne rachunki w bazie momentu pędu. Przy odpowiedniej normalizacji funkcji falowej otrzymany wynik musi być identyczny. W pracy uzyskano niemal całkowitą zgodność wyników, za wyjątkiem czynnika normalizacyjnego, który dla bazy momentu pędu jest formalnie nieskończonością.

1 Wstęp

Istnienie neutrina zostało zapostulowane w latach 30-tych ubiegłego wieku przez Wolfganga Pauliego w celu ratowania zasady zachowania energii i zasady zachowania momentu pędu w procesie rozpadu beta neutronu. Jego istnienie zostało doświadczalnie potwierdzone w 1956 roku w eksperymencie przeprowadzonym przez Frederica Reinesa i Clyde'a Cowana¹. Jako źródło antyneutrino wykorzystali oni reaktor jądrowy, a za detektor posłużył im zbiornik wypełniony wodą. Idea doświadczenia była prosta: podczas odwrotnego rozpadu beta oddziaływanie antyneutrino z protonem skutkuje produkcją neutronu i pozytonu; pozyton, poruszając się w ośrodku materialnym, szybko spotka na swej drodze elektron, co zaowocuje powstaniem dwóch fotonów, natomiast neutron zostanie zaabsorbowany przez jądro, co przyczyni się do powstania nowego jądra w stanie wzbudzone, które po upływie pewnego czasu wyemituje kolejne fotony. W ten sposób obserwacja neutrino sprowadzona została do detekcji fotonów w koincydencji czasowej.

Kolejne przełomowe odkrycia związane z neutrino miały miejsce dopiero na przełomie XX i XXI wieku, gdy odkryto tzw. oscylacje neutrino, które polegają na samoistnej zamianie jednego rodzaju neutrino w inne. Zjawisko to, zaproponowane po raz pierwszy przez Pontecorvo, było odpowiedzią na problem deficytu neutrino słonecznych. W latach 70-tych Raymond Davis i John Bahcall zauważyli, że do Ziemi dociera znacznie mniej neutrino słonecznych, niż sugerowały to rozważania teoretyczne. Zjawisko oscylacji, które jest fascynujące samo w sobie, niesie za sobą poważne konsekwencje, ponieważ jest możliwe tylko wtedy, gdy neutrino posiadają masę. Było to zaskakujące odkrycie, ponieważ przez niespełna 70 lat uważano neutrino za cząstkę pozbawioną masy. W takim też przekonaniu budowano model standardowy. Nota bene można rozszerzyć model standardowy tak, aby uwzględniał masę neutrino, przez wprowadzenie neutrino prawoskrętnych.

Mimo przeprowadzonych do tej pory wielu doświadczeń z udziałem neutrino, wciąż nie wiemy o nich wszystkiego. Mamy nadzieję, że zbliżające się eksperymenty, takie jak T2K, wyjaśnią nie rozstrzygnięte jeszcze kwestie. W tym celu chcielibyśmy dysponować jak najlepszym modelem teoretycznym, opisującym zderzenia neutrino z jądrami atomowymi. Dysponujemy dobrą efektywną teorią, pozwalającą opisać nam rozpraszanie neutrino na pojedynczym nukleonie, jednak rozważając rozpraszanie na jądrze, musimy uwzględnić procesy zachodzące wewnątrz jądra. Najprostszym modelem jest gaz Fermiego, jednak ma on raczej charakter pierwszego przybliżenia. Lepszy opis oddziaływań nukleonu w jądrze wprowadza się przez funkcję spektralną oraz

¹Eksperyment potwierdził istnienie antyneutrino.

uwzględnienie oddziaływań w stanie końcowym, tzw. FSI (*Final State Interaction*).

Motywacją do napisania tej pracy jest opis zderzeń neutrin z jądrami atomowymi w przybliżeniu DWIA (*Distorted Wave Impulse Approximation*). W przybliżeniu impulsowym przyjmuje się, że padająca cząstka oddziałuje z pojedynczym nukleonem, co jest uzasadnione w przypadku neutrin o energiach większych od 1GeV , kiedy typowe przekazy pędu są wystarczająco duże. W DWIA nukleon początkowy traktuje się jak cząstkę swobodną, a oddziaływanie wybitego nukleonu z jądrem końcowym wprowadza się przez odpowiedni potencjał (np. Woods-Saxona).

Modelowanie oddziaływań wewnątrz jądra poprzez potencjał wiąże się z koniecznością korzystania z rozwiązania równania Diraca w bazie momentu pędu. Celem pracy jest zapoznanie się z formalizmem niezbędnym do przeprowadzenia rachunków w DWIA oraz ustalenie odpowiedniej normalizacji funkcji falowej.

W pierwszej części pracy zostanie wyliczony inkluzywny przekrój czynny dla jądra opisywanego jako gaz Fermiego, wszystkie cząstki będą opisywane przez fale płaskie. Następnie zostaną przeprowadzone analogiczne rachunki w sytuacji, gdy nukleon końcowy będzie traktowany jak cząstka swobodna, ale opisany przez rozwiązanie równania Diraca w bazie momentu pędu.

Z uwagi na szkoleniowy charakter pracy, która jest jedynie przygotowaniem do właściwych rachunków, rozpatrzony zostanie proces rozpraszania elektronów na jądrze. Dlaczego? Po pierwsze obliczenia są mniej złożone. Po drugie dysponujemy większą liczbą danych pomiarowych dla elektronów, dzięki czemu łatwiej skonfrontować końcowy wynik z doświadczeniem. Biorąc pod uwagę, że głównym celem jest sprawdzenie konkretnego modelu jądra, taki zabieg wydaje się jak najbardziej uzasadniony - jeśli opis jądra sprawdzi się w przypadku elektronów, to nie ma powodów, aby sądzić, że będzie inaczej w procesach z udziałem neutrin.

Chcąc w przyszłości liczyć przekrój czynny w DWIA, musimy najpierw znać normalizację funkcji falowej w bazie momentu pędu. Celem pracy jest jej ustalenie poprzez wyliczenie inkluzywnego przekroju czynnego dla rozpraszania elektronu na jądrze w bazie pędowej i w bazie momentu pędu oraz ich porównanie. Osobny rozdział poświęcimy dla gazu Fermiego, w celu sprawdzenia otrzymanego rezultatu, poprzez porównanie z danymi doświadczalnymi.

2 Przekrój czynny

2.1 Macierz przejścia

Aby zająć się obliczaniem przekroju czynnego, musimy najpierw odpowiedzieć sobie na pytanie, jak w formalizmie kwantowej teorii pola liczyć prawdopodobieństwo zderzenia. Wiemy, że elektrony uczestniczą w oddziaływaniach elektromagnetycznych, realizowanych poprzez wymianę wirtualnego fotonu. Na początek rozważymy sytuację ogólną. Właściwe rachunki będą wykonywane w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, czyli w tzw. przybliżeniu jendofotonowym.

Lagrangian oddziaływania w przypadku oddziaływań pól Diraca z zewnętrznym polem elektromagnetycznym ma postać

$$\mathcal{L}_{int} = j_\mu A^\mu = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \quad (2.1)$$

Zakładamy, że oddziaływanie zachodzi w skończonym czasie, tj. gdy $t \rightarrow \pm\infty$ cząstki są oddalone od siebie na odległość na tyle dużą, że uniemożliwia im ona oddziaływanie i traktujemy je jak cząstki swobodne. Zgodnie z konwencją możemy wprowadzić swobodne pola asymptotyczne

$$\psi_{(in)}(x) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \psi(x) \quad (2.2)$$

$$\psi_{(out)}(x) = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \psi(x) \quad (2.3)$$

Pola asymptotyczne działają w różnych przestrzeniach Hilberta, co oznacza, że stany początkowy $|i\rangle_{(in)} \in \mathcal{H}_{in}$ i końcowy $|f\rangle_{(out)} \in \mathcal{H}_{out}$. Aby wyliczyć amplitudę prawdopodobieństwa ${}_{(out)}\langle f|i\rangle_{(in)}$, musimy znaleźć operator unitarny S taki, że

$$\psi_{(out)}(x) = S^{-1}\psi_{(in)}(x)S \quad (2.4)$$

co umożliwi nam przejście z jednej bazy w drugą

$$|f\rangle_{(out)} = S^{-1}|f\rangle_{(in)} = S^\dagger|f\rangle_{(in)} \quad (2.5)$$

$$|i\rangle_{(in)} = S|i\rangle_{(out)} \quad (2.6)$$

i pozwoli wyliczyć amplitudę prawdopodobieństwa

$${}_{(out)}\langle f|i\rangle_{(in)} = {}_{(out)}\langle f|S|i\rangle_{(out)} = {}_{(in)}\langle f|S|i\rangle_{(in)} \equiv S_{fi} \quad (2.7)$$

W celu wyznaczenia macierzy S rozważymy ewolucję czasową pola oddziałującego $\psi(x)$. Takie podejście można znaleźć w [2].

$$\psi(t, \vec{x}) = U(t)^{-1} \psi_{(in)}(t, \vec{x}) U(t) \quad (2.8)$$

W tym miejscu trzeba zachować szczególną ostrożność przy interpretacji $\psi(x)$. Pola swobodne spełniają jednoczesowe kanoniczne związki komutacyjne $[\psi_{(in)}(t, \vec{x}), \dot{\psi}_{(in)}(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$, a pola oddziałujące $[\psi(t, \vec{x}), \dot{\psi}(t, \vec{x}')] = \frac{i}{Z_3} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$, więc (2.8) może być prawdziwe tylko wtedy, gdy przez $\psi(x)$ rozumiemy pola zrenormalizowane $\psi(x) \rightarrow Z_3^{1/2} \psi(x)$.

Z równania (2.2) wynika, że $U(t)$ musi spełniać

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = \mathbf{1} \quad (2.9)$$

a z (2.4)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = S \quad (2.10)$$

W kwantowej teorii pola pracujemy w obrazie oddziaływania, czyli dla pola $\psi(x)$ zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = i [H(t), \psi(t, \vec{x})] \quad (2.11)$$

i analogicznie dla pola $\psi_{(in)}$ ²

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_{(in)}(t, \vec{x}) = i [H_0^{(in)}(t), \psi_{(in)}(t, \vec{x})] \quad (2.12)$$

Co więcej, z (2.8) wynika, że

$$U(t) H(t) U^{-1}(t) = H^{(in)}(t) \quad (2.13)$$

Wykorzystując powyższe równania możemy zapisać

²Przez $H^{(in)}(t)$ rozumiemy hamiltonian wyrażony przez pola asymptotyczne.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \psi_{(in)}(t, \vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} [U(t) \psi(t, \vec{x}) U^{-1}(t)] = \frac{dU(t)}{dt} \psi(t, \vec{x}) U^{-1}(t) \\
&+ U(t) \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} U^{-1}(t) + U(t) \psi(t, \vec{x}) \frac{dU^{-1}(t)}{dt} \\
&= \frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) U(t) \psi(t, \vec{x}) U^{-1}(t) \\
&+ iU(t) [H(t), \psi(t, \vec{x})] U^{-1}(t) \\
&+ U(t) \psi(t, \vec{x}) U^{-1}(t) U(t) \frac{dU^{-1}(t)}{dt} \\
&= \frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) \psi_{(in)}(t, \vec{x}) + i [H^{(in)}(t), \psi_{(in)}(t, \vec{x})] \\
&+ \psi_{(in)}(t, \vec{x}) U(t) \frac{dU^{-1}(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Z unitarności operatora $U(t)$ wynika

$$\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) + U(t) \frac{dU^{-1}(t)}{dt} = 0 \tag{2.15}$$

co w połączeniu z (2.12) i (2.14) daje

$$i [H_0^{(in)}(t), \psi_{(in)}(t, \vec{x})] = \left[\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) + i H^{(in)}(t), \psi_{(in)}(t, \vec{x}) \right] \tag{2.16}$$

$$\Rightarrow i \frac{dU(t)}{dt} = \left(H^{(in)}(t) - H_0^{(in)}(t) \right) U(t) = H_{int}^{(in)}(t) U(t) \tag{2.17}$$

Jeżeli scałkujemy obie strony równania po czasie w granicach od $-\infty$ do t , to (mając na uwadze (2.9)) otrzymamy całkowe równanie iteracyjne na $U(t)$

$$U(t) = \mathbb{1} - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_{int}^{(in)}(t_1) U(t_1) \tag{2.18}$$

co w oczywisty sposób prowadzi do

$$\begin{aligned}
U(t) &= \mathbb{1} - i \int_{-\infty}^t dt_1 H_{int}^{(in)}(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^{t_1} dt_2 H_{int}^{(in)}(t_1) H_{int}^{(in)}(t_2) + \dots \\
&+ (-i)^n \int_{\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}^{(in)}(t_1) H_{int}^{(in)}(t_2) \dots H_{int}^{(in)}(t_n) + \dots
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Wykorzystując twierdzenie Dysona, (2.19) możemy zapisać w postaci (por. [2] rozdz. 4-1-4)

$$\begin{aligned}
U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \dots \int_{-\infty}^t dt_n T \left[H_{int}^{(in)}(t_1) H_{int}^{(in)}(t_2) \dots H_{int}^{(in)}(t_n) \right] \\
&\equiv T \exp \left[-i \int_{-\infty}^t dt' H_{int}^{(in)}(t') \right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

gdzie T oznacza iloczyn chronologiczny. Zgodnie z (2.10) macierz przejścia wynosi³

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_{int}(t) \right] = T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x) \right] \tag{2.21}$$

Jest to ogólne wyrażenie na macierz przejścia, które teoretycznie umożliwia wyliczenie amplitudy prawdopodobieństwa $\langle f|S|i \rangle$ dla dowolnego procesu. W obliczeniach korzysta się z rachunku perturbacyjnego, który prowadzi do wprowadzenia diagramów Feynmana. W wyższych rzędach rachunku zaburzeń, pojawiające się diagramy pętlowe prowadzą do nieskończoności, przez co konieczne jest sięganie po procedurę renormalizacji.

W przypadku zderzeń elektronów (neutrin) z nukleonami wyniki otrzymane w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń są na tyle zadowalające, że nie ma potrzeby korzystania z wyższych rzędów.

2.2 Przybliżenie jednofotonowe

W poprzednim podrozdziale wyprowadziliśmy ogólne wyrażenie na macierz przejścia (2.21). W przypadku rozważanych przez nas procesów wystarczające jest ograniczenie się do pierwszego rzędu rachunku zaburzeń, w którym macierz S przyjmuje postać⁴

$$S = \mathbb{1} + i \int d^4x j_{\mu}(x) A^{\mu}(x) \tag{2.22}$$

³Osiągnęliśmy nasz cel, czyli wyraziliśmy wszystko przez pola swobodne. Od tej pory będziemy opuszczać indeks (in) .

⁴Będziemy rozważać tylko takie procesy, w których stan końcowy jest różny od początkowego, więc $\mathbb{1}$ będziemy od tej pory pomijać.

gdzie $j_\mu(x)$ jest prądem leptonowym.

Jeżeli źródłem pola elektromagnetycznego $A^\mu(x)$ jest prąd hadronowy $J^\mu(x)$, to z równań Maxwell'a mamy

$$\square A^\mu(x) = J^\mu(x) \quad (2.23)$$

Aby macierz przejścia wyrazić przez prąd hadronowy, skorzystamy z funkcji Greena (por. [3] rozdz. 7.4)

$$D_F(x-y) = - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon} \quad (2.24)$$

która w oczywisty sposób spełnia

$$\square D_F(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (2.25)$$

Pole $A^\mu(x)$ możemy wyrazić przez

$$A^\mu(x) = \int d^4y D_F(x-y) J^\mu(y) \quad (2.26)$$

Tak zadane pole elektromagnetyczne spełnia (2.23) i umożliwia zapisanie macierzy przejścia w postaci

$$\begin{aligned} S &= i \int d^4x j_\mu(x) A^\mu(x) = i \int d^4x \int d^4y j_\mu(x) D_F(x-y) J^\mu(y) \\ &= -i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} j_\mu(x) \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon} J^\mu(y) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.3 Przybliżenie impulsowe

Gdy rozpatrujemy rozpraszanie wysokoenergetycznych elektronów, czyli takich których energia jest na tyle duża, że odpowiadająca im długość fali de Broglie'a jest mniejsza niż typowa odległość między nukleonami w jądrze, uzasadnione jest stosowanie IA (*Impulse Approximation*), czyli założenia, że elektron oddziałuje z pojedynczym nukleonem.

Elektron padający i rozproszony będziemy traktować jak fale płaskie o czteropędach odpowiednio $k = (E, \vec{k})$ i $k' = (E', \vec{k}')$. Na razie abstrahujemy od modelu jądra i przyjmujemy jedynie, że nukleon początkowy $|i\rangle$ oraz końcowy $|f\rangle$ są stanami własnymi hamiltonianu o energiach odpowiednio E_i i E_f . Zgodnie z (2.27) macierz S_{fi} wynosi

$$S_{fi} \equiv \langle f|S|i \rangle = -i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k'|j_\mu(x)|k \rangle \langle f|J^\mu(y)|i \rangle e^{-iq(x-y)} \quad (2.28)$$

Hamiltonian jest generatorem translacji w czasie, więc prądy: leptonowy i hadronowy możemy wyrazić przez

$$j_\mu(x) = e^{-iHx_0} j_\mu(\vec{x}, 0) e^{iHx_0} \quad (2.29)$$

$$J^\mu(y) = e^{-iHy_0} J^\mu(\vec{y}, 0) e^{iHy_0} \quad (2.30)$$

Jeżeli skorzystamy dodatkowo ze znanej własności dla stanów własnych hamiltonianu

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow e^{iHt}|\psi\rangle = e^{iEt}|\psi\rangle \quad (2.31)$$

to

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k'|e^{-iHx_0} j_\mu(\vec{x}, 0) e^{iHx_0}|k \rangle \\ &\quad \times \langle f|e^{-iHy_0} J^\mu(\vec{y}, 0) e^{iHy_0}|i \rangle e^{-iq(x-y)} \\ &= -i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k'|j_\mu(\vec{x}, 0)|k \rangle \langle f|J^\mu(\vec{y}, 0)|i \rangle \\ &\quad \times e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-ix_0(q_0+E'-E)} e^{-iy_0(E_f-E_i-q_0)} \\ &= -i \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k'|j_\mu(\vec{x}, 0)|k \rangle \langle f|J^\mu(\vec{y}, 0)|i \rangle \\ &\quad \times e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} (2\pi)\delta(q_0+E'-E)(2\pi)\delta(E_f-E_i-q_0) \\ &= -i \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2} \langle k'|j_\mu(\vec{x}, 0)|k \rangle \langle f|J^\mu(\vec{y}, 0)|i \rangle \\ &\quad \times e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} \delta(E_f+E'-E-E_i) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Przy czym $\omega \equiv q_0 = E - E' = E_f - E_i$. Stany leptonowe $|k\rangle$ i $|k'\rangle$ mają określony pęd, czyli zachodzi dla nich

$$e^{i\hat{P}\vec{x}}|k\rangle = e^{i\vec{k}\vec{x}}|k\rangle \quad (2.33)$$

$$e^{i\hat{P}\vec{x}}|k'\rangle = e^{i\vec{k}'\vec{x}}|k'\rangle \quad (2.34)$$

Wykorzystując $j_\mu(\vec{x}, 0) = e^{i\hat{P}\vec{x}} j_\mu(0) e^{-i\hat{P}\vec{x}}$, otrzymamy

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= -i \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2} \langle k' | e^{i\hat{P}\vec{x}} j_\mu(0) e^{-i\hat{P}\vec{x}} | k \rangle \langle f | J^\mu(\vec{y}, 0) | i \rangle \\
&\quad \times e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= -i \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2} \langle k' | j_\mu(0) | k \rangle \langle f | J^\mu(\vec{y}, 0) | i \rangle \\
&\quad \times e^{-i\vec{q}\vec{y}} e^{-i\vec{x}(\vec{k}-\vec{k}'-\vec{q})} \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= -i \int d^3y \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2} \langle k' | j_\mu(0) | k \rangle \langle f | J^\mu(\vec{y}, 0) | i \rangle \\
&\quad \times e^{-i\vec{q}\vec{y}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{q}) \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= -\frac{2\pi i}{q^2} \langle k' | j_\mu(0) | k \rangle \delta(E_f + E' - E - E_i) \int d^3y \langle f | J^\mu(\vec{y}, 0) | i \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

2.4 Wylczenie przekroju czynnego

W fizyce cząstek elementarnych wielkością mierzalną, przez co szczególnie interesującą, jest przekrój czynny, który określa stosunek prawdopodobieństwo zajścia oddziaływania do ilości centrów rozpraszania. Zanim jednak przejdziemy do obliczania przekroju czynnego, zwróćmy uwagę, że w wyrażeniu na amplitudę prawdopodobieństwa S_{fi} pojawia się delta Diraca, która jest dystrybucją, a ponieważ nie potrafimy mnożyć przez siebie dystrybucji, nie jesteśmy w stanie podnieść delty Diraca do kwadratu, a co za tym idzie, obliczyć prawdopodobieństwa $P = |S_{fi}|^2$. Aby obejść ten problem, możemy ograniczyć czas oddziaływania do przedziału $(-T/2, T/2)$. Mamy wtedy

$$\delta_T(E_1 - E_2) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_1 - E_2)t} = \frac{T}{2\pi} \delta_{E_1, E_2} \tag{2.36}$$

Analogicznie zamknijmy świat w pudełku o objętości $V = L^3$ i nałożymy periodyczne warunki brzegowe, tj. zerowanie się funkcji falowej na ścianach pudła. Wtedy pęd przyjmuje wartości dyskretne $\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$, a pędowa delta Diraca jest równa

$$\delta_V^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2} \tag{2.37}$$

Taka operacja umożliwia nam podniesienie delt do kwadratu

$$[\delta_V^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)]^2 = \left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right)^2 \delta_{\vec{p}_1, \vec{p}_2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_V^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \quad (2.38)$$

$$[\delta_T(E_1 - E_2)]^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \delta_{E_1, E_2} = \frac{T}{2\pi} \delta_T(E_1 - E_2) \quad (2.39)$$

Wykorzystując powyższą własność oraz (2.35), otrzymujemy

$$|S_{fi}|^2 = \frac{2\pi\delta_T(E_f + E' - E - E_i)T}{q^4} |\langle k' | j_\mu(0) | k \rangle|^2 \left| \int d^3y \langle f | J^\mu(\vec{y}) | i \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \quad (2.40)$$

Różniczkowy przekrój czynny definiujemy jako (por. [4] rozdz. 3.4)

$$d\sigma = \frac{dP}{T} \cdot \frac{1}{\phi} \quad (2.41)$$

gdzie $dP = Pd\mathcal{N}_\beta = |S_{fi}|^2 d\mathcal{N}_\beta$ jest prawdopodobieństwem zajścia oddziaływania, a $d\mathcal{N}_\beta$ jest gęstością stanów końcowych. W przypadku zderzeń dwóch cząstek strumień ϕ zdefiniowany jest jako iloczyn gęstości $1/V$ oraz prędkości względnej ⁵

$$u = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} \quad (2.42)$$

W objętości V gęstość końcowych stanów leptonowych wynosi $\frac{V}{(2\pi)^3} d^3k'$. Gęstość hadronowych stanów końcowych oznaczmy przez $d\beta$, przez co rozumiemy sumowanie po wszystkich dyskretnych i całkowanie po ciągłych stopniach swobody. Gdy nukleon końcowy będziemy opisywać falą płaską, pojawią się 3 pędowe stopnie swobody, czyli $d\beta \sim d^3p'$. W drugim podejściu nukleon będzie zadany przez funkcję falową w bazie momentu pędu, wtedy stopniami swobody będzie energia oraz całkowity momentu pędu i jego trzecia składowa, czyli $d\beta \sim dE_f \sum_{jM}$.

Przy takim oznaczeniu $d\mathcal{N}_\beta = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k' d\beta$, a różniczkowy przekrój czynny

$$d\sigma = \frac{2\pi\delta_T(E_f + E' - E - E_i)}{q^4} |\langle k' | j_\mu(0) | k \rangle|^2 \left| \int d^3y \langle f | J^\mu(\vec{y}) | i \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \frac{V^2}{(2\pi)^3} d^3k' d\beta \quad (2.43)$$

Na tym etapie przekrój czynny nie zależy już od czasu, więc nic nie stoi na przeszkodzie, aby dokonać przejścia $T \rightarrow \infty$, co prowadzi do

⁵W procesach, które będziemy rozważać, $u \approx 1$.

$$\delta_T(E_f + E' - E - E_i) \rightarrow \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (2.44)$$

Rozważamy procesy z udziałem wysokoenergetycznych elektronów, więc bez żadnych konsekwencji możemy pominąć ich masę, czyli $E'^2 = \vec{k}'^2 + m^2 \approx \vec{k}'^2$, a co za tym idzie

$$d^3k' = k'^2 dk' d\Omega = E'^2 dE' d\Omega \quad (2.45)$$

Zanim przejdziemy do dalszych rachunków, zwróćmy uwagę, że w skończonej objętości V znormalizowane funkcje falowe dla fermionów zadane są przez

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} u(k) e^{-ikx} \quad (2.46)$$

gdzie

$$u(k) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E+m} \varphi_s \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Jeżeli założymy, że wiązka padająca jest niespolaryzowana i nie mierzymy spinu - uśredniamy po jego dozwolonych wartościach, to część leptonową możemy zapisać w postaci

$$\langle k' | j_\mu(0) | k \rangle^2 = \frac{e^2}{V^2} \frac{1}{EE'} m^2 \frac{1}{2} \sum_{spin} (\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)) (\bar{u}(k') \gamma_\nu u(k))^* \quad (2.48)$$

Wygodnie jest wprowadzić tensor leptonowy

$$L_{\mu\nu} \equiv m^2 \frac{1}{2} \sum_{spin} (\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)) (\bar{u}(k') \gamma_\nu u(k))^* \quad (2.49)$$

oraz hadronowy

$$W^{\mu\nu} \equiv \sum \int d\beta E_f E_i \left| \int d^3y \langle f | J^\mu(\vec{y}) | i \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (2.50)$$

Umożliwia nam to zapisanie wyrażenia na różniczkowy inkluzywny przekrój czynny w zwartej postaci

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{e^2}{q^4} \frac{E'}{EE_f E_i} \frac{1}{(2\pi)^2} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (2.51)$$

Wynik otrzymaliśmy przy założeniu, że elektron (zarówno początkowy jak i końcowy) jest zadany przez falę płaską. W przypadku nukleonów przyjęliśmy jedynie, że są stanami o określonej energii. Cała niewiedza o stanach hadronowych zawarta jest w tensorze $W^{\mu\nu}$. Z tego względu wzór na $W^{\mu\nu}$ jest zupełnie ogólny, może opisywać rozpraszanie na pojedynczym nukleonie, jak i na jądrze atomowym. W szczególnym (pośrednim) przypadku jądro może być opisane jako zbiór nukleonów.

W kolejnych rozdziałach wyliczymy inkluzywny przekrój czynny w sytuacji, gdy nukleony są stanami o określonym pędzie oraz gdy funkcja falowa nukleonu w stanie końcowym jest rozwiązaniem równania Diraca w bazie momentu pędu.

3 Tarcza - swobodny nukleon

W poprzednim rozdziale wyprowadziliśmy wzór na różniczkowy przekrój czynny bez dodatkowych założeń dotyczących nukleonów. Teraz przyjmiemy, że nukleon w stanie początkowym i końcowym jest zadany przez falę płaską o pędzie odpowiednio \vec{p} i \vec{p}' . Otrzymany w tym rozdziale wynik będzie nam służył jako wzorec, z którym będziemy porównywać końcowy wynik pracy.

Na razie rozpatrujemy rozpraszanie na pojedynczym nukleonie. Kolejnym krokiem będzie uogólnienie wyniku na przypadek jądra opisanego jako gaz Fermiego. Warto zwrócić uwagę, że swobodny nukleon leży na powłoce masy, co będziemy wykorzystywać w rachunkach. Nie jest to spełnione dla gazu Fermiego, ponieważ nukleon jest związany w jądrze.

Zacniemy od wyliczenia tensora $W^{\mu\nu}$. Zgodnie z (2.50) mamy

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= E_f E_i \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p' \left| \int d^3 y \langle p' | J^\mu(\vec{y}, 0) | p \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= E_f E_i \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p' \left| \int d^3 y \langle p' | e^{i\hat{P}\vec{y}} J^\mu(0) e^{-i\hat{P}\vec{y}} | p \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= E_f E_i \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p' \left| \int d^3 y \langle p' | J^\mu(0) | p \rangle e^{-i\vec{y}(\vec{q} + \vec{p}' - \vec{p})} \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= E_f E_i \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 p' |\langle p' | J^\mu(0) | p \rangle V \delta_{\vec{q}, \vec{p}' - \vec{p}}|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= E_f E_i \frac{V}{(2\pi)^3} V^2 \int d^3 p' \delta_{\vec{q}, \vec{p}' - \vec{p}} |\langle p' | J^\mu(0) | p \rangle|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= E_f E_i V^2 \int d^3 p' \delta_V^3(\vec{q} - \vec{p}' + \vec{p}) |\langle p' | J^\mu(0) | p \rangle|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z (2.37).

Kolejnym krokiem będzie przejście od notacji Diraca do macierzowej. Podobnie jak w przypadku elektronów uśredniamy po spinie.

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= E_f E_i V^2 \int d^3 p' \delta_V^3(\vec{q} - \vec{p}' + \vec{p}) \frac{e^2}{V^2} \frac{1}{E_f E_i} M^2 \frac{1}{2} \sum_{spin} (\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^* \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= e^2 M^2 \frac{1}{2} \sum_{spin} \int d^3 p' \delta_V^3(\vec{q} - \vec{p}' + \vec{p}) (\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^* \delta(E_f + E' - E - E_i)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Wszystkie czynniki objętościowe się skróciły, więc tensor $W^{\mu\nu}$ nie zależy już od objętości. Możemy swobodnie dokonać przejścia $L \rightarrow \infty$ i wykonać całkę po d^3p' .

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= e^2 M^2 \frac{1}{2} \sum_{spin} (\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^* \delta(E_f + E' - E - E_i) \\ &\equiv e^2 H^{\mu\nu} \delta(E_f + E' - E - E_i) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wstawiając otrzymany wynik do wzoru na różniczkowy przekrój (por. (2.51)), mamy

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{e^4}{q^4} \frac{E'}{E E_f E_i} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_f + E' - E - E_i) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

gdzie $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}' = \vec{p}' - \vec{p}$. Całkowanie po dE' możemy wykonać, wykorzystując energetyczną deltę Diraca i inkluzyny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na pojedynczym nukleonie jest równy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{q^4} \frac{E'}{E E_f E_i} \frac{1}{(2\pi)^2} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

gdzie $q = k - k' = p' - p$.

3.1 Wyliczenie tensora $L_{\mu\nu}$

Tensor leptonowy zdefiniowaliśmy jako (por. (2.49))

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} m^2 \sum_{spin} (\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)) (\bar{u}(k') \gamma_\nu u(k))^* \quad (3.6)$$

Korzystając z własności macierzy γ : $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$, możemy go zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}m^2 \sum_{spin} (\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)) (\bar{u}(k')\gamma_\nu u(k))^* \\
&= \frac{1}{2}m^2 \sum_{spin} (\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)) (u^\dagger(k')\gamma_0\gamma_\nu u(k))^* \\
&= \frac{1}{2}m^2 \sum_{spin} (\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)) (u^\dagger(k)\gamma_\nu^+\gamma_0 u(k')) \quad (3.7) \\
&= \frac{1}{2}m^2 \sum_{spin} (\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)) (u^\dagger(k)\gamma_0\gamma_\nu\gamma_0\gamma_0 u(k')) \\
&= \frac{1}{2}m^2 \sum_{spin} (\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)) (\bar{u}(k)\gamma_\nu u(k'))
\end{aligned}$$

Przy naszej normalizacji (por. [3])

$$\sum_{spin} u_\alpha(k, s)\bar{u}_\beta(k, s) = \frac{1}{2m} (k^\mu\gamma_\mu + m)_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

zatem

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}m^2 \sum_{spin} (\bar{u}_\alpha(k')\gamma_{\mu,\alpha\beta} u_\beta(k)) (\bar{u}_\rho(k)\gamma_{\nu,\rho\sigma} u_\sigma(k')) \\
&= \frac{1}{2}m^2 \gamma_{\mu,\alpha\beta} \gamma_{\nu,\rho\sigma} \frac{1}{2m} (k^\tau\gamma_\tau + m)_{\beta\rho} \frac{1}{2m} (k'^\delta\gamma_\delta + m)_{\alpha\sigma} \quad (3.9) \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} [\gamma_\mu (k^\tau\gamma_\tau + m) \gamma_\nu (k'^\delta\gamma_\delta + m)]
\end{aligned}$$

Wiemy, że dla macierzy γ_μ zachodzi

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \{\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= 4g^{\mu\nu} \\
\text{Tr} \{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\tau\} &= 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau} + g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma}) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

a ślad z iloczynu nieparzystej ilości macierzy γ_μ jest równy zeru. Jeśli skorzystamy z powyższych własności oraz liniowości śladu, otrzymamy

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr} \{\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\delta\} k^\tau k'^\delta + \frac{1}{8} \text{Tr} \{\gamma_\mu\gamma_\nu\} m^2 \\
&= \frac{1}{2} (g_{\mu\tau}g_{\nu\delta} - g_{\mu\nu}g_{\tau\delta} + g_{\mu\delta}g_{\tau\nu}) k^\tau k'^\delta + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \quad (3.11) \\
&= \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k k' + g_{\mu\nu} m^2)
\end{aligned}$$

3.2 Wylczenie tensora $H^{\mu\nu}$

Zgodnie z (3.3) tensor hadronowy ma postać

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{2}M^2 \sum_{spin} (\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p)\Gamma^\nu u(p')) \quad (3.12)$$

Najogólniejsza postać macierzy wierzchołka oddziaływania może być zbudowana z macierzy $\mathbb{1}$, γ^μ , $\sigma^{\mu\nu}$, γ_5 i $\gamma^\mu\gamma_5$ oraz pędów p_μ i p'_μ . Jednak chcemy, aby Γ^μ transformowała się jak wektor, a macierz γ_5 transformuje się jak pseudowektor, więc nie będziemy jej brać pod uwagę. Ponieważ nukleony są na powłoce masy, liczba niezależnych wyrażeń jest zredukowana przez równanie Diraca. Gdy weźmiemy jeszcze pod uwagę fakt, że prąd elektromagnetyczny jest zachowany, to okazuje się, że macierz wierzchołka możemy zapisać z dokładnością do dwóch funkcji skalarnych (tzw. czynników postaci), wyznaczanych doświadczalnie. Ponieważ jedyne skalary jakie można zbudować z p i p' , to $p^2 = p'^2 = M^2$ i pp' , a $q^2 = (p' - p)^2 = 2M^2 - 2pp'$, czynniki postaci zależą jedynie od q^2 . Spośród możliwych reprezentacji macierzy Γ^μ my będziemy korzystać z

$$\Gamma^\mu = (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \gamma^\mu - \frac{(p + p')^\mu}{2M} F_2(q^2) \quad (3.13)$$

Korzystając z (3.8) i (3.10), mamy

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} M^2 \sum_{spin} (\bar{u}(p') \Gamma_\mu u(p)) (\bar{u}(p) \Gamma_\nu u(p')) \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} \left\{ \left((F_1(q^2) + F_2(q^2)) \gamma_\mu - \frac{F_2(q^2)}{2M} (p + p')_\mu \right) (\not{p}' + M) \right. \\
&\quad \left. \left((F_1(q^2) + F_2(q^2)) \gamma_\nu - \frac{F_2(q^2)}{2M} (p + p')_\nu \right) (\not{p}' + M) \right\} \\
&= \frac{1}{8} \left[(F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 \text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{p}' + M) \gamma_\nu (\not{p}' + M) \} \right. \\
&\quad + \left(\frac{F_2(q^2)}{2M} \right)^2 (p + p')_\mu (p + p')_\nu \text{Tr} \{ (\not{p}' + M) (\not{p}' + M) \} \\
&\quad - (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \frac{F_2(q^2)}{2M} (p + p')_\mu \text{Tr} \{ (\not{p}' + M) \gamma_\nu (\not{p}' + M) \} \\
&\quad \left. - (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \frac{F_2(q^2)}{2M} (p + p')_\nu \text{Tr} \{ (\not{p}' + M) \gamma_\mu (\not{p}' + M) \} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 (p_\mu p'_\nu - g_{\mu\nu} p p' + p_\nu p'_\mu + M^2 g_{\mu\nu}) \right. \\
&\quad + \left(\frac{F_2(q^2)}{2M} \right)^2 (p + p')_\mu (p + p')_\nu (p p' + M^2) \\
&\quad - (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \frac{F_2(q^2)}{2M} (p + p')_\mu M (p + p')_\nu \\
&\quad \left. - (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \frac{F_2(q^2)}{2M} (p + p')_\nu M (p + p')_\mu \right] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Jeżeli pod p' wstawimy $p' = p + q$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[(F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 (2p_\mu p_\nu + (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + g_{\mu\nu} (M^2 - M^2 - pq)) \right. \\
&\quad + \left(\frac{F_2(q^2)}{2M} \right)^2 (2M^2 + pq) (4p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu + 2(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu)) \\
&\quad \left. - \frac{F_2(q^2)}{2M} (F_1(q^2) + F_2(q^2)) M^2 (4p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu + 2(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu)) \right] \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Końcowy wynik na $H_{\mu\nu}$ zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) q^2 (F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 \\
&\quad + \left(p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu \right) \left(F_1^2(q^2) - \frac{F_2^2(q^2)}{4M^2} q^2 \right) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że równość ta jest prawdziwa.

3.3 Wylczenie $L_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$

Tensor leptonowy zadany jest przez⁶ (por. (3.11))

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k k')$$
 (3.17)

Tensor $H_{\mu\nu}$ (3.16) rozłożymy na dwie części

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{q^2}{4} (F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 + p_\mu p_\nu \left(F_1^2(q^2) - \frac{F_2^2(q^2)}{4M^2} q^2 \right) + H(q) \equiv H_{\mu\nu}^{eff} + H(q)$$
 (3.18)

gdzie $H(q)$ jest częścią zawierającą q_μ, q_ν . Wiemy, że $q_\mu L^{\mu\nu} = q_\nu L^{\mu\nu} = 0$, więc

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^{eff} &= \frac{q^2}{8} (F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 (-2kk') \\ &+ \left(F_1^2(q^2) - \frac{F_2^2(q^2)}{4M^2} q^2 \right) \left[(pk)(pk') - \frac{M^2}{2} kk' \right] \end{aligned}$$
 (3.19)

Gdy pomijamy masę elektronu, to $q^2 = (k - k')^2 = -2kk'$, zatem

$$L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{q^4}{8} (F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 + \left(F_1^2(q^2) - \frac{F_2^2(q^2)}{4M^2} q^2 \right) \left[(pk)(pk') + \frac{M^2}{4} q^2 \right]$$
 (3.20)

Wstawiając $L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$ do wzoru na przekrój czynny (3.5), możemy wylczyć inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na pojedynczym nukleonie. Różnica między protonem a neutronem pojawi się w czynnikach postaci.

3.4 Gaz Fermiego

Gdy wiemy już jak liczyć przekrój czynny na rozpraszanie elektronu na pojedynczym nukleonie, możemy uogólnić otrzymany rezultat na zderzenie elektronu z jądrem atomowym. Najprościej jest traktować jądro jak gaz Fermiego,

⁶Masa elektronu została pominięta.

czyli przyjąć, że nukleony znajdują się w studni potencjału i nie oddziałują ze sobą. Oczywiście nie jest to dobre odzwierciedlenie rzeczywistości, ale sprawdza się w roli pierwszego przybliżenia.

Warto zwrócić uwagę, że istnieją różne definicje gazu Fermiego. W naszym przypadku nie ma większego znaczenia, którą wybierzemy, ponieważ głównym celem pracy jest skonfrontowanie wyników, które otrzymamy prowadząc rachunki dla tego samego procesu w różnych bazach. Z tego samego powodu nie będziemy też wnikać w szczegóły modelu.

W przypadku swobodnego nukleonu korzystaliśmy z faktu, iż znajduje się on na powłoce masy, czyli jego energia $E_i = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}$. Energia nukleonu związanego w jądrze \tilde{E}_i jest pomniejszona o energię wiązania B

$$\tilde{E}_i = E_i - B = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} - B \quad (3.21)$$

Z tego względu postać macierzy wierzchołka oddziaływania Γ^μ (3.13) jest słuszna tylko dla nukleonów swobodnych, ponieważ liczba funkcji skalarnych, od których zależy Γ^μ , zredukowana była przez równanie Diraca. Podobnie spinor Diraca dla nukleonu związanego będzie różny od tego, z którego korzystaliśmy przy liczeniu tensora hadronowego.

W rachunkach użyjemy przybliżenia, w którym spinor Diraca dla nukleonu oddziałującego będziemy traktować jak swobodny oraz wykorzystamy swobodną postać macierzy wierzchołka oddziaływania, ale energię nukleonu swobodnego E_i w końcowym wzorze na przekrój czynny zastąpimy energią nukleonu związanego \tilde{E}_i .

Licząc przekrój czynny będziemy uśredniać po możliwych wartościach pędu nukleonu początkowego, pamiętając o tym, że w stanie podstawowym obsadzone są wszystkie pędy do pędu Fermiego p_F . W związku z czym różniczkowy przekrój czynny (por. 3.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE'd\Omega} &= \int \frac{d^3p}{\frac{4}{3}\pi p_F^3} \frac{e^4}{q^4} \frac{E'}{EE_f\tilde{E}_i} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_f + E' - E - \tilde{E}_i) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \\ &= \frac{6\alpha^2}{2\pi p_F^3 q^4} \frac{E'}{EE_f} \int_{-1}^1 d\cos\theta_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_0^{p_F} d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2}{\tilde{E}_i} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \cdot \\ &\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - \tilde{E}_i) \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdzie $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ jest stałą struktury subtelnej.

Wyrażenie wewnątrz delty Diraca możemy potraktować jak funkcję kąta, zawartego między wektorem pędu nukleonu początkowego oraz wektorem przekazu pędu. W ogólności kąt ten nie ma związku z kątami, po których

całkujemy. Jednak, gdy wybierzemy oś z wzdłuż wektora \vec{q} , staje się on kątem biegunowym θ_p .

$$\begin{aligned}
\delta(f(\cos_p)) &= \delta(E_f + E' - E - \tilde{E}_i) = \delta\left(E' - \tilde{E}_i - E + \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}\right) \\
&= \delta\left(E' - \tilde{E}_i - E + \sqrt{(\vec{p} + \vec{q})^2 + M^2}\right) \\
&= \delta\left(E' - \tilde{E}_i - E + \sqrt{\vec{p}^2 + \vec{q}^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta_p + M^2}\right) \\
&= \delta\left(E' - \tilde{E}_i - E + \sqrt{E_i^2 + \vec{q}^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta_p}\right) \\
&= \left|\frac{\partial f(\cos\theta_p)}{\partial \cos\theta_p}\right|^{-1} \delta(\cos\theta_p - \cos\theta_{p,0})
\end{aligned} \tag{3.23}$$

gdzie $\cos\theta_{p,0}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(\cos\theta_p)$, czyli

$$\begin{aligned}
E' - \tilde{E}_i - E + \sqrt{E_i^2 + \vec{q}^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta_{p,0}} &= 0 \\
\cos\theta_{p,0} &= \frac{(E + \tilde{E}_i - E')^2 - E_i^2 - \vec{q}^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pozostaje nam wyliczyć pochodną

$$\frac{\partial f(\cos\theta_p)}{\partial \cos\theta_p} = \frac{2|\vec{p}||\vec{q}|}{2\sqrt{E_i^2 + \vec{q}^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos_p}} = \frac{|\vec{p}||\vec{q}|}{E_f} \tag{3.25}$$

Po zamianie argumentu delty Diraca możemy wykonać całkowanie po $\cos\theta_p$ we wzorze na przekrój czynny (3.22), pamiętając, że po tej operacji $\cos\theta_p$ zadany jest przez (3.24). Wyrażenie na przekrój czynny przybiera postać

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{6\alpha^2}{2\pi p_F^3 q^4 |\vec{q}|} \frac{E'}{E} \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_0^{p_F} d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{E_i} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \tag{3.26}$$

gdzie $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$ wynosi (por. (3.20))

$$L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{q^4}{8} (F_1(q^2) + F_2(q^2))^2 + \left(F_1^2(q^2) - \frac{F_2^2(q^2)}{4M^2} q^2\right) \left[(pk)(pk') + \frac{M^2}{4} q^2\right] \tag{3.27}$$

Aby móc wyliczyć przekrój czynny, pozostaje nam wyznaczyć pk oraz pk'

$$pk = \tilde{E}_i E - \vec{p}\vec{k} \quad (3.28)$$

$$pk' = \tilde{E}_i E' - \vec{p}\vec{k}' = \tilde{E}_i E' - \vec{p}(\vec{k} - \vec{q}) = \tilde{E}_i E' + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta_p - \vec{p}\vec{k} \quad (3.29)$$

co, jak widać, sprowadza się do obliczenia iloczynu skalarnego $\vec{p}\vec{k}$. Jeżeli wybierzemy układ współrzędnych jak na rysunku, to

$$\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta_p \cos \varphi_p, \sin \theta_p \sin \varphi_p, \cos \theta_p) \quad (3.30)$$

oraz

$$\vec{k} = |\vec{k}|(0, \sin \theta_k, \cos \theta_k) \quad (3.31)$$

zatem iloczyn skalarny

$$\vec{p}\vec{k} = |\vec{p}||\vec{k}|(\sin \theta_k \sin \theta_p \sin \varphi_p + \cos \theta_k \cos \theta_p) \quad (3.32)$$

gdzie $\cos \theta_p$ zadany jest przez (3.24), a $\cos \theta_k$ możemy wyznaczyć, korzystając z $k' = k - q$ oraz $k'^2 = k^2 = m^2 \approx 0$

$$\begin{aligned} k'^2 = (k - q)^2 = k^2 + q^2 - 2kq = q^2 - 2Eq_0 + 2|\vec{k}||\vec{q}| \cos \theta_k = 0 \\ \cos \theta_k = \frac{2E(E - E') - q^2}{2E|\vec{q}|} \end{aligned} \quad (3.33)$$

W ścisły sposób wyliczyliśmy przekrój czynny na rozpraszanie elektronu na pojedynczym nukleonie związanym w jądrze. Rozważając rozpraszanie na jądrze, musimy wziąć pod uwagę wkład od wszystkich protonów i neutronów. Przekrój czynny będziemy liczyć dla jądra tlenu. Ze względu na symetryczny rozkład nukleonów ($Z = A/2$) pęd Fermiego będzie taki sam dla wszystkich nukleonów⁷.

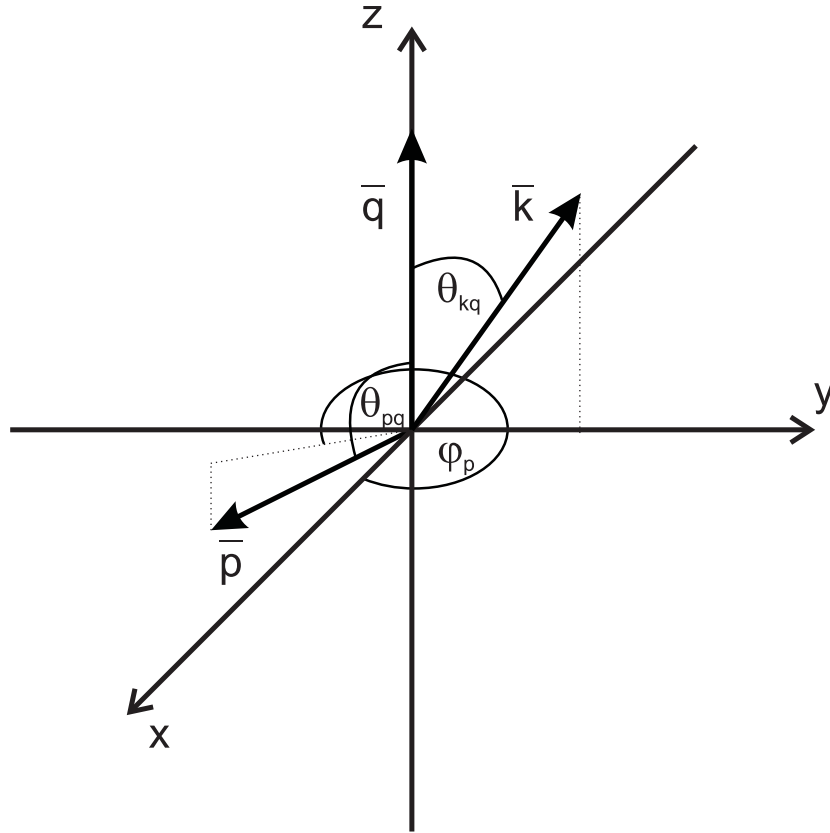
Dla czynników postaci wygodnie jest wprowadzić parametryzację (por. [6])

$$F_1(q^2) = \frac{G_E(q^2) + \tau G_M(q^2)}{1 + \tau} \quad (3.34)$$

oraz

$$F_2(q^2) = \frac{G_M(q^2) - G_E(q^2)}{1 + \tau} \quad (3.35)$$

⁷Dla jąder, które posiadają różną liczbę protonów i neutronów, trzeba rozpatrzyć dwa pędy Fermiego - osobno dla protonów i neutronów.



gdzie $\tau = -\frac{q^2}{4M^2}$. *Form factory* elektryczny $G_E(q^2)$ i magnetyczny $G_M(q^2)$ wyznaczane są doświadczalnie - osobno dla protonu i neutronu. Wynoszą dla protonu

$$G_E^p(q^2) = G_D(q^2) \quad G_M^p(q^2) = \mu_p G_D(q^2) \quad (3.36)$$

i dla neutronu

$$G_E^n(q^2) = 0 \quad G_M^n(q^2) = \mu_n G_D(q^2) \quad (3.37)$$

gdzie $\mu_p = 2,79$ oznacza moment magnetyczny protonu, a $\mu_n = -1,91$ - neutronu. $G_D(q^2)$ jest zadane przez formułę dipolową.

$$G_D(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{0,71 \text{GeV}^2}\right)^{-2} \quad (3.38)$$

Wykorzystując $G_D(q^2)$, czynniki postaci zapisujemy w postaci

$$F_1^p(q^2) = \frac{1 + \mu_p \tau}{1 + \tau} G_D(q^2) \quad (3.39)$$

$$F_2^p(q^2) = \frac{\mu_p - 1}{1 + \tau} G_D(q^2) = \frac{\kappa_p}{1 + \tau} G_D(q^2) \quad (3.40)$$

dla protonu (gdzie $\kappa_p = \mu_p - 1$ jest anomalnym momentem magnetycznym protonu) oraz

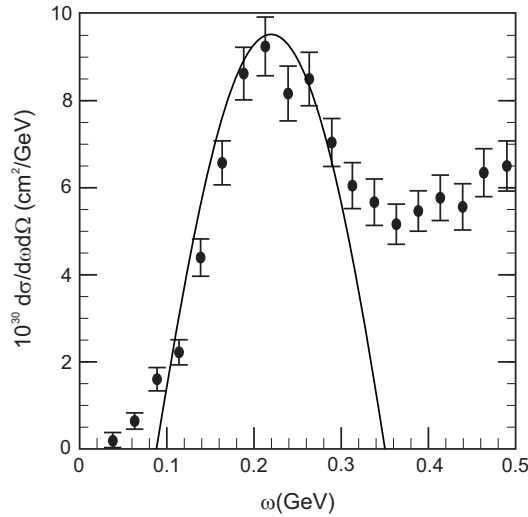
$$F_1^n(q^2) = \frac{\mu_n \tau}{1 + \tau} G_D(q^2) \quad (3.41)$$

$$F_2^n(q^2) = \frac{\mu_n}{1 + \tau} G_D(q^2) \quad (3.42)$$

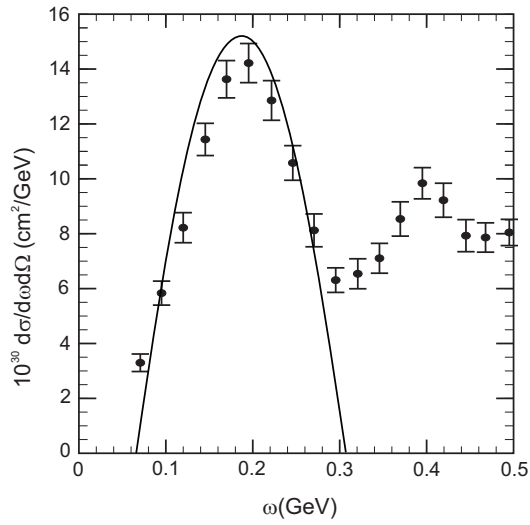
dla neutronu.

Inkluzywny przekrój czynny na rozpraszanie elektronu na jądrze tlenu jest równy

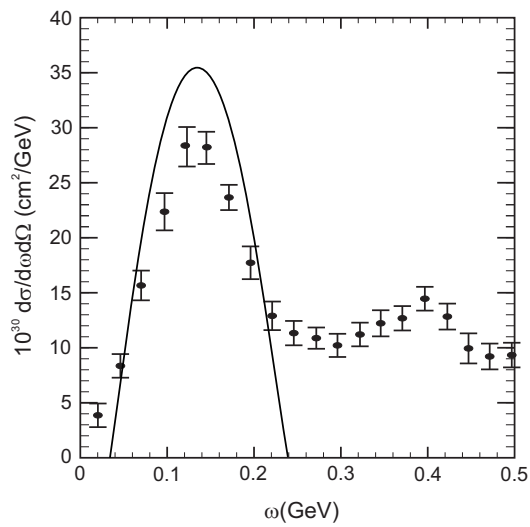
$$\left(\frac{d\sigma}{dE' d\cos\theta} \right)_{total} = 8 \cdot \left(\frac{d\sigma}{dE' d\cos\theta} \right)_{proton} + 8 \cdot \left(\frac{d\sigma}{dE' d\cos\theta} \right)_{neutron} \quad (3.43)$$



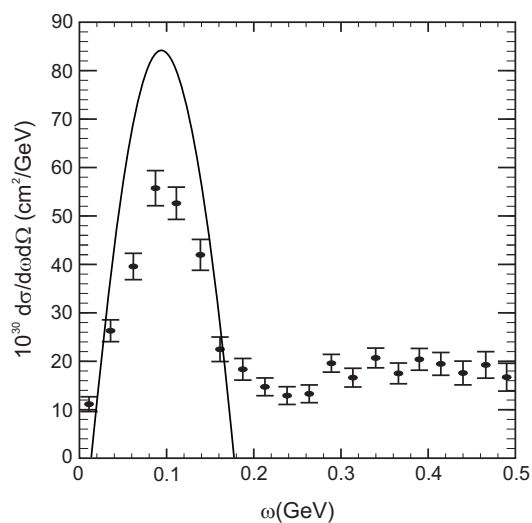
Rysunek 1: Inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu przy energii padającego elektronu $E = 1200 MeV$ i kącie rozpraszania 32° . Dane doświadczalne zaczerpnięte zostały z prac [8], [9].



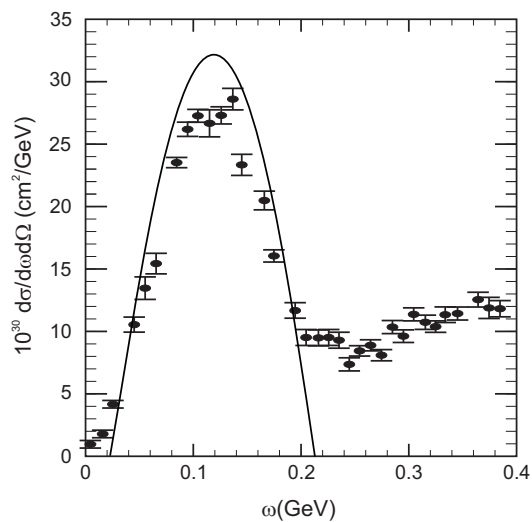
Rysunek 2: Inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu przy energii padającego elektronu $E = 1080 MeV$ i kącie rozpraszania 32° . Dane doświadczalne zaczerpnięte zostały z prac [8], [9].



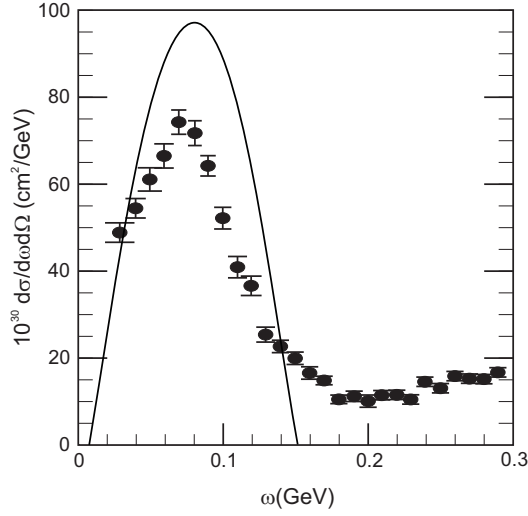
Rysunek 3: Inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu przy energii padającego elektronu $E = 880 MeV$ i kącie rozpraszania 32° . Dane doświadczalne zaczerpnięte zostały z prac [8], [9].



Rysunek 4: Inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu przy energii padającego elektronu $E = 700\text{MeV}$ i kącie rozpraszania 32° . Dane doświadczalne zaczerpnięte zostały z prac [8], [9].



Rysunek 5: Inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu przy energii padającego elektronu $E = 730\text{MeV}$ i kącie rozpraszania 37.1° . Dane doświadczalne zaczerpnięte zostały z pracy [10].



Rysunek 6: Inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu przy energii padającego elektronu $E = 537MeV$ i kącie rozpraszania 37.1° . Dane doświadczalne zaczerpnięte zostały z pracy [10].

Wykresy przedstawione na rysunkach (1)-(6) przedstawiają inkluzywny przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu dla różnych energii elektronu padającego i kątów rozpraszania. Rachunki zostały wykonane numerycznie, przy czym przyjąłem energię wiązania $B = 27MeV$ oraz pęd Fermiego $p_f = 225MeV$.

Widać wyraźnie, że przybliżenie impulsowe jest tym dokładniejsze, im większa jest energia padającego elektronu. Model sprawdza się dla niewielkich przekazów energii $\omega = E - E'$. Przy wyższych wartościach ω widoczne są (szczególnie na wykresach (2) i (3) w okolicy $\omega \approx 0,4GeV$) piki odzwierciedlające powstanie rezonansu Δ , których gaz Fermiego nie odtwarza.

Warto zauważyć, że pik odpowiadający rozpraszaniu elastycznemu nie jest ostry, czego można byłoby się spodziewać, ponieważ w przybliżeniu impulsowym elektron oddziałuje z pojedynczym nukleonem. Łatwo się przekonać, że szerokość piku jest związana z rozkładem pędów nukleonów w jądrze. Kolejnej informacji dostarcza nam położenie piku, z którego możemy wyznaczyć energię wiązania.

4 Nukleon końcowy w bazie momentu pędu

W tym rozdziale zajmiemy się wyliczeniem inkluzywnego przekroju czynnego na rozpraszanie elektronu na jądrze atomowym, opisując nukleon wybity przez funkcję falową, będącą rozwiązaniem równania Diraca w bazie momentu pędu. Najpierw znajdziemy rozwiązanie ogólne równania Diraca dla cząstki w potencjale centralnym. Następnie znajdziemy postać funkcji falowej w sytuacji, gdy potencjał jest równy zero i wyliczymy dla niej przekrój czynny.

Wynik końcowy nie może zależeć od wyboru bazy, stąd oczekujemy, że rezultat otrzymany w tym rozdziale będzie dokładnie taki sam, jak dla cząstki swobodnej w bazie pędowej.

4.1 Równanie Diraca z potencjałem centralnym

Hamiltonian dla cząstki masywnej, znajdującej się w potencjale centralnym, zadany jest przez

$$\hat{H} = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m + V(r) \quad (4.1)$$

gdzie α , β są macierzami 4x4 i spełniają

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad \{\alpha_j, \beta\} = 0 \quad \beta^2 = \mathbb{1} \quad (4.2)$$

co jest bezpośrednią konsekwencją równania $E^2 = p^2 + m^2$.

Istnieje wiele sposobów wyboru macierzy α i β tak, aby spełniały one (4.2). My będziemy pracować w reprezentacji Pauliego-Diraca, w której

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

gdzie σ_j są macierzami Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Jak już było wspomniane, szukamy rozwiązania w bazie momentu pędu. Operator całkowitego momentu \hat{J} pędu jest sumą orbitalnego \hat{L} i wewnętrznego \hat{S} momentu pędu. Każda składowa \hat{J} działa tylko na zmienne kątowe, więc w oczywisty sposób komutuje z każdym operatorem, działającym na zmienną radialną. Mamy zatem

$$\left[\hat{H}, \hat{J}_k \right] = 0 \quad (4.5)$$

Rozumiemy przez to, że hamiltonian jest niezmienniczy względem obrotów. Bezpośrednio z (4.5) wynika, że hamiltonian komutuje również z \hat{J}^2 . Jako zbiór zupełny komutujących obserwabli wybierzemy \hat{H} , \hat{J}^2 i \hat{J}_3 i szukamy funkcji falowej ψ_{EjM} , która spełnia

$$\hat{H}\psi_{EjM} = E\psi_{EjM} \quad (4.6)$$

$$\hat{J}^2\psi_{EjM} = j(j+1)\psi_{EjM} \quad (4.7)$$

$$\hat{J}_3\psi_{EjM} = M\psi_{EjM} \quad (4.8)$$

Ponieważ hamiltonian działa tylko na część radialną, a operator momentu pędu na część kątową, wygodnie jest dokonać separacji zmiennych i zapisać funkcję falową w postaci

$$\psi_{EjM}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} g(r)\phi(\theta, \varphi) \\ if(r)\chi(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4.1.1 Część kątowa

W pierwszej kolejności zajmiemy się częścią kątową. Wykorzystamy fakt, że harmoniki sferyczne Y_l^m są funkcjami własnymi operatorów \hat{L}^2 i \hat{L}_3 o wartościach własnych odpowiednio $l(l+1)$ i m

$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1)Y_l^m \quad (4.10)$$

$$\hat{L}_3 Y_l^m = mY_l^m \quad (4.11)$$

Rozwiązania będziemy szukać w postaci

$$\phi, \chi \sim \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m'} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Operator całkowitego momentu pędu jest sumą orbitalnego momentu pędu i spinu. W reprezentacji Pauliego-Diraca ma postać

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} = \hat{r} \times \hat{p} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} = \hat{r} \times \hat{p} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Porównując to z (4.8), otrzymamy

$$\hat{J}_3 \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m'} \end{pmatrix} = \left(\hat{L}_3 + \frac{1}{2}\sigma_3 \right) \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(m + \frac{1}{2})Y_l^m \\ b(m' - \frac{1}{2})Y_l^{m'} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m'} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Widać, że jeżeli (4.12) mam być stanem własnym trzeciej składowej operatora całkowitego momentu pędu, to musi zachodzić $m' = m + 1$. Ma więc strukturę

$$\begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

i odpowiada wartości własnej $M = m + \frac{1}{2}$.

Operator spinu komutuje z operatorem orbitalnego momentu pędu, więc kwadrat operatora całkowitego momentu pędu (por. (4.13)) jest równy

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L}\hat{S} \quad (4.16)$$

Z własności macierzy Pauliego wynika, że $(\vec{\sigma})^2 = 3 \cdot \mathbb{1}$, więc kwadrat operatora spinu $\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \cdot \mathbb{1}$. Wartość własną $2\hat{L}\hat{S}$ oznaczmy na razie przez κ

$$2\hat{L}\hat{S} \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} = \hat{L}\vec{\sigma} \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Dla kwadratu całkowitego momentu pędu możemy teraz zapisać

$$\hat{J}^2 \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} = \left(\hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L}\hat{S} \right) \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} = \left(l(l+1) + \frac{3}{4} + \kappa \right) \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Aby zidentyfikować κ , zapiszmy $\hat{L}\vec{\sigma}$ w jawnej postaci

$$\hat{L}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{L}_3 & \hat{L}_1 - i\hat{L}_2 \\ \hat{L}_1 + i\hat{L}_2 & -\hat{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L}_3 & \hat{L}_- \\ \hat{L}_+ & -\hat{L}_3 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Jak wiemy, operatory $\hat{L}\pm$ odpowiednio obniżają lub zwiększają trzecią składową momentu pędu o 1 (por. [7] rozdz. 5)

$$\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle = C_\pm(l, m) |l, m \pm 1\rangle \quad (4.20)$$

mamy zatem

$$\begin{aligned}
\hat{L}\vec{\sigma} \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a\hat{L}_3 Y_l^m + b\hat{l}_- Y_l^{m+1} \\ a\hat{L}_+ Y_l^m - b\hat{L}_3 Y_l^{m+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} amY_l^m + bC_-(l, m+1)Y_l^m \\ aC_+(l, m)Y_l^{m+1} - b(m+1)Y_l^{m+1} \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} aY_l^m \\ bY_l^{m+1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

gdzie $C_-(l, m+1) = C_+(l, m) = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}$. Jeżeli (4.15) ma być stanem o dobrze określonej wartości kwadratu momentu pędu, musi zachodzić

$$\begin{cases} am + b\sqrt{(l+m+1)(l-m)} = \kappa a \\ a\sqrt{(l+m+1)(l-m)} - b(m+1) = \kappa b \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} a(m-\kappa) + b\sqrt{(l+m+1)(l-m)} = 0 \\ a\sqrt{(l+m+1)(l-m)} - b(m+1+\kappa) = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

Taki układ równań ma niezerowe rozwiązanie, jeżeli wyznacznik główny jest równy zeru, czyli

$$\left| \begin{array}{cc} m-\kappa & \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \\ \sqrt{(l+m+1)(l-m)} & -(m+\kappa+1) \end{array} \right| = 0 \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
-(m-\kappa)(m+\kappa+1) - (l+m+1)(l-m) &= 0 \\
-m^2 - m\kappa - m + m\kappa + \kappa^2 + \kappa - l^2 + lm - lm - l + m^2 + m &= 0 \\
\kappa^2 + \kappa - l^2 - l &= 0 \\
(\kappa-l)(\kappa+l) + \kappa - l &= 0 \\
(\kappa-l)(\kappa+l+1) &= 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Mamy dwa rozwiązania $\kappa = l$ oraz $\kappa = -l-1$, które wiążemy odpowiednio z ϕ i χ (por. (4.9)). Wracając do (4.18) i mając na uwadze (4.7), otrzymujemy zależność całkowitego momentu pędu z orbitalnym momentem pędu ⁸

⁸Pamiętając o tym, że orbitalny moment pędu l przyjmuje wartości nieujemne, a całkowity moment pędu $j = l \pm \frac{1}{2}$, mamy $|l| = l$ oraz $|j + \frac{1}{2}| = j + \frac{1}{2}$

$$\begin{cases}
j(j+1) = l(l+1) + \frac{3}{4} + l & \text{dla } \kappa = l \\
j(j+1) = l(l+1) + \frac{3}{4} - l - 1 & \text{dla } \kappa = -l - 1 \\
\begin{cases}
l^2 + 2l + 1 = j^2 + j + \frac{1}{4} & \text{dla } \kappa = l \\
l^2 = j^2 + j + \frac{1}{4} & \text{dla } \kappa = -l - 1
\end{cases} \\
\begin{cases}
(l+1)^2 = (j + \frac{1}{2})^2 & \text{dla } \kappa = l \\
l^2 = (j + \frac{1}{2})^2 & \text{dla } \kappa = -l - 1
\end{cases} \\
l = \begin{cases}
j - \frac{1}{2} & \text{dla } \kappa = l \\
j + \frac{1}{2} & \text{dla } \kappa = -l - 1
\end{cases}
\end{cases} \quad (4.26)$$

Z fizycznego punktu widzenia sytuacja odpowiada dwóm możliwościom łączenia orbitalnego momentu pędu ze spinem.

Pozostaje nam wyliczyć współczynniki a i b , co robimy niezależnie dla ϕ i χ . Z (4.23) dla $\kappa = l$ mamy

$$a(m-l) + b\sqrt{(l+m+1)(l-m)} = 0 \Rightarrow a = b\sqrt{\frac{l+m+1}{l-m}} \quad (4.27)$$

Wybieramy taką normalizację, że $|a|^2 + |b|^2 = 1$, wtedy

$$b^2 \frac{l+m+1}{l-m} + b^2 = b^2 \left(1 + \frac{l+m+1}{l-m}\right) = b^2 \frac{2l+1}{l-m} = 1 \quad (4.28)$$

$$b = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} = \sqrt{\frac{j - \frac{1}{2} - m}{2(j - \frac{1}{2}) + 1}} = \sqrt{\frac{j - M}{2j}} \quad (4.29)$$

$$a^2 = 1 - b^2 = 1 - \frac{l-m}{2l+1} = \frac{l+m+1}{2l+1} \quad (4.30)$$

$$a = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} = \sqrt{\frac{j - \frac{1}{2} + m + 1}{2(j - \frac{1}{2}) + 1}} = \sqrt{\frac{j + M}{2j}} \quad (4.31)$$

Analogicznie dla $\kappa = -l - 1$ mamy

$$a(l+m+1) + b\sqrt{(l+m+1)(l-m)} = 0 \Rightarrow a = -b\sqrt{\frac{l-m}{l+m+1}} \quad (4.32)$$

$$b^2 \frac{l-m}{l+m+1} + b^2 = b^2 \left(\frac{l-m}{l+m+1} + 1\right) = b^2 \frac{2l+1}{l+m+1} \quad (4.33)$$

$$b = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} = \sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}+m+1}{2(j+\frac{1}{2})+1}} = \sqrt{\frac{j+M+1}{2j+2}} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} a &= -b\sqrt{\frac{l-m}{l+m+1}} = -\sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\sqrt{\frac{l-m}{l+m+1}} = -\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} \\ &= -\sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}-m}{2(j+\frac{1}{2})+1}} = -\sqrt{\frac{j-M+1}{2j+2}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Zbierając powyższe wyniki, otrzymamy

$$\phi_{jM}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

oraz

$$\chi_{jM}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-M+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j+M+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

W ten sposób otrzymaliśmy ogólne rozwiązania równania Diraca w potencjale centralnym dla części kątovej. Pełna funkcja falowa jest równa (por. (4.9))

$$\psi_{EjM}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} g(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ if(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(r)\sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ g(r)\sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ -if(r)\sqrt{\frac{j-M+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ if(r)\sqrt{\frac{j+M+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Funkcje $g(r)$ i $f(r)$ zależą od potencjału. W następnym kroku dokonamy separacji zmiennych, otrzymując w ten sposób równania różniczkowe na funkcje $g(r)$ i $f(r)$.

4.1.2 Równania różniczkowe na $f(r)$ i $g(r)$

W celu wyznaczenia funkcji $g(r)$ i $f(r)$, wstawimy funkcję falową (4.38) do równania Diraca. Następnie dokonamy takich przekształceń, które doprowadzą do separacji części radialnej i części kątovej. Otrzymamy w ten sposób układ równań różniczkowych na funkcje $g(r)$ i $f(r)$.

$$\vec{\alpha}\hat{p}\psi_{EjM} + \beta m\psi_{EjM} + V(r)\psi_{EjM} = E\psi_{EjM} \quad (4.39)$$

Wykorzystując jawną postać macierzy $\vec{\alpha}$ i β w reprezentacji Pauliego-Diraca (por. (4.3)), mamy

$$\begin{aligned} i(\vec{\sigma}\hat{p})f(r)\chi_{jM}(\hat{r}) + mg(r)\phi_{jM}(\hat{r}) + Vg(r)\phi_{jM}(\hat{r}) &= Eg(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ (\vec{\sigma}\hat{p})g(r)\phi_{jM}(\hat{r}) - imf(r)\chi_{jM}(\hat{r}) + iVf(r)\chi_{jM}(\hat{r}) &= iEf(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

co zapiszemy w bardziej symetrycznej postaci

$$\begin{aligned} i(\vec{\sigma}\hat{p})f(r)\chi_{jM}(\hat{r}) &= (E - m - V(r))g(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ (\vec{\sigma}\hat{p})g(r)\phi_{jM}(\hat{r}) &= i(E + m - V(r))f(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Zanim przejdziemy do dalszych rachunków, zapiszemy operator pędu w postaci

$$\hat{p} = \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_r \cdot \hat{p}) - \frac{1}{r}(\vec{e}_r \times \hat{L}) \quad (4.42)$$

gdzie \vec{e}_r jest wektorem jednostkowym w kierunku promienia $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$. Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że powyższa równość jest prawdziwa

$$\begin{aligned} (\vec{e}_r \times \hat{L})_j &= \epsilon_{jkl} \frac{r_k}{r} \hat{L}_l = \epsilon_{jkl} \frac{r_k}{r} (r \times \hat{p})_l = \epsilon_{jkl} \frac{r_k}{r} \epsilon_{lmn} r_m \hat{p}_n \\ &= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{mk}) \frac{r_k}{r} r_m \hat{p}_n = r_j (\vec{e}_r \cdot \hat{p}) - r \hat{p}_j \end{aligned} \quad (4.43)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez r i przeniesieniu wyrażen na odpowiednie strony, otrzymamy (4.42). Korzystając z tej własności, operator $(\vec{\sigma}\hat{p})$ zapisujemy jako

$$(\vec{\sigma}\hat{p}) = (\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{e}_r \cdot \hat{p}) - \frac{1}{r}(\vec{\sigma}(\vec{e}_r \times \hat{L})) \quad (4.44)$$

Drugi człon możemy dodatkowo rozisać, korzystając z własności macierzy Pauliego

$$(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B}) = i\vec{A}\vec{B} - i(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) \quad (4.45)$$

która jest spełniona dla dowolnych wektorów \vec{A} i \vec{B} . Wobec czego mamy

$$(\vec{\sigma}\hat{p}) = (\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{e}_r\hat{p}) - \frac{i}{r}(\vec{e}_r\hat{L}) + \frac{i}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{\sigma}\hat{L}) \quad (4.46)$$

Operator $(\vec{e}_r\hat{L})$ jest tożsamościowo równy zeru. Możemy się łatwo o tym przekonać, zapisując go w jawnej postaci

$$(\vec{e}_r\hat{L})_j = \frac{r_j}{r}\hat{L}_j = \frac{r_j}{r}(r \times \hat{p})_j = \frac{r_j}{r}\epsilon_{jlm}r_l\hat{p}_m = 0 \quad (4.47)$$

Co wynika z faktu, iż iloczyn tensora symetrycznego (r_jr_l) oraz antysymetrycznego (ϵ_{jlm}) jest równy zeru. Zatem (4.46) sprowadza się do

$$(\vec{\sigma}\hat{p}) = (\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{e}_r\hat{p}) + \frac{i}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{\sigma}\hat{L}) \quad (4.48)$$

Operator ten działa na stany postaci $f(r)\phi_{jM}(\hat{r})$. W takiej sytuacji $(\vec{e}_r\hat{p})$ możemy zastąpić przez $-i\frac{\partial}{\partial r}$. Aby to pokazać skorzystamy z własności części kątovej (por. [5] rozdz. 9.5)

$$(\vec{e}_r\vec{\nabla})\phi_{jM}(\hat{r}) = 0 \quad (\vec{e}_r\vec{\nabla})\chi_{jM}(\hat{r}) = 0 \quad (4.49)$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} (\vec{e}_r\hat{p})(f(r)\phi_{jM}(\hat{r})) &= -i((\vec{e}_r\vec{\nabla})f(r))\phi_{jM}(\hat{r}) = -i\left(\vec{e}_r\vec{\nabla}r\frac{df(r)}{dr}\right)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ &= -i\vec{e}_r\frac{\vec{r}df(r)}{rdr}\phi_{jM}(\hat{r}) = -i\frac{df(r)}{dr}\phi_{jM}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Biorąc pod uwagę, że $\vec{\sigma}\vec{e}_r$ nie zależy od r , operator $(\vec{\sigma}\hat{p})$ zapisujemy ostatecznie w postaci

$$(\vec{\sigma}\hat{p}) = -i\frac{\partial}{\partial r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r) + \frac{i}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{\sigma}\hat{L}) \quad (4.51)$$

Wykorzystując tak zapisany operator w równaniach (4.41), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\chi_{jM}(\hat{r}) - \frac{f(r)}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{\sigma}\hat{L})\chi_{jM}(\hat{r}) &= (E - m - V(r))g(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ -\frac{dg(r)}{dr}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\phi_{jM}(\hat{r}) + \frac{g(r)}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)(\vec{\sigma}\hat{L})\phi_{jM}(\hat{r}) &= (E + m - V(r))f(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Z wcześniejszych rozważań wiemy, że

$$(\vec{\sigma}\hat{L})\chi_{jM}(\hat{r}) = \left(-j - \frac{3}{2}\right)\chi_{jM}(\hat{r}) \quad (4.53)$$

$$(\vec{\sigma}\hat{L})\phi_{jM}(\hat{r}) = \left(j - \frac{1}{2}\right)\phi_{jM}(\hat{r}) \quad (4.54)$$

zatem

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\chi_{jM}(\hat{r}) + \left(j + \frac{3}{2}\right)\frac{f(r)}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\chi_{jM}(\hat{r}) &= (E - m - V(r))g(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ -\frac{dg(r)}{dr}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\phi_{jM}(\hat{r}) + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{g(r)}{r}(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\phi_{jM}(\hat{r}) &= (E + m + V(r))f(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ostatecznej separacji zmiennych dokonamy, korzystając z własności (por. [5] rozdz. 9.5)

$$(\vec{\sigma}\vec{e}_r)\chi_{jM}(\hat{r}) = -\phi_{jM}(\hat{r}) \quad (\vec{\sigma}\vec{e}_r)\phi_{jM}(\hat{r}) = -\chi_{jM}(\hat{r}) \quad (4.56)$$

co da nam

$$\begin{aligned} -\frac{df(r)}{dr} - (1 + l')\frac{f(r)}{r} &= (E - m - V(r))g(r) \\ \frac{dg(r)}{dr} + (1 - l')\frac{g(r)}{r} &= (E + m - V(r))f(r) \end{aligned} \quad (4.57)$$

gdzie $l' = j + \frac{1}{2}$. Jest to ogólne rozwiązanie, które otrzymaliśmy bez żadnych założeń dotyczących potencjału (oczywiście oprócz centralności). Aby wyliczyć funkcje radialne, musimy zadać jego konkretną wartość. W następnym podrozdziale wyznaczymy funkcje $g(r)$ i $f(r)$ dla potencjału $V(r) = 0$.

4.2 Cząstka swobodna

Dla cząstki swobodnej równania (4.57) przybierają postać

$$\begin{aligned} -\frac{df(r)}{dr} - (1 + l')\frac{f(r)}{r} &= (E - m)g(r) \\ \frac{dg(r)}{dr} + (1 - l')\frac{g(r)}{r} &= (E + m)f(r) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Struktura jest taka sama jak w przypadku równania Schrödingera, więc oczekujemy, że funkcje $g(r)$ i $f(r)$ będzie można wyrazić przez funkcje Bessela.

Postępujemy analogicznie jak w mechanice kwantowej. Wprowadzimy funkcje pomocnicze

$$F(r) = rf(r) \qquad G(r) = rg(r) \qquad (4.59)$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} F(r) - \frac{1}{r^2} F(r) - \frac{l'}{r^2} F(r) &= \frac{(E-m)}{r} G(r) \\ -\frac{dF(r)}{dr} - \frac{l'}{r} F(r) &= (E-m)G(r) \end{aligned} \qquad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{dG(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} G(r) + \frac{1}{r^2} G(r) - \frac{l'}{r^2} G(r) &= \frac{(E+m)}{r} F(r) \\ \frac{dG(r)}{dr} - \frac{l'}{r} G(r) &= (E+m)F(r) \end{aligned} \qquad (4.61)$$

Z równania (4.60) wyznaczamy $G(r)$

$$G(r) = -\frac{1}{E-m} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{l'}{(E-m)r} F(r) \qquad (4.62)$$

i wstawiamy do równania (4.61)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{E-m} \frac{d^2 F(r)}{dr^2} - \frac{l'}{(E-m)r} \frac{dF(r)}{dr} + \frac{l'}{(E-m)r^2} F(r) \\ + \frac{l'}{(E-m)r} \frac{dF(r)}{dr} + \frac{l'^2}{(E-m)r^2} F(r) &= (E+m)F(r) \\ -\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{l'^2 + l'}{r^2} F(r) &= p^2 F(r) \\ \frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left(p^2 + \frac{-l'^2 - l'}{r^2} \right) F(r) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.63)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe na funkcję $F(r)$. Rozwiążemy je korzystając z funkcji Bessela. Ogólnym rozwiązaniem równania różniczkowego typu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\beta^2 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} \right) y = 0 \qquad (4.64)$$

jest kombinacja funkcji Bessela

$$y = \lambda_1 \sqrt{x} J_\nu(\beta x) + \lambda_2 \sqrt{x} J_{-\nu}(\beta x) \quad (4.65)$$

Porównując równanie (4.63) z (4.64) widzimy, że w naszym przypadku $\beta = p$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \nu^2 &= -l'^2 - l' \\ \nu^2 &= l'^2 + l' + \frac{1}{4} \\ \nu^2 &= \left(l' + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Musimy pamiętać o tym, że $l' = j + \frac{1}{2} > 0$, a funkcja Bessela nie jest określona dla $\nu < 0$, dlatego rozwiązanie równania (4.60) ograniczamy do

$$F(r) = \lambda \sqrt{pr} J_{l'+\frac{1}{2}}(pr) \quad (4.67)$$

Funkcje $G(r)$ wyznaczmy korzystając z własności funkcji Bessela

$$\frac{dJ_\nu(x)}{dx} = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \quad (4.68)$$

oraz równania (4.62)

$$\begin{aligned} G(r) &= -\frac{\lambda}{E-m} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{r}} J_{l'+\frac{1}{2}}(pr) + \sqrt{pr} \left(J_{l'-\frac{1}{2}}(pr) - \frac{l'+\frac{1}{2}}{pr} J_{l'+\frac{1}{2}}(pr) \right) p \right. \\ &\quad \left. + \frac{l'}{r} J_{l'+\frac{1}{2}}(pr) \right] \\ &= -\frac{p}{E-m} \lambda \sqrt{pr} J_{l'-\frac{1}{2}}(pr) = -\frac{\sqrt{(E-m)(E+m)}}{E-m} c \sqrt{pr} J_{l'-\frac{1}{2}}(pr) \\ &= -\sqrt{\frac{E+m}{E-m}} \lambda \sqrt{pr} J_{l'-\frac{1}{2}}(pr) = -\sqrt{\frac{E+m}{E-m}} \lambda \sqrt{pr} J_{l+\frac{1}{2}}(pr) \end{aligned} \quad (4.69)$$

gdzie $l = j - \frac{1}{2}$. Zgodnie z (4.59) funkcje $g(r)$ i $f(r)$ mają postać

$$g(r) = -\sqrt{\frac{E+m}{E-m}} \lambda \sqrt{\frac{p}{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(pr) \equiv -\sqrt{\frac{E+m}{E-m}} \lambda R_{pl}(r) \quad (4.70)$$

$$f(r) = \lambda \sqrt{\frac{p}{r}} J_{l'+\frac{1}{2}}(pr) \equiv \lambda R_{pl'}(r) \quad (4.71)$$

Stałą λ wyznaczmy z warunku normalizacji funkcji falowej, która przy tak zadanych funkcjach radialnych jest równa (por. (4.38))

$$\psi_{EjM}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E+m}{E-m}}\lambda R_{pl}(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ \lambda R_{p'l'}(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Funkcję falową normujemy do delt Diraca dla ciągłych stopni swobody oraz delt Kroneckera dla dyskretnych

$$\int d^3r \psi_{E'j'M'}^+ \psi_{EjM} = \delta(E' - E)\delta_{jj'}\delta_{MM'} \quad (4.73)$$

Z ortonormalności harmonik sferycznych wynika

$$\int d\Omega \phi_{j'M'}^+(\hat{r})\phi_{jM}(\hat{r}) = \int d\Omega \chi_{j'M'}^+(\hat{r})\chi_{jM}(\hat{r}) = \delta_{jj'}\delta_{MM'} \quad (4.74)$$

a z własności funkcji Bessela

$$\int x dx J_\nu(\beta'x)J_\nu(\beta x) = \frac{1}{\beta}\delta(\beta' - \beta) \quad (4.75)$$

mamy

$$\begin{aligned} \int r^2 dr R_{p'l}(r)R_{pl}(r) &= \int r^2 dr \sqrt{\frac{p'}{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(p'r)\sqrt{\frac{p}{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(pr) \\ &= \delta(p' - p) = \frac{p}{E}\delta(E' - E) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie na λ

$$\lambda^2 \left(1 + \frac{E+m}{E-m}\right) = \frac{E}{p} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{E-m}{2p}} \quad (4.77)$$

Znak stałej c jest tylko kwestią wyboru czynnika fazowego. Ostatecznie unormowania funkcja falowa dla cząstki swobodnej ma postać

$$\psi_{EjM}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2p}}R_{pl}(r)\phi_{jM}(\hat{r}) \\ -\sqrt{\frac{E-m}{2p}}R_{p'l'}(r)\chi_{jM}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

4.3 Tensor hadronowy

W tym rozdziale wyliczymy tensor hadronowy w przypadku, gdy nukleon początkowy jest zadany przez falę płaską, a nukleon wybity przez funkcję falową w bazie momentu pędu (4.78). Rachunki, prowadzące do wzoru na przekrój czynny (2.51), prowadziliśmy w skończonej objętości i musimy wziąć to pod uwagę przy normowaniu funkcji falowej. Dla kuli o promieniu R mamy (por. [5] rozdz. 9.8)

$$\int_0^R r^2 dr |\mathbf{R}_{pl}(r)|^2 = \frac{1}{\Delta} \quad (4.79)$$

gdzie $\Delta = \frac{\pi}{R}$. Stąd dobrze unormowana funkcja falowa w skończonej objętości jest zadana przez

$$|E_f j M\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_f+M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} \mathbf{R}_{p_f l}(r) \phi_{jM}(\hat{r}) \\ -\sqrt{\frac{E_f+M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} \mathbf{R}_{p_f l'}(r) \chi_{jM}(\hat{r}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{up}(\vec{r}) \\ \psi_{down}(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Cała informacja o stanach hadronowych zawarta jest w tensorze $W^{\mu\nu}$ (2.50)

$$W^{\mu\nu} = \sum \int d\beta E_f E_p \left| \int d^3y \langle E_f j M | J^\mu(\vec{y}) | p \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (4.81)$$

Przez $\sum \int d\beta$ rozumiemy całkowanie po wszystkich ciągłych stopniach swobody oraz sumowanie po dyskretnych. W przypadku funkcji falowej zadanej przez (4.80) mamy

$$\sum \int d\beta = \sum_{jM} \int \rho(E_f) dE_f \quad (4.82)$$

$\rho(E)dE$ opisuje liczbę możliwych stanów, jakie może przyjąć cząstka w przedziale $(E, E + dE)$. Aby wyznaczyć $\rho(E)$, rozważmy objętość dV w przestrzeni pędów

$$dV = \frac{4}{3}\pi p_2^3 - \frac{4}{3}\pi p_1^3 \quad (4.83)$$

gdzie $p_2 = \sqrt{(E + dE)^2 - M^2}$ a $p_1 = \sqrt{E^2 - M^2}$. Na jeden stan pędowy przypada objętość $\frac{(2\pi)^3}{V}$, zatem

$$\rho(E)dE = dV \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (4.84)$$

Skąd wyznaczamy $\rho(E)$

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{dV}{dE} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4}{3} \pi \frac{3}{2} (E^2 - M^2)^{\frac{1}{2}} 2E = \frac{V}{(2\pi)^2} 2pE \quad (4.85)$$

Zatem tensor hadronowy wynosi

$$W^{\mu\nu} = \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| \int d^3y \langle E_f j M | J^\mu(\vec{y}) | p \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (4.86)$$

Operator $J^\mu(\vec{y})$ możemy zapisać jako

$$J^\mu(\vec{y}) = e^{i\hat{P}\vec{y}} J^\mu(0) e^{-i\hat{P}\vec{y}} \quad (4.87)$$

co daje nam

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| \int d^3y \langle E_f j M | e^{i\hat{P}\vec{y}} J^\mu(0) e^{-i\hat{P}\vec{y}} | p \rangle e^{-i\vec{q}\vec{y}} \right|^2 \\ &\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\ &= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| \int d^3y \langle E_f j M | e^{i\hat{P}\vec{y}} J^\mu(0) | p \rangle e^{-i\vec{y}(\vec{q}+\vec{p})} \right|^2 \\ &\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Nie wiemy jak operator pędu działa na stan $|E_f j M\rangle$, ale możemy wykorzystać rozkład jedyńki w przestrzeni Hilberta i zapisać operator jednostkowy w postaci

$$\mathbf{1} = \sum_{\vec{p}', s'} |p' s'\rangle \langle p' s'| \quad (4.89)$$

Wstawiając $\mathbf{1}$ do wyrażenia na $W^{\mu\nu}$, otrzymamy

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| \int d^3y \langle E_f j M | \mathbf{1} e^{i\hat{P}\vec{y}} J^\mu(0) | p \rangle e^{-i\vec{y}(\vec{q}+\vec{p})} \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| \int d^3y \sum_{\vec{p}'s'} \langle E_f j M | p' s' \rangle \langle p' s' | e^{i\hat{P}\vec{y}} J^\mu(0) | p \rangle e^{-i\vec{y}(\vec{q}+\vec{p})} \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| \int d^3y \sum_{\vec{p}'s'} \langle E_f j M | p' s' \rangle \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle e^{-i\vec{y}(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}')} \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V}{(2\pi)^2} \left| V \sum_{\vec{p}'s'} \delta_{\vec{p}+\vec{q},\vec{p}'} \langle E_f j M | p' s' \rangle \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V^3}{(2\pi)^2} \left| \sum_{s'} \langle E_f j M | p' s' \rangle \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i)
\end{aligned} \tag{4.90}$$

gdzie $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{q}$. Taki zabieg umożliwia nam wyliczenie elementu $\langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle$, w którym prąd $J^\mu(0)$ identyfikujemy jako Γ^μ . W pierwszej kolejności zajmijmy się czynnikiem $\langle E_f j M | p' s' \rangle$.

Zgodnie z naszą normalizacją fala płaska, zamknięta w objętości V , jest zadana przez

$$|p' s'\rangle = \sqrt{\frac{M}{E_{p'}}} \frac{1}{\sqrt{V}} u_{s'}(p') e^{-i\vec{p}'\vec{r}} \tag{4.91}$$

gdzie spinor Diraca

$$u_{s'}(p') = \sqrt{\frac{E_{p'} + M}{2M}} \begin{pmatrix} \varphi_{s'} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}'}{E_{p'} + M} \varphi_{s'} \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\langle E_f j M | p' s' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{M}{E_{p'}}} \sqrt{\frac{E_{p'} + M}{2M}} \int d^3 r \left[\psi_{up}^+(\vec{r}) + \psi_{down}^+(\vec{r}) \frac{\vec{\sigma} \vec{p}'}{E_{p'} + M} \right] \varphi_{s'} e^{-i\vec{p}' \vec{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{E_{p'} + M}{2E_{p'}}} \int d^3 r \left[\psi_{up}^+(\vec{r}) + \frac{p'}{E_{p'} + M} \psi_{down}^+(\vec{r}) (\vec{\sigma} \vec{e}_{p'}) \right] \varphi_{s'} e^{-i\vec{p}' \vec{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{E_{p'} + M}{2E_{p'}}} \left[\psi_{up}^+(\vec{p}') + \sqrt{\frac{E_{p'} - M}{E_{p'} + M}} \psi_{down}^+(\vec{p}') (\vec{\sigma} \vec{e}_{p'}) \right] \varphi_{s'} \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}} \left[\sqrt{E_{p'} + M} \psi_{up}^+(\vec{p}') + \sqrt{E_{p'} - M} \psi_{down}^+(\vec{p}') (\vec{\sigma} \vec{e}_{p'}) \right] \varphi_{s'}
\end{aligned} \tag{4.93}$$

gdzie $\vec{e}_{p'}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku wektora \vec{p}' , a $\psi_{up/down}(\vec{p}')$ zdefiniowane są przez

$$\psi_{up}(\vec{p}') \equiv \int d^3 r \psi_{up}(\vec{r}) e^{i\vec{p}' \vec{r}} \tag{4.94}$$

$$\psi_{down}(\vec{p}') \equiv \int d^3 r \psi_{down}(\vec{r}) e^{i\vec{p}' \vec{r}} \tag{4.95}$$

Zgodnie z (4.80)

$$\psi_{up}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} R_{p_f l}(r) \phi_{jM}(\hat{r}) \tag{4.96}$$

$$\psi_{down}(\vec{r}) = -\sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} R_{p_f l'}(r) \chi_{jM}(\hat{r}) \tag{4.97}$$

a części kątowne zadane są przez (por. (4.36) i (4.37))

$$\phi_{jM}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \tag{4.98}$$

$$\chi_{jM}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-M+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j+M+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \tag{4.99}$$

Ze względu na postać funkcji $\psi_{up/down}(\vec{r})$ wygodnie jest zapisać falę płaską $e^{i\vec{p}' \vec{r}}$ jako sumę harmonik sferycznych i funkcji Bessela (por. [5] rozdz. 9.8)

$$e^{i\vec{p}\vec{r}} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l R_{pl}(r) Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_l^m(\hat{p}) \quad (4.100)$$

Takie rozwinięcie pozwala nam wyliczyć $\psi_{up}(\vec{p})$

$$\begin{aligned} \psi_{up}(\vec{p}) &= \int d^3r \psi_{up}(\vec{r}) e^{i\vec{p}\vec{r}} \\ &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{p'} \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} \sum_{l'm'} i^{l'} \int d^3r R_{p_f l}(r) \phi_{jM}(\hat{r}) R_{p' l'}(r) Y_{l'}^{m'*}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{p}') \\ &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{p'} \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} \sum_{l'm'} i^{l'} \int r^2 dr R_{p_f l}(r) R_{p' l'}(r) \\ &\quad \cdot \int d\Omega \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_l^{M-\frac{1}{2}}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'*}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{p}') \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_l^{M+\frac{1}{2}}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'*}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{p}') \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.101)$$

W tym miejscu skorzystamy z normalizacji harmonik sferycznych

$$\int d\Omega Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) Y_l^m(\hat{r}) = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (4.102)$$

mamy zatem

$$\begin{aligned} \psi_{up}(\vec{p}) &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{p'} \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} \sum_{l'm'} i^{l'} \int r^2 dr R_{p_f l}(r) R_{p' l'}(r) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_{l'}^{m'}(\hat{p}') \delta_{M-\frac{1}{2}, m'} \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_{l'}^{m'}(\hat{p}') \delta_{M+\frac{1}{2}, m'} \end{pmatrix} \delta_{ll'} \\ &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{p'} \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} i^l \int r^2 dr R_{p_f l}(r) R_{p' l}(r) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_l^{M-\frac{1}{2}}(\hat{p}') \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_l^{M+\frac{1}{2}}(\hat{p}') \end{pmatrix} \\ &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{p'} \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \sqrt{\Delta} i^l \phi_{jM}(\hat{p}') \int r^2 dr R_{p_f l}(r) R_{p' l}(r) \end{aligned} \quad (4.103)$$

W skończonej objętości funkcje $R_{pl}(r)$ spełniają (por. (4.79) i (4.76))

$$\int r^2 dr R_{p'l}(r) R_{pl}(r) = \frac{1}{\Delta} \frac{p}{E} \delta_{EE'} \quad (4.104)$$

Ostatecznie $\psi_{up}(\vec{p}')$ zadane jest przez

$$\psi_{up}(\vec{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{E_f} \sqrt{\frac{E_f + M}{2p_f}} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} i^l \phi_{jM}(\hat{p}') \delta_{E_f E_{p'}} \quad (4.105)$$

W analogiczny sposób otrzymamy wyrażenie na $\psi_{down}(\vec{p}')$

$$\psi_{down}(\vec{p}') = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{E_f} \sqrt{\frac{E_f - M}{2p_f}} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} i^l \chi_{jM}(\hat{p}') \delta_{E_f E_{p'}} \quad (4.106)$$

Wstawiając otrzymane wyniki do (4.93), dostajemy

$$\begin{aligned} \langle E_f j M | p' s' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}} \frac{(2\pi)^{3/2}}{E_f} \sqrt{\frac{1}{2p_f}} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} i^l \left[\sqrt{E_{p'} + M} \sqrt{E_f + M} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{E_{p'} - M} \sqrt{E_f - M} \chi_{jM}^+(\hat{p}') (\vec{\sigma} \vec{e}_{p'}) \right] \varphi_{s'} \delta_{E_f E_{p'}} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Wyrażenie na $\langle E_f j M | p' s' \rangle$ możemy uprościć, wykorzystując zależności między częściami kątowymi (4.56)

$$\chi_{jM}^+(\hat{p}') (\vec{\sigma} \vec{e}_{p'}) = ((\vec{\sigma} \vec{e}_{p'}) \chi_{jM}(\hat{p}'))^+ = -\phi_{jM}^+(\hat{p}') \quad (4.108)$$

co daje nam

$$\begin{aligned} \langle E_f j M | p' s' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{(2\pi)^{3/2}}{2E_f} \sqrt{\frac{1}{E_{p'} p_f}} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} i^l \left[\sqrt{(E_{p'} + M)(E_f + M)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(E_{p'} - M)(E_f - M)} \right] \phi_{jM}^+(\hat{p}') \varphi_{s'} \delta_{E_f E_{p'}} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \mathcal{N}_1 \phi_{jM}^+(\hat{p}') \varphi_{s'} \delta_{E_f E_{p'}} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Wstawmy otrzymany wynik do wzoru na tensor $W^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V^3}{(2\pi)^2} \left| \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \mathcal{N}_1 \delta_{E_f E_{p'}} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sum_{s'} \varphi_{s'} \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V^3}{(2\pi)^2} \frac{1}{\Delta} |\mathcal{N}_1|^2 \delta_{E_f E_{p'}} \left| \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sum_{s'} \varphi_{s'} \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i)
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Porównując (4.76) i (4.79), znajdujemy związek między deltą Kroneckera i deltą Diraca w kuli o promieniu R

$$\delta_{E_f E_{p'}} = \Delta \delta(E_f - E_{p'}) \tag{4.111}$$

Jeżeli wstawimy deltę Diraca do wzoru na $W^{\mu\nu}$, czynniki Δ się skrócą i tensor nie będzie zależał od promienia R . Umożliwia nam to przejście $R \rightarrow \infty$ i wykonanie całki po dE_f

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= \sum_{jM} \int dE_f 2E_f^2 p_f E_p \frac{V^3}{(2\pi)^2} |\mathcal{N}_1|^2 \delta(E_f - E_{p'}) \left| \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sum_{s'} \varphi_{s'} \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} 2E_f^2 p_f E_p \frac{V^3}{(2\pi)^2} |\mathcal{N}_1|^2 \left| \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sum_{s'} \varphi_{s'} \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i)
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Po wykonaniu całki $E_f = E_{p'}$, czyli czynnik \mathcal{N}_1 wynosi

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{(2\pi)^{3/2}}{2E_f} \sqrt{\frac{1}{p_f E_f}} i^l [(E_f + M) + (E_f - M)] \\
&= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} \frac{i^l}{\sqrt{p_f E_f}}
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Wyrażenie na tensor hadronowy upraszcza się do

$$W^{\mu\nu} = \sum_{jM} 2E_f E_p (2\pi) V^2 \left| \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sum_{s'} \varphi_{s'} \langle p' s' | J^\mu(0) | p \rangle \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \tag{4.114}$$

Pojawiający się spinor $\varphi_{s'}$ we wzorze na $W^{\mu\nu}$ uniemożliwia nam skorzystanie z formuł śladowych, jak robiliśmy to w poprzednim rozdziale. Dlatego zapiszemy jawnie element $\langle p's'|J^\mu(0)|p\rangle$ i poszukamy związku z wynikami otrzymanymi dla fal płaskich. Przechodząc do notacji macierzowej mamy

$$\begin{aligned}\langle p'|J^\mu(0)|p\rangle &= \frac{e}{V} \frac{M}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) \\ &= \frac{e}{V} \frac{M}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \sqrt{\frac{E_{p'} + M}{2M}} \sqrt{\frac{E_p + M}{2M}} \begin{pmatrix} \varphi_{s'}^+ & \varphi_{s'}^+ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}'}{E_{p'} + M} \end{pmatrix} \gamma^0 \Gamma^\mu \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E_p + M} \varphi_s \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.115)$$

Γ^μ , zdefiniowane przez (3.13), jest kombinacją macierzy jednostkowych oraz macierzy Pauliego. Z uwagi na własność macierzy Pauliego

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.116)$$

wyrażenie (4.115) zawsze można sprowadzić do postaci

$$\langle p'|J^\mu(0)|p\rangle = \mathcal{N}_2 \varphi_{s'}^+ \Pi^\mu \varphi_s \quad (4.117)$$

gdzie

$$\mathcal{N}_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{e}{V} \sqrt{\frac{(E_{p'} + M)(E_p + M)}{E_{p'} E_p}} \quad (4.118)$$

$$\Pi^\mu \equiv \left(A \mathbb{1} + \vec{B} \vec{\sigma} \right)^\mu \quad (4.119)$$

Sumowanie po spinie s' w wyrażeniu na $W^{\mu\nu}$ da nam

$$\begin{aligned}W^{\mu\nu} &= \sum_{jM} 2E_f E_p (2\pi) V^2 \left| \mathcal{N}_2 \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sum_{s'} \varphi_{s'} \varphi_{s'}^+ \Pi^\mu \varphi_s \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\ &= \sum_{jM} 2E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \left| \phi_{jM}^+(\hat{p}') \Pi^\mu \varphi_s \right|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i)\end{aligned}\quad (4.120)$$

Tak jak w poprzednim rozdziale uśredniamy po spinie nukleonu początkowego

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= \sum_{jM} 2E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \frac{1}{2} \sum_s |\phi_{jM}^+(\hat{p}') \Pi^\mu \varphi_s|^2 \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \sum_s \phi_{jM}^+(\hat{p}') \Pi^\mu \varphi_s \varphi_s^+ \Pi^\nu \phi_{jM}(\hat{p}') \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \phi_{jM}^+(\hat{p}') \Pi^\mu \Pi^\nu \phi_{jM}(\hat{p}') \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \phi_{jM}^+(\hat{p}') \left(A \mathbb{1} + \vec{B} \vec{\sigma} \right)^\mu \left(A \mathbb{1} + \vec{B} \vec{\sigma} \right)^\nu \phi_{jM}(\hat{p}') \\
&\quad \cdot \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \phi_{jM}^+(\hat{p}') \left(A' \mathbb{1} + \vec{B}' \vec{\sigma} \right)^{\mu\nu} \phi_{jM}(\hat{p}') \delta(E_f + E' - E - E_i) \\
&= \sum_{jM} E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \phi_{jM}^+(\hat{p}') (A' \mathbb{1})^{\mu\nu} \phi_{jM}(\hat{p}') \delta(E_f + E' - E - E_i)
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Ostatnia równość wynika z własności

$$\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sigma_i \phi_{jM}(\hat{p}') = 0 \tag{4.122}$$

Możemy to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem

$$\begin{aligned}
\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sigma_1 \phi_{jM}(\hat{p}') &= \sum_{jM} \left(\sqrt{\frac{j+M}{2j}} \left(Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right)^* \sqrt{\frac{j-M}{2j}} \left(Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right)^* \right) \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{jM} \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} \left[\left(Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right)^* Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. + \left(Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right)^* Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right]
\end{aligned} \tag{4.123}$$

W tym miejscu skorzystamy z własności harmonik sferycznych

$$\left(Y_l^{-m}(\theta, \varphi) \right)^* = (-1)^m Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{4.124}$$

co daje nam

$$\begin{aligned}
\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sigma_1 \phi_{jM}(\hat{p}') &= \sum_{jM} \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} \left[(-1)^{\frac{1}{2}-M} Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{-M-\frac{1}{2}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] \\
&= \sum_{jM} \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] \\
&= \sum_j \sum_{M=\frac{1}{2}}^j \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] \\
&\quad + \sum_j \sum_{M=-j}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right]
\end{aligned} \tag{4.125}$$

W drugim sumowaniu możemy zmienić zmienną sumowania $M \rightarrow -M$

$$\begin{aligned}
\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sigma_1 \phi_{jM}(\hat{p}') &= \sum_j \sum_{M=\frac{1}{2}}^j \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] \\
&+ \sum_j \sum_{M=\frac{1}{2}}^j \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{-M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] \\
&= \sum_j \sum_{M=\frac{1}{2}}^j \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] \\
&- \sum_j \sum_{M=\frac{1}{2}}^j \frac{\sqrt{j^2 - M^2}}{2j} (-1)^{M-\frac{1}{2}} \left[Y_{j-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-M}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. - Y_{j-\frac{1}{2}}^{-M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.126}$$

W analogiczny sposób wyrażenie znika dla σ_2 . Dla σ_3 mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sigma_3 \phi_{jM}(\hat{p}') &= \sum_{jM} \left(\sqrt{\frac{j+M}{2j}} \left(Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right)^* \sqrt{\frac{j-M}{2j}} \left(Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right)^* \right) \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{j-M}{2j}} Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{jM} \left[\frac{j+M}{2j} \left| Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right|^2 - \frac{j-M}{2j} \left| Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right|^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.127}$$

Skorzystamy z własności harmonik sferycznych związanych z sumowaniem po m

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-l}^l |Y_l^m(\varphi, \theta)|^2 &= \frac{2l+1}{4\pi} \\
\sum_{m=-l}^l m |Y_l^m(\varphi, \theta)|^2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.128}$$

Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned}
\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \sigma_3 \phi_{jM}(\hat{p}') &= \sum_j \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \sum_M \left| Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right|^2 + \frac{1}{2j} \sum_M \left(M - \frac{1}{2} \right) \left| Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \sum_M \left| Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right|^2 + \frac{1}{2j} \sum_M \left(M + \frac{1}{2} \right) \left| Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \right|^2 \right] \\
&= \sum_j \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \frac{2(j-\frac{1}{2})+1}{4\pi} - \frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \frac{2(j-\frac{1}{2})+1}{4\pi} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Oczekujemy, że tensor $W^{\mu\nu}$ będzie związany z tensorem $H^{\mu\nu}$ (3.3), gdyż choć pracujemy w innej bazie, to opisujemy tą samą fizykę co w rozdziale 3. Zapiszmy jawnie $H^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} M^2 \sum_{s,s'} (\bar{u}_{s'}(p') \Gamma^\mu u_s(p)) (\bar{u}_{s'}(p') \Gamma^\nu u_s(p))^* \\
&= \frac{1}{2} M^2 \frac{E_{p'}}{2M} \frac{E_p + M}{2M} \sum_{s,s'} \varphi_{s'}^+ \Pi^\mu \varphi_s \varphi_s^+ \Pi^\nu \varphi_{s'} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(E_{p'} + M)(E_p + M)}{4} \sum_{s'} \varphi_{s'}^+ \Pi^\mu \Pi^\nu \varphi_{s'} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(E_{p'} + M)(E_p + M)}{4} \sum_{s'} \varphi_{s'}^+ \left(A' \mathbf{1} + \vec{B}' \vec{\sigma} \right)^{\mu\nu} \varphi_{s'} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(E_{p'} + M)(E_p + M)}{4} A'^{\mu\nu} \sum_{s'} \varphi_{s'}^+ \mathbf{1} \varphi_{s'} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{(E_{p'} + M)(E_p + M)}{4} \vec{B}'^{\mu\nu} \sum_{s'} \varphi_{s'}^+ \vec{\sigma} \varphi_{s'} \\
&= \frac{(E_{p'} + M)(E_p + M)}{4} A'^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.130}$$

co wynika z własności

$$\sum_s \varphi_s^+ \mathbb{1} \varphi_s = 2 \quad (4.131)$$

oraz

$$\sum_s \varphi_s^+ \sigma_i \varphi_s = 0 \quad (4.132)$$

Wykorzystując otrzymaną zależność między $A'^{\mu\nu}$ i $H^{\mu\nu}$, wyrażenie na tenor $W^{\mu\nu}$ (4.121) zapisujemy w postaci

$$W^{\mu\nu} = \sum_{jM} E_f E_p (2\pi) V^2 \mathcal{N}_2^2 \frac{4}{(E_f + M)(E_p + M)} H^{\mu\nu} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \phi_{jM}(\hat{p}') \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (4.133)$$

Współczynnik \mathcal{N}_2^2 (por. (4.118)) jest równy

$$\mathcal{N}_2^2 = \frac{1}{4} \frac{e^2}{V^2} \frac{(E_f + M)(E_p + M)}{E_f E_p} \quad (4.134)$$

zatem

$$W^{\mu\nu} = e^2 H^{\mu\nu} (2\pi) \sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \phi_{jM}(\hat{p}') \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (4.135)$$

Przypomnijmy sobie, że dla fal płaskich otrzymaliśmy wynik

$$W^{\mu\nu} = e^2 H^{\mu\nu} \delta(E_f + E' - E - E_i) \quad (4.136)$$

W tej sytuacji okazuje się, że sumowanie po j , M prowadzi do rozbieżności, o czym łatwo przekonać się, korzystając z własności harmonik sferycznych (4.128)

$$\begin{aligned}
\sum_{jM} \phi_{jM}^+(\hat{p}') \phi_{jM}(\hat{p}') &= \sum_{jM} \left[\frac{j+M}{2j} |Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}|^2 + \frac{j-M}{2j} |Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}|^2 \right] \\
&= \sum_j \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \sum_m |Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}|^2 + \frac{1}{2j} \sum_m (M-\frac{1}{2}) |Y_{j-\frac{1}{2}}^{M-\frac{1}{2}}|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \sum_m |Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}|^2 - \sum_m (M+\frac{1}{2}) |Y_{j-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}|^2 \right] \\
&= \sum_j \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \frac{2(j-\frac{1}{2})+1}{4\pi} \cdot 2 \right] \\
&= \sum_j \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2j} \frac{2j}{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_j (j+\frac{1}{2}) = \infty
\end{aligned}$$

(4.137)

5 Podsumowanie

Praca miała na celu przygotowanie do rachunków DWIA przez obliczenie inkluzywnego przekroju czynnego w dwóch bazach. Przy użyciu bazy momentu pędu powinniśmy otrzymać dokładnie ten sam wynik, co w podejściu standardowym, gdy cząstki swobodne opisujemy falą płaską. Uzgodnienie normalizacji funkcji falowej jest niezbędne do wykonania kolejnego kroku, modelowania oddziaływania nukleonu w jądrze przez potencjał Woodsa-Saxona.

Uzyskano niemal całkowitą zgodność wyników, za wyjątkiem czynnika normalizacyjnego, który dla bazy momentu pędu jest formalnie nieskończonością. Nieskończoność może być związana z subtelnościami matematycznymi, które pojawiają się, gdy przechodzimy z przestrzeni dyskretnej do ciągłej i vice versa. Musimy również pamiętać, że z jednej strony zamykaliśmy świat w pudle o objętości $V = L^3$, a z drugiej w kuli o promieniu R i niewykluczone, że tu należy szukać rozwiązania problemu.

Praca jest niezbędnym punktem wyjścia do dalszych rozważań. Po tym jak uda się znaleźć rozwiązanie problemu nieskończoności, wynik będzie można wykorzystać do obliczenia inkluzywnego przekroju czynnego dla rozpraszania elektronu na jądrze w przybliżeniu DWIA, a następnie uogólnić go na przypadek neutrin.

Literatura

- [1] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz *Quantum Electrodynamics* (1980)
- [2] C. Itzykson, J.B. Zuber *Quantum Field Theory* (1980)
- [3] J. D. Bjorken, S. D. Drell *Relativistic Quantum Mechanics* (1964)
- [4] S. Weinberg *The Quantum Theory of Fields* (1995)
- [5] A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskii *Elements of Quantum Electrodynamics* (1959)
- [6] A. Aste *Coulomb distortion effects in quasi-elastic (e, e') scattering on heavy nuclei*, <http://arxiv.org/abs/0710.1261v3> (2008)
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifshitz *Quantum Mechanics - Non-Relativistic Theory* (1977)
- [8] M. Anghinolfi *et al.*, J. Phys. G 21, L9 (1995)
- [9] M. Anghinolfi *et al.*, Nucl. Phys. A602, 405 (1996)
- [10] J. S. O'Connell *et al.*, Phys. Rev. C 35, 1063 (1987)
- [11] J.M. Udias *Lepton-Nucleus Scattering in a Relativistic Framework: Electromagnetic and Neutral Current Case* (1995)
- [12] J.M. Udias *et al.*, Phys. Rev. C 51, 6 (1995)
- [13] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche *Particles and Nuclei* (2006)