

Funkcje odpowiedzi dla rozpraszania neutrin na
nukleonie i jądrze atomowym
*Response functions for neutrino-nucleon and
neutrino-nucleus scattering*

Marcin Gonera

praca magisterska
napisana pod kierunkiem prof. Jana Sobczyka

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Teoretycznej

Wrocław, 2011 r.

Spis treści

1	Wstęp	7
2	Wprowadzenie	9
2.1	Jak liczyć przekrój czynny	9
2.2	Prąd elektromagnetyczny	11
2.3	Prąd słaby	15
2.3.1	Sprężenie $V - A$	15
2.3.2	Dokładna postać prądu słabego	17
2.4	Hipoteza CVC	20
3	Przekroje czynne	23
3.1	Ogólny opis przekroju inkluzywnego	23
3.1.1	Elektron	23
3.1.2	Neutrino	25
3.2	Swobodny nukleon	26
3.2.1	Przekrój czynny dla elektronu	26
3.2.2	Przekrój czynny dla neutrino	29
3.2.3	Związek między $W^{\mu\nu}$ a $H^{\mu\nu}$	31
3.3	Ogólna postać tensora hadronowego	32
3.4	Inkluzywny przekrój czynny – najogólniejsza postać	34
3.4.1	Rozpraszanie elektronu na dowolnej tarczy	34
3.4.2	Rozpraszanie neutrino na dowolnej tarczy	35
4	Funkcje odpowiedzi	39
4.1	Rozkład tensora leptonowego	39
4.2	Funkcje odpowiedzi	42
4.2.1	Elektron	42
4.2.2	Neutrino	44
4.3	Analiza numeryczna	47
4.4	Spoczywający nukleon i monoenergetyczne neutrino	48
4.5	Spoczywający nukleon i wiązka neutrin	53
4.6	Gaz Fermiego	57
5	Wnioski	73
A	Konwencje	75

B	Obliczenia pomocnicze	79
B.1	Rozpraszanie elektromagnetyczne	79
B.1.1	Tensor leptonowy	79
B.1.2	Tensor hadronowy	80
B.1.3	Zwężenie tensorów	82
B.2	Oddziaływanie słabe	82
B.2.1	Tensor leptonowy	82
B.2.2	Tensor hadronowy	84
B.2.3	Zwężenie tensorów	90
C	Współczynniki kinematyczne dla gazu Fermiego	93

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest rozkład różniczkowego przekroju czynnego na tzw. funkcje odpowiedzi. Przeprowadzona zostanie analiza numeryczna poszczególnych funkcji, aby stwierdzić, czy istnieją obszary kinematyczne, w których dany wkład dominuje nad innymi. Rozważanym procesem będzie CCQE, zarówno w przypadku nukleonu swobodnego, jak i jądra w ramach modelu gazu Fermiego. Niektóre zagadnienia będą dla porównania formułowane także dla rozpraszania elektromagnetycznego.

Abstract. The aim of this thesis is the decomposition of the differential cross section into so-called response functions. A numerical analysis of each function will be done in order to search for kinematical regions in which one contribution dominates over others. The CCQE process will be considered, both in the case of free nucleon and of atomic nucleus within Fermi gas model. For comparison, some issues will be also formulated for electromagnetic scattering.

Rozdział 1

Wstęp

Przez wiele lat poszukiwania niezerowej masy neutrin nie dawały rezultatu, wskazując na to, że są one albo bezmasowe, albo dużo lżejsze niż naładowane leptony i kwarki. Konstruując Model Standardowy $SU(2) \times U(1)$ przyjęto bezmasowe neutrino, ale większość pomysłów teoretycznych na bardziej kompletną teorię przewidywała, że neutrino muszą mieć masę. Pierwszą doświadczalną wskazówką, która mogłaby to potwierdzać, był pomiar neutrin słonecznych w Homestake w latach 60-tych XX wieku. R. Davis zaobserwował około trzykrotnie mniej neutrin elektronowych, niż by wynikało z obserwowanej jasności Słońca i teoretycznego modelu budowy gwiazd. „Problem neutrin słonecznych” został potwierdzony przez inne eksperymenty, używające detektory galowe i wodne. Wyjaśnienie polegało na tym, że neutrino elektronowe oscylują, czyli zmieniają „zapach” z elektronowego na mionowy lub taonowy. Innym wytłumaczeniem mogło być to, że model Słońca jest błędny, ale możliwość ta została wykluczona w 2002 r., gdy w Sudbury Neutrino Observatory (Kanada) zmierzono niezależnie strumień neutrin elektronowych i całkowity strumień neutrin. Pozostałe eksperymenty, które wniosły wkład w potwierdzenie zjawiska oscylacji, to KamLAND i Super-Kamiokande (oba w Japonii). Masa neutrin ma duże znaczenie nie tylko w odkrywaniu fizyki wykraczającej poza Model Standardowy, ale również w zrozumieniu ewolucji Wszechświata.

Obecne i przyszłe eksperymenty mające na celu testowanie oscylacji stosują złożone jądra atomowe jako tarcze. Opierają się na aktualnej wiedzy teoretycznej o procesach neutrino-jądro, a przez to motywują do jak najbardziej precyzyjnego przewidzenia otrzymywanych w doświadczeniach przekrojów czynnych. Inną motywacją jest uzyskanie dokładniejszych danych na temat struktury nukleonów przez wyznaczenie wartości opisujących ją parametrów, takich jak np. „masa aksjalna”.

Do najważniejszych eksperymentów należą MiniBooNE (Fermilab) i T2K (*Tokai to Kamioka*). Obecność neutrin może zostać stwierdzona tylko przez wykrycie naładowanych cząstek produkowanych podczas zderzeń i oddziaływania neutrin z materią. W eksperymencie MiniBooNE tarczą jest woda i rozpraszanie zachodzi na jądrach tlenu. Projekt BooNE (*Booster Neutrino Experiment*) rozpoczęto w 1997 r. Pierwsze zdarzenia neutrinowe wywołane wiązką zarejestrowano we wrześniu 2002 r., a pierwsze zdarzenia antyneutrinowe – w styczniu 2006 r. [15] W eksperymencie T2K wiązka neutrin jest generowana w akceleratorze protonów i pokonuje odległość 295 km zanim dotrze do wodnego detektora promieniowania Czerenkowa „Super-Kamiokande” [16].

Pod pojęciem „rozpraszanie kwazielastyczne” będziemy rozumieć proces, w którym neutrino przekształca się w lepton naładowany, a nukleon zmienia ładunek (oddziaływanie „przez prąd naładowany”) i nie powstają żadne dodatkowe cząstki. Oddziaływanie elektronów lub neutrin „przez prąd neutralny” jest oddziaływaniem elastycznym. Kwazielastycznym zderzeniom odpowiada energia neutrin od ok. 100 MeV do kilku GeV. Rozpraszanie na pojedynczym nukleonie jest prostsze w opisie teoretycznym, ale w praktyce łatwiejsze jest stosowanie jąder (większe prawdopodobieństwo zajścia reakcji). W przypadku rozpraszania na jądrze stosuje się model, w którym nukleony są kwaziswobodne, a elementarny proces zderzenia leptonu z nukleonem przebiega tak, jak dla nukleonu swobodnego. Przy wysokich energiach lepton „widzi” jądro jako pojedyncze nukleony, ponieważ długość fali de Broglie’a padających cząstek jest wtedy mniejsza niż typowa odległość między nukleonami w jądrze. Przybliżenie to nazywane jest *przybliżeniem impulsowym* (*impulse approximation*, IA).

Jeśli w procesie półleptonowym jedyną rejestrowaną cząstką jest końcowy lepton, to mówimy o *inkluzywnym* przekroju czynnym. Jeśli oprócz tego rejestrowany jest hadron (np. nukleon wybijany z jądra), to jest to przekrój *ekskluzywny*. Zwykle wiązka neutrin zawiera neutrina mionowe i leptonem naładowanym jest mion.

Bozon pośredniczący w oddziaływaniu opisany jest czteropędem $q^\mu = (\omega, \vec{q})$. W przypadku wirtualnych fotonów, przekaz energii ω i przekaz pędu $|\vec{q}|$ mogą zmieniać się niezależnie (zachowując jedynie warunek $\omega^2 - |\vec{q}|^2 < 0$), podczas gdy kinematyka fotonów rzeczywistych ograniczona jest do warunku $\omega^2 - |\vec{q}|^2 = 0$. Dlatego próbkowanie jądra fotonem wirtualnym, np. w reakcji (e, e') , pozwala uzyskać więcej informacji o strukturze nukleonu niż próbkowanie fotonem rzeczywistym.

Rozdział 2

Wprowadzenie

2.1 Jak liczyć przekrój czynny

W kwantowej mechanice i teorii pola obliczenie przekroju czynnego sprowadza się do wyliczenia prawdopodobieństwa przejścia ze stanu początkowego $|i\rangle$ do stanu końcowego $|f\rangle$ ¹. Prawdopodobieństwo to jest zadane poprzez element macierzy S :

$$P = |S_{fi}|^2, \quad S_{fi} \equiv \langle f | S | i \rangle. \quad (2.1)$$

Związek między elementem macierzy S a amplitudą przejścia \mathcal{M}_{fi} jest następujący: $S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \mathcal{M}_{fi} \delta^4(P_f - P_i)$, gdzie P_i i P_f to sumaryczny czteropęd, odpowiednio początkowy i końcowy. Ich zerowe składowe, czyli sumaryczne energie, oznaczymy przez E_i , E_f , a trójpędy – przez \vec{P}_i , \vec{P}_f . Będziemy się zajmować tylko takimi procesami, w których stan końcowy różni się od początkowego – wtedy $\delta_{fi} = 0$ i powyższy związek sprowadzi się do

$$S_{fi} = -2\pi i \mathcal{M}_{fi} \delta^4(P_f - P_i). \quad (2.2)$$

Jak widzimy, będziemy musieli obliczyć kwadrat modułu delty Diraca. Aby tego dokonać, zamykamy układ w „pudle” o skończonej objętości $V = L^3$ i ograniczamy czas oddziaływania do okresu T . Nakładamy przy tym periodyczne warunki brzegowe. Pęd i energia będą wtedy przyjmowały dyskretne wartości, a delty Diraca wyrażą się przez delty Kroneckera:

$$\begin{aligned} \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) &\longrightarrow \delta_V^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{P}_i, \vec{P}_f}, \\ \delta(E_f - E_i) &\longrightarrow \delta_T(E_f - E_i) = \frac{T}{2\pi} \delta_{E_i, E_f}. \end{aligned}$$

Możemy łatwo podnieść te wyrażenia do kwadratu:

$$\left(\delta_V^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) \right)^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_V^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i), \quad \left(\delta_T(E_f - E_i) \right)^2 = \frac{T}{2\pi} \delta_T(E_f - E_i). \quad (2.3)$$

¹Zwykle są to stany wielocząstkowe, czyli iloczyny tensorowe cząstek uczestniczących w procesie.

Układowi kwantowemu w pudle odpowiada następująca modyfikacja czynnika normalizacyjnego stanów pędowych:

$$\psi_{i,f} \rightarrow \psi_{i,f}^{\text{pudło}} = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_{i,f}/2} \psi_{i,f},$$

gdzie $N_{i,f}$ – liczba cząstek w stanie $|i\rangle, |f\rangle$. Pojedynczej cząstce swobodnej Diraca odpowiadałaby funkcja $\psi_{s,p}^{\text{pudło}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E}} u^s(p) e^{-ipx}$ (por. Dodatek A). Reguła ta jest równoważna wprowadzeniu odpowiedniego czynnika przy elemencie macierzy S_{fi} :

$$S_{fi} \rightarrow S_{fi}^{\text{pudło}} = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{(N_i+N_f)/2} S_{fi}. \quad (2.4)$$

W dalszej części wyprowadzania przekroju czynnego będziemy używać wzór (2.4), jednocześnie zachowując pierwotną normalizację stanów. Prawdopodobieństwo w pudle wynosi więc

$$P(i \rightarrow f) = \left| S_{fi}^{\text{pudło}} \right|^2 = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_i+N_f} |S_{fi}|^2.$$

Uwzględnijmy gęstość stanów końcowych $dN_\beta = \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{N_f} d\beta$ i wprowadźmy tzw. *różniczkowe* prawdopodobieństwo przejścia:

$$dP(i \rightarrow f) = P(i \rightarrow f) dN_\beta = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_i} |S_{fi}|^2 d\beta. \quad (2.5)$$

Po skorzystaniu ze związku (2.2) i wzorów (2.3) otrzymujemy

$$dP(i \rightarrow f) = (2\pi)^2 \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{N_i-1} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta_V^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) \frac{T}{2\pi} \delta_T(E_f - E_i) d\beta.$$

$d\beta$ jest nieskończenie małą objętością przestrzeni fazowej stanów końcowych, należy ją rozumieć jako iloczyn $\prod_{j=1}^{N_f} d^3 p_j$ po wszystkich cząstkach końcowych.

Załóżmy teraz, że zderzamy ze sobą dwie cząstki ($N_i = 2$). Różniczkowy przekrój czynny definiuje się jako (patrz np. [13])

$$d\sigma \equiv \frac{dP}{T\phi}, \quad (2.6)$$

czyli jest to różniczkowe prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu i na jednostkę strumienia ϕ cząstek padających. Dla jednej cząstki padającej strumień ten wynosi $\phi = u_{\text{rel}}/V$, gdzie u_{rel} to wartość prędkości jednej cząstki względem drugiej. Czynniki $1/V$ jest tutaj szczególnym przypadkiem gęstości cząstek n (jedna cząstka w objętości V). W tej sytuacji dostaniemy

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{u_{\text{rel}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta_V^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) \delta_T(E_f - E_i) d\beta.$$

Wyrażenie to nie zależy już od V ani T , więc możemy teraz dokonać przejścia $L \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$. Dostaniemy z powrotem standardowe delty Diraca: $\delta_V^3 \rightarrow \delta^3, \delta_T \rightarrow$

δ i uzyskamy możliwość całkowania po pędach jako po ciągłych stopniach swobody. Ostatecznie, różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie wyraża się wzorem

$$d\sigma(i \rightarrow f) = (2\pi)^4 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{u_{\text{rel}}} \delta^4(P_f - P_i) d\beta. \quad (2.7)$$

W \mathcal{M}_{fi} zawarta jest informacja m.in. o spinach cząstek, jednak my w tej pracy nie będziemy mierzyć spinów i będziemy sumować po spinach końcowych. Całkowity przekrój czynny jest sumą wkładów od wszystkich możliwych stanów końcowych: $\sigma = \sum_f \sigma(i \rightarrow f)$. Przekrój na rozpraszanie pojedynczego leptonu na hadronach zapisalibyśmy ogólnie jako

$$\sigma = (2\pi)^4 \sum_f \int d^3k' \int d\beta_h \frac{1}{2} \sum_{\text{spiny}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{u_{\text{rel}}} \delta^4(P_f - P_i).$$

Macierz S (i amplituda \mathcal{M}_{fi}) zależy od hamiltonianu. W dalszych rozdziałach, dotyczących konkretnych rodzajów oddziaływań, będziemy szukać jawne postaci amplitudy w standardowy sposób – za pomocą reguł Feynmana (o ile będzie to możliwe).

Jak pokazaliśmy, różniczkowy przekrój czynny wyraża się przez kwadrat modułu elementu macierzy przejścia. Dla oddziaływania typu prąd-prąd element macierzy przejścia „faktoryzuje się” względem poszczególnych prądów (należy pamiętać o sumowaniu po składowych obu prądów):

$$\mathcal{M}_{fi}(IN \rightarrow I'N') \sim \mathcal{M}_{fi}(I \rightarrow I') \mathcal{M}_{fi}(N \rightarrow N') = \langle I' | J_\mu^{\text{lept}} | I \rangle \langle N' | J_{\text{hadr}}^\mu | N \rangle.$$

Zatem kwadrat modułu zawiera następujące czynniki:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \langle I' | J_\mu^{\text{lept}} | I \rangle \langle N' | J_{\text{hadr}}^\mu | N \rangle \langle I' | J_\nu^{\text{lept}} | I \rangle^* \langle N' | J_{\text{hadr}}^\nu | N \rangle^*$$

i dlatego wygodnie jest zapisać go przy użyciu zwięzienia tzw. tensorów leptonowego i hadronowego.

2.2 Prąd elektromagnetyczny

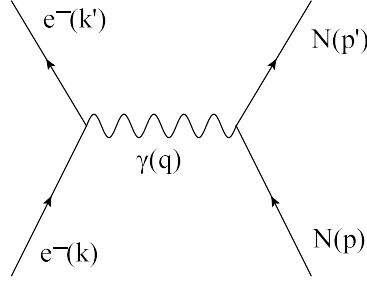
Gęstość lagranżjanu oddziaływania elektromagnetycznego można, jak wiadomo z klasycznej elektrodynamiki, zapisać jako

$$\mathcal{L} = -e J_\mu^{\text{em}} \mathcal{A}^\mu = -e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \mathcal{A}^\mu(x), \quad (2.8)$$

gdzie $\mathcal{A}^\mu(x)$ jest czteropotencjałem. Prąd $J_{\text{em}}^\mu(x)$ jest zachowany. Matematycznie wyraża się to przez znikającą dywergencję: $\partial_\mu J_{\text{em}}^\mu(x) = 0$.

Rozważmy rozpraszanie elastyczne elektron-nukleon. Mamy w tym przypadku dwa prądy, które są typu wektorowego (V). Prąd związany z elektronem (leptonowy) i jego element macierzowy (z dokładnością do czynników normujących) wyrażają się przez macierze Diraca:

$$J_{\text{lept}}^\mu(x) = \bar{e}'(x) \gamma^\mu e(x), \quad (2.9)$$



Rysunek 2.1: Diagram dla rozpraszania elektronu na nukleonie.

$$\langle k' | J_{\text{lept}}^\mu | k \rangle \sim \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k), \quad (2.10)$$

gdzie $e(x)$, $e'(x)$ są operatorami pola elektronu. Drugi prąd, związany z nukleonem (hadronowy), można ogólnie zapisać jako

$$\langle p' | J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle \sim \bar{u}(p') O^\mu(p', p) u(p). \quad (2.11)$$

k i k' są początkowym i końcowym czteropędem elektronu, p i p' — odpowiednimi czteropędami nukleonu. Funkcje u są spinorami Diraca — dla fermionu z masą M spełniają równania

$$p_\mu \gamma^\mu u(p) = M u(p) \Rightarrow u^\dagger(p) \gamma^{\mu\dagger} p_\mu \gamma^0 = u^\dagger(p) M \gamma^0 \Rightarrow \bar{u}(p) p_\mu \gamma^\mu = \bar{u}(p) M.$$

W przybliżeniu jednofotonowym amplituda rozpraszania ma postać „prąd-prąd”:

$$\mathcal{M} = -\frac{4\pi\alpha}{q^2} J_\mu^{\text{lept}} J_\mu^{\text{hadr}}, \quad (2.12)$$

gdzie α jest stałą struktury subtelnej, natomiast q jest przekazem czteropędu:

$$q = k - k' = p' - p. \quad (2.13)$$

Operator O^μ zbudowany jest z czteropędu nukleonu, przekazu czteropędu i macierzy γ^μ . Wierzchołek, w którym foton sprzęga się z nukleonem, nie ma charakteru punktowego i prąd będzie miał bardziej złożoną postać niż w przypadku leptonowym.

Współmienniczość lorentzowska teorii Diraca wymaga użycia następujących (szesnastu) liniowo niezależnych macierzy 4×4 :

- skalar (S) $\mathbf{1}$
- pseudoskalar (P) γ_5
- wektor (V) γ^μ
- pseudowektor (*axial vector*, A) $\gamma^\mu \gamma_5$
- tensor antysymetryczny (T) $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$

Operator O^μ może być kombinacją liniową $\{\mathbf{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5, \gamma^\mu\gamma_5\}$. Parzystość jest zachowana w oddziaływaniach elektromagnetycznych, więc musimy odrzucić część z γ_5 , która transformuje się jak pseudowektor. Operator O^μ musi mieć zatem własności wektora i prąd hadronowy ma postać

$$\begin{aligned} \langle p' | J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle = & \bar{u}(p') [\gamma^\mu K_1(q^2) + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu K_2(q^2) + \\ & + i\sigma^{\mu\nu} (p' + p)_\nu K_3(q^2) + (p' - p)^\mu K_4(q^2) + (p' + p)^\mu K_5(q^2)] u(p). \end{aligned}$$

Wielkości K_j są funkcjami tylko od q^2 , ponieważ $(p' + p)^2$ da się wyrazić jako funkcję q^2 i masy cząstki:

$$(p' + p)^2 = 2M^2 + 2E_{p'}E_p - 2\vec{p}'\vec{p}$$

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2M^2 - 2E_{p'}E_p + 2\vec{p}'\vec{p}$$

$$(p' + p)^2 = 4M^2 - q^2$$

Korzystając z następujących tożsamości (tzw. rozkład Gordona):

$$\bar{u}(p')[(p' + p)^\mu]u(p) = \bar{u}(p')[-i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu + (M' + M)\gamma^\mu]u(p), \quad (2.14)$$

$$\bar{u}(p')[i\sigma^{\mu\nu}(p + p')_\nu]u(p) = \bar{u}(p')[-(p' - p)^\mu + (M' - M)\gamma^\mu]u(p), \quad (2.15)$$

można włączyć wyrazy zawierające $(p' + p)$ do innych czynników i prąd hadronowy przyjmie postać

$$\langle p' | J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle = \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + i\frac{1}{2M} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3(q^2) q^\mu \right] u(p), \quad (2.16)$$

gdzie M jest masą nukleonu. Skalarne funkcje q^2 zwane są czynnikami postaci (ang. *form factors*).² Warunek zachowania prądu $\partial_\mu J_{\text{hadr}}^\mu = 0$ prowadzi do $F_3(q^2) = 0$ dla rozpraszania elastycznego. Żeby to pokazać, korzystamy z następujących własności: jeśli stany $|p\rangle, |p'\rangle$ mają postać iloczynu spinora i fali płaskiej (reprezentacja położeniowa stanu), to wartościami własnymi operatora pędu $i\partial_\mu$ są odpowiednie zmienne pędowe

$$i\partial_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle, \quad i\langle p' | \overleftarrow{\partial}_\mu = \langle p' | p'_\mu.$$

Korzystając z równania Heisenberga $\partial_\mu J_{\text{hadr}}^\mu = [\partial_\mu, J_{\text{hadr}}^\mu]$ mamy

²W niektórych pracach zamiast czynnika $1/2M$ zapisuje się $\kappa/2M$ (κ jest anomalnym momentem magnetycznym nukleonu, $\kappa_p = \mu_p - 1 \approx 1.79$ dla protonu i $\kappa_n = \mu_n \approx -1.91$ dla neutronu), aby $F_2(q^2)$ zgadzało się z konwencjonalną definicją elektromagnetycznego czynnika postaci.

$$0 = \langle p' | \partial_\mu J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle = \left\langle p' \left| \overleftarrow{\partial}_\mu J_{\text{hadr}}^\mu - J_{\text{hadr}}^\mu \partial_\mu \right| p \right\rangle = \\ = -i \langle p' | p'_\mu J_{\text{hadr}}^\mu - J_{\text{hadr}}^\mu p_\mu | p \rangle = -i \langle p' | (p'_\mu - p_\mu) J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle,$$

co jest równoważne warunkowi

$$\langle p' | q_\mu J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle = 0. \quad (2.17)$$

Rozpisując element macierzowy prądu zgodnie z równaniem (2.16) mamy

$$\bar{u}(p') \left[F_1 q_\mu \gamma^\mu + i \frac{1}{2M} F_2 q_\mu q_\nu \sigma^{\mu\nu} + F_3 q^2 \right] u(p) = 0. \quad (2.18)$$

Drugi wyraz sumy jest tożsamościowo równy zero, bo $q_\mu q_\nu \sigma^{\mu\nu} = -q_\mu q_\nu \sigma^{\nu\mu} = -q_\nu q_\mu \sigma^{\mu\nu}$. Pierwszy wyraz też nie daje żadnego wkładu (pod warunkiem że $M = M'$), gdyż $\bar{u}(p') [p'_\mu \gamma^\mu - p_\mu \gamma^\mu] u(p) = \bar{u}(p') [M' - M] u(p) = 0$. Natomiast q^2 jest na ogół różne od zera (ujemne). Zatem, aby warunek (2.18) był spełniony, musimy przyjąć, że współczynnik F_3 znika.

Czynniki „Diraca” i „Pauliego” F_1 i F_2 wyznacza się doświadczalnie (osobno dla protonu i neutronu). Transformaty Fouriera rozkładu ładunku i momentu magnetycznego wewnątrz nukleonu oznaczają się przez G_E i G_M . Można pokazać, że $G_E(q^2)$ i $G_M(q^2)$ (zwane czynnikami „Sachsa”) muszą być kombinacjami liniowymi $F_1(q^2)$ i $F_2(q^2)$. Jeżeli wprowadzimy parametryzację

$$G_E = F_1 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2, \quad (2.19)$$

$$G_M = F_1 + F_2, \quad (2.20)$$

gdzie $Q^2 = -q^2$, to z eksperymentu wiemy (patrz np. [11]), że

$$G_E^p, G_M^p, G_M^n \sim \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ GeV}^2}\right)^2} \equiv G_{\text{dipol}}, \quad G_E^n \approx 0. \quad (2.21)$$

Powyższa dipolowa postać jest tylko przybliżeniem — czynniki postaci różnią się wartościami dla $Q^2 = 0$. W granicy nierelatywistycznej $F_1(0)$ interpretowane jest jako ładunek elektryczny nukleonu:

$$F_1^p(0) = 1, \quad F_1^n(0) = 0, \quad (2.22)$$

natomiast $F_1(0) + F_2(0)$ jest momentem magnetycznym nukleonu:

$$\mu_p = 1 + F_2^p(0), \quad \mu_n = F_2^n(0). \quad (2.23)$$

$F_2^{p,n}(0)$ jest *anomalnym momentem magnetycznym* protonu i neutronu.

2.3 Prąd słaby

Omówimy najważniejsze własności prądu słabego, a następnie podamy dokładną postać prądu, która z tych własności wynika.

2.3.1 Sprzężenie $V - A$

Po odkryciu w 1957 roku niezachowania parzystości w oddziaływaniach słabych zrozumiano, że oddziaływania te wiążą się z dwoma typami sprzężeń o przeciwnych parzystościach.

Operator skrętności ma postać

$$\hat{h} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|},$$

gdzie $\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$. Rozwiązania równania Diraca dla bezmasowych fermionów są stanami własnymi operatora skrętności. Dla neutrin skrętność wynosi zawsze $\chi = -1$ a dla antyneutrin $\chi = +1$. Potwierdzają to obserwacje, np. słaby rozpad naładowanego pionu $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Często definiuje się operator polaryzacji

$$P_{R,L} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{1} \pm \hat{h}). \quad (2.24)$$

Można pokazać, że w przypadku granicznym, gdy masa fermionu dąży do zera, obowiązują operator (2.24).

W przypadku ogólnym, funkcję falową fermionu obdarzonego masą można zapisać jako liniową kombinację składowej „prawoskrętnej” i „lewoskrętnej”:

$$\psi = \psi_R + \psi_L. \quad (2.25)$$

Kiedy energia E cząstki jest dużo większa w stosunku do jej masy m , to spinor Diraca opisujący tę cząstkę staje się stanem własnym operatora γ_5 (patrz np. Bjorken i Drell, 1964). Mamy wtedy

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R,$$

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L.$$

Im lepiej spełniony jest warunek $E \gg m$, tym dokładniejsze są powyższe równości. Dla bezmasowych cząstek są one spełnione dokładnie. Zapiszemy je teraz w równoważnej postaci:

$$\left(\frac{\mathbf{1} - \gamma_5}{2} \right) \psi_R = 0, \quad \left(\frac{\mathbf{1} - \gamma_5}{2} \right) \psi_L = \psi_L. \quad (2.26)$$

Widać stąd, że część lewoskrętną funkcji ψ można otrzymać działając na nią odpowiednim operatorem rzutowym. Równie łatwo można pokazać, że część prawoskrętną otrzymuje się działając operatorem z przeciwnym znakiem przy γ_5 . Ogólnie można napisać

$$\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \gamma_5)\psi. \quad (2.27)$$

Dla fermionów bezmasowych wynik działania tego operatora na funkcję falową jest taki sam jak operatora polaryzacji $\frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \hat{h})$. Sprzężenie hermitowskie i pomnożenie przez γ_0 równania (2.26) daje

$$\bar{\psi}_R \left(\frac{\mathbf{1} + \gamma_5}{2} \right) = 0, \quad \bar{\psi}_L \left(\frac{\mathbf{1} + \gamma_5}{2} \right) = \bar{\psi}_L. \quad (2.28)$$

Rozważmy czterofermionowe oddziaływanie słabe $A + B \rightarrow C + D$ z prądem leptonowym tworzonym przez cząstki A i C. Wiemy, że mogą w nim uczestniczyć tylko lewoskrętne neutrino. Żądamy więc, aby spinory w wyrażeniu na element macierzowy tego oddziaływania opisywały tylko *lewoskrętne* stany. Zapišmy to korzystając z (2.26) i (2.28):

$$\langle C | J^\mu | A \rangle = \bar{\psi}_C \left(\frac{\mathbf{1} + \gamma_5}{2} \right) \gamma^\mu \left(\frac{\mathbf{1} - \gamma_5}{2} \right) \psi_A = \bar{\psi}_C \gamma^\mu \left(\frac{\mathbf{1} - \gamma_5}{2} \right)^2 \psi_A.$$

Wykorzystując fakt, że

$$\left(\frac{\mathbf{1} - \gamma_5}{2} \right)^2 = \left(\frac{\mathbf{1} - \gamma_5}{2} \right),$$

możemy napisać

$$\langle C | J^\mu | A \rangle = \frac{1}{2} \bar{\psi}_C \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) \psi_A.$$

Amplitudę \mathcal{M} zapisalibyśmy w tym przypadku jako

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \langle D | J_\mu | B \rangle \langle C | J^\mu | A \rangle. \quad (2.29)$$

Uzasadniliśmy więc, że struktura prądu leptonowego musi mieć postać $V - A$, czyli część wektorowa minus część aksjalna.

W przypadku fermionów bezmasowych, skrętność jest zachowana w oddziaływaniach typu V lub A . Ogólna kombinacja tych amplitud odpowiada operatorowi

$$\frac{1}{2}(g_V + g_A \gamma_5),$$

gdzie g_A i g_V są stałymi współczynnikami. Ponieważ neutrino jest produkowane z dobrze określoną skrętnością $h = -1$, mieliśmy $g_A = -g_V$, co daje operator $\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)$. W tym przypadku amplitudy V i A , które mają ujemne i dodatnie parzystości względem inwersji przestrzennej, są równe co do wartości, lecz mają przeciwny znak.

Początkowo w teorii Fermiego punktowego oddziaływania dwóch prądów nie było części aksjalnej. Obecnie wiadomo, że wkład ten musi być uwzględniony. Wyniki doświadczeń potwierdzają postać $V - A$ ($\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5$) słabego prądu naładowanego, przy czym równość $g_A/g_V = -1$ zachodzi tylko w przypadku leptonowych oddziaływań

słabych, takich jak rozpad mionu. Nie jest ona słuszna dla oddziaływań słabych z udziałem hadronów. Na przykład stwierdzono, że w rozpadzie β neutronu $g_A/g_V = -1.26$, w rozpadzie β hiperonu Λ $g_A/g_V = -0.72$, a w rozpadzie $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$ $g_A/g_V = 0.34$. Głęboko nieelastyczne rozpraszanie neutrin na kwarkach tworzących hadrony jest dokładnie opisane teorią typu $V-A$, z $g_A = -g_V$. W takich oddziaływaniach kwarki są kwaziswobodnymi, punktowymi cząstkami. Kiedy jednak silne oddziaływania stają się dominujące, powyższa równość zostaje zakłócona, przynajmniej w części A sprzężenia słabego.

Z powyższej teorii płyną następujące wnioski:

- Tylko lewoskrętne neutrina i prawoskrętne antyneutrino są sprzężone słabym prądem z leptonami naładowanymi.
- Brak zachowania względem odbicia przestrzennego: jeśli P jest operatorem parzystości, to $P\psi_L$ (gdzie ψ_L opisuje neutrino) daje w wyniku neutrino z dodatnią skrętnością, które nie jest obserwowane.
- Brak zachowania względem zamiany cząstka-antycząstka: jeśli C jest operatorem sprzężenia ładunkowego, to $C\psi_L$ daje w wyniku antyneutrino z ujemną skrętnością.
- Zachowanie względem odwrócenia czasu (T). Operator ten odwraca zarówno kierunek spinu jak i kierunek pędu, zatem stan skrętności się nie zmienia.
- Zachowanie względem CP . Operacja ta przekształca lewoskrętne neutrina w prawoskrętne antyneutrino. W słabych rozpadach obojętnego kaonu zaobserwowano jednak efekty niezachowania CP .

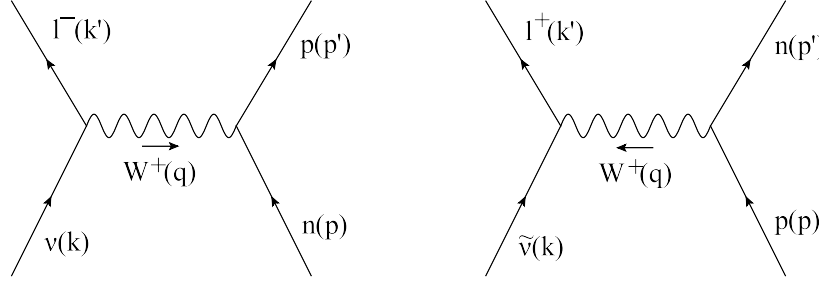
2.3.2 Dokładna postać prądu słabego

Porównując opis oddziaływań elektromagnetycznych i słabych widzimy, że stała G_F ma ten sam wymiar co $\frac{4\pi\alpha}{q^2}$, czyli GeV^{-2} (α jest stałą bezwymiarową).

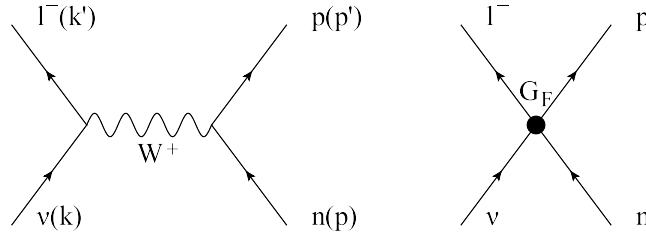
W Modelu Standardowym przyjmuje się, przez analogię do fotonów przenoszących oddziaływania elektromagnetyczne, że w oddziaływaniach słabych pośredniczą bozony wektorowe. Jednak w odróżnieniu od fotonów bozony te muszą mieć masę — w przeciwnym wypadku byłyby produkowane bezpośrednio w słabych rozpadach. Amplituda dla typowego procesu słabego ma postać

$$\mathcal{M} = \frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^{(1)} \frac{1}{M_W^2 - q^2} \frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^{(2)}, \quad (2.30)$$

gdzie M_W i q to masa i czteropęd niesione przez bozon pośredniczący w oddziaływaniu, g jest bezwymiarowym ładunkiem słabym kwarka lub leptonu; czynnik $\frac{1}{\sqrt{2}}$ został wprowadzony w celu zachowania konwencjonalnej definicji g . W sytuacjach, gdy $|q^2| \ll M_W^2$ (na przykład rozpad β lub rozpad mionu) oddziaływanie jest praktycznie punktowe. Na takim przybliżeniu opiera się *teoria Fermiego*. Propagator jest w niej stałym czynnikiem. Porównując równania (2.29) i (2.30) mamy



Rysunek 2.2: Diagramy dla rozpraszania neutrina na neutronie i antyneutrina na protonie.



Rysunek 2.3: Teoria Fermiego.

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (2.31)$$

Dla przykładu rozważmy rozpad β : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, lub równoważny proces — rozpraszanie neutrina na neutronie: $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$. Amplituda dla tych procesów ma postać

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{\text{hadr}}^\mu J_{\text{lept}}^\mu, \quad (2.32)$$

gdzie J_{hadr}^μ i J_{lept}^μ oznaczają odpowiednio hadronowy i leptonowy prąd słaby:

$$\langle e^- | J_{\text{lept}}^\mu | \nu_e \rangle = \bar{u}_e \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu, \quad (2.33)$$

a prąd hadronowy można zapisać jako $J_{\text{hadr}}^\mu = V^\mu - A^\mu$, gdzie V^μ i A^μ to odpowiednio część wektorowa i aksjalna słabego prądu hadronowego. Przeprowadzając podobne rozumowanie jak w przypadku elektromagnetycznym, dla części wektorowej otrzymujemy:

$$\langle p | V^\mu | n \rangle = \bar{u}_p \left[\gamma^\mu g_v + i \frac{g_m}{2M_N} \sigma^{\mu\nu} q_\nu + \frac{g_s}{2M_N} q^\mu \right] u_n, \quad (2.34)$$

gdzie funkcje g_v , g_m , g_s , zależące od q^2 , to słabe wektorowe czynniki postaci.³ Wprowadziliśmy tutaj średnią masę nukleonu: $M_N \equiv \frac{1}{2}(M_n + M_p)$.

³W literaturze można czasem spotkać stałą $\xi \equiv (\mu_p - 1) - \mu_n \approx 3.71$ stojącą przy funkcji g_m . My jednak włączyliśmy tę stałą do definicji g_m .

Widoczne jest podobieństwo między V^μ a prądem elektromagnetycznym (2.16). Ładunek elektryczny jest ściśle zachowany, nawet w przypadku cząstek oddziałujących silnie. Ponadto oddziaływania elektromagnetyczne są typu wektorowego, ze stałą sprzężenia $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ bezpośrednio związaną z ładunkiem.

Ze względu na strukturę wewnętrzną hadronów, elementy macierzowe słabego prądu $J_{\text{hadr}}^\mu(x)$ są trudniejsze do wyliczenia niż elementy macierzowe prądu $J_{\text{lept}}^\mu(x)$. Rozpad β , który zachodzi w obszarze zdominowanym przez oddziaływania silne, jest jednak dobrze opisany elementem macierzowym o strukturze

$$\langle p | J_{\text{hadr}}^\mu | n \rangle = \bar{u}_p \gamma^\mu (g_V + g_A \gamma_5) u_n$$

z g_V prawie równym 1 i $g_A \approx -1.26$. W prądzie leptonowym współczynnik g_V jest równy 1. Można więc przypuszczać, że oddziaływania silne nie wpływają na wartość współczynnika przy części wektorowej. Przyjmuje się, że część wektorowa słabego prądu jest zachowana, z uniwersalną stałą sprzężenia (Gershtein, Zeldovich 1955 oraz Feynman, Gell-Mann 1958). Założenie to opiera się na analogii do prądu elektromagnetycznego i nazywane jest hipotezą „o zachowanym prądzie wektorowym” (lub CVC, od ang. *conserved vector current*). Przy tym założeniu czynnik postaci g_s w równaniu (2.34) znika z tego samego powodu, co F_3 w przypadku elektromagnetycznym. Część wektorowa prądu słabego przyjmuje więc postać

$$\langle p' | V^\alpha | p \rangle = \bar{u}_p(p') \left[\gamma^\alpha g_v(q^2) + i \frac{1}{2M_N} g_m(q^2) \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right] u_n(p). \quad (2.35)$$

Do pełnej charakterystyki prądu hadronowego niezmiennającego dziwności potrzebna nam jest jeszcze część aksjalna. Według [3] i [6], ma ona (z dokładnością do stałych współczynników) postać

$$\langle p' | (-A^\alpha) | p \rangle = \bar{u}_p(p') \left[\gamma^\alpha \gamma_5 g_a(q^2) + i \frac{1}{2M_N} g_t(q^2) \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \gamma_5 + \frac{1}{2M_N} g_p(q^2) q^\alpha \gamma_5 \right] u_n(p). \quad (2.36)$$

Niektóre własności elementu macierzowego narzucają pewne warunki na czynniki postaci g_a , g_t i g_p . Na przykład niezmienniczość względem inwersji czasowej T wymusza równość

$$g_t(q^2) = 0,$$

co zostało pokazane m.in. w książce Bilen'kija [6]. W książce tej można również znaleźć uzasadnienie faktu, że wszystkie czynniki postaci prądu słabego są funkcjami rzeczywistymi.

Podsumowując, jeśli założymy prawdziwość CVC i niezmienniczość względem T, to element macierzowy dla procesu $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \langle p' | J_{\text{hadr}}^\alpha | p \rangle &= \langle p' | V^\alpha - A^\alpha | p \rangle = & (2.37) \\ &= \bar{u}(p') \left[\gamma^\alpha g_v(q^2) + i \frac{1}{2M_N} \sigma^{\alpha\beta} q_\beta g_m(q^2) + \gamma^\alpha \gamma_5 g_a(q^2) + \frac{1}{2M_N} q^\alpha \gamma_5 g_p(q^2) \right] u(p). \end{aligned}$$

Ponadto czynniki postaci g_v i g_m wyrażają się przez elektromagnetyczne czynniki postaci nukleonów uczestniczących w procesie (pokażemy to w następnym podrozdziale).

2.4 Hipoteza CVC

W tym podrozdziale sformułujemy hipotezę o zachowanym prądzie wektorowym (CVC) i zastosujemy ją do określenia dwóch czynników postaci dla rozpraszania słabego (g_v , g_m) poprzez czynniki postaci dla rozpraszania elektronu (F_1 , F_2).

Według hipotezy CVC część wektorowa $V^\mu(x)$ prądu hadronowego należy do trypletu zachowanych prądów (Feynman i Gell-Mann, 1958). Tak jak prawo zachowania ładunku elektrycznego implikuje istnienie zachowanego prądu $J_{em}^\mu(x)$, tak zachowanie izospinu w reakcjach hadronowych implikuje istnienie trzech prądów: $I_j^\mu(x)$, $j = 1, 2, 3$, każdy z nich jest zachowany:

$$\partial_\mu I_j^\mu(x) = 0.$$

Wygodnie jest sformułować hipotezę CVC przy użyciu pojęcia spinu izotopowego. W tym celu definiujemy dla nukleonów dublet izospinowy

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \bar{N} = (\bar{p}, \bar{n}).$$

Przy użyciu standardowych macierzy izospinowych

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

możemy zapisać (hadronowe) prądy elektromagnetyczny i słaby wektorowy, tak jak jest to zrobione w [1] i [5]:

$$J_{em}^\mu(x) = \bar{p}(x)\gamma^\mu p(x) = \frac{1}{2}\bar{N}(x)\gamma^\mu(\mathbf{1} + \tau^3)N(x), \quad (2.39)$$

$$V^\mu(x) = \bar{p}(x)\gamma^\mu n(x) = \frac{1}{2}\bar{N}(x)\gamma^\mu(\tau^1 + i\tau^2)N(x). \quad (2.40)$$

Pierwszy z tych prądów zawiera część „izoskalarną” $J_{em}^\mu(\text{izoskalar}) = \frac{1}{2}\bar{N}\gamma^\mu N$, która spełnia warunek zachowania:

$$\partial_\mu(\bar{N}(x)\gamma^\mu N(x)) = 0,$$

i część „izowektorową” — trzecią składową:

$$J_{em}^\mu(\text{izowektor}) = \frac{1}{2}\bar{N}\gamma^\mu\tau^3 N.$$

Część izowektorowa nie jest zachowana dopóki nie zostanie uzupełniona wkładem od pionów. Taka struktura prądu jest analogiczna dla innych multipletów (nie tylko dla nukleonów) [5]. Hipoteza CVC polega na założeniu, że powyższe prądy izowektorowe są tylko różnymi składowymi tego samego wektorowego prądu izospinowego

$$I_j^\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{N}(x) \gamma^\mu \tau^j N(x), \quad (2.41)$$

gdzie $j = 1, 2, 3$. Częściej używa się jednak $j = +, -, 3, s$, przy czym

$$\tau^+ \equiv \tau^1 + i\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau^- \equiv \tau^1 - i\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau^s \equiv \mathbf{1}.$$

Możemy więc napisać

$$J_{\text{em}}^\mu(x) = I_s^\mu(x) + I_3^\mu(x), \quad (2.42)$$

$$V^\mu(x) = I_1^\mu(x) + iI_2^\mu(x) = I_+^\mu(x). \quad (2.43)$$

Prąd I_-^μ odpowiadałby przejściu protonu w neutron. Prąd I_j^μ jest zachowany ze względu na zachowanie izospinu w oddziaływaniach silnych, więc $\partial_\mu V^\mu(x) = 0$. Skoro V^μ jest zachowany, to element macierzy $\langle p | V^\alpha | n \rangle = \bar{u}_p \gamma^\alpha u_n$ nie powinien być zmieniany przez oddziaływania silne, co by wyjaśniało $g_V \approx 1$.

Pokażemy teraz, że czynniki postaci $g_v(q^2)$ i $g_m(q^2)$ występujące w wektorowym prądzie hadronowym można związać z elektromagnetycznymi czynnikami postaci nukleonu.

Prąd I_j^μ ma własności operatora izospinu i spełnia

$$[T^i, I_j^\mu] = i\epsilon_{ijk} I_k^\mu, \quad (2.44)$$

gdzie T^i — operator i -tej składowej izospinu. Stąd

$$\begin{aligned} [T^+, I_3^\mu] &= [T^1, I_3^\mu] + i[T^2, I_3^\mu] = \\ &= i\epsilon_{132} I_2^\mu + i^2 \epsilon_{231} I_1^\mu = -iI_2^\mu - I_1^\mu = -I_+^\mu. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Element macierzy dla neutronu o pędzie p (stan $|p\rangle_n$) i protonu o pędzie p' (stan $|p'\rangle_p$):

$${}_p \langle p' | I_+^\mu | p \rangle_n = {}_p \langle p' | I_3^\mu T^+ | p \rangle_n - {}_p \langle p' | T^+ I_3^\mu | p \rangle_n. \quad (2.46)$$

Operator T^+ podnosi a T^- obniża trzecią składową izospinu o 1:

$$T^+ |p\rangle_n = |p\rangle_p \Rightarrow {}_p \langle p' | T^+ = \left(T^- |p'\rangle_p \right)^\dagger = \left(|p'\rangle_n \right)^\dagger = {}_n \langle p' |.$$

Mamy więc

$${}_p \langle p' | I_+^\mu | p \rangle_n = {}_p \langle p' | I_3^\mu | p \rangle_p - {}_n \langle p' | I_3^\mu | p \rangle_n. \quad (2.47)$$

Ponadto spełniona jest następująca równość:

$${}_p \langle p' | I_s^\mu | p \rangle_p = {}_n \langle p' | I_s^\mu | p \rangle_n. \quad (2.48)$$

Wynika ona z przekształceń operatorem symetrii, który definiujemy $U = \exp(i\pi T^2)$. Jest to operator unitarny, bo T^2 jest generatorem grupy $SU(2)$. U można interpretować jako obrót o π w przestrzeni izospinowej. Mamy $UI_s^\mu U^{-1} = I_s^\mu$ oraz $U|p\rangle_n = |p\rangle_p$. Stąd możemy obliczyć

$${}_p \langle p' | I_s^\mu | p \rangle_p = {}_n \langle p' | U^\dagger I_s^\mu U | p \rangle_n = {}_n \langle p' | I_s^\mu | p \rangle_n.$$

Z (2.47) i (2.48) mamy

$${}_p \langle p' | I_+^\mu | p \rangle_n = {}_p \langle p' | J_{\text{em}}^\mu | p \rangle_p - {}_n \langle p' | J_{\text{em}}^\mu | p \rangle_n. \quad (2.49)$$

Znaleźliśmy więc związek między elementem macierzowym słabego prądu wektorowego a elementem macierzowym prądu elektromagnetycznego.

Jak pokazaliśmy wcześniej,

$${}_{p,n} \langle p' | J_{\text{em}}^\mu | p \rangle_{p,n} = \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_1^{\text{p},n}(q^2) + i \frac{1}{2M} F_2^{\text{p},n}(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p). \quad (2.50)$$

Podstawiając (2.34) (z $g_s = 0$) i (2.50) do (2.49), znajdujemy zależność między słabymi i elektromagnetycznymi czynnikami postaci:

$$\begin{cases} g_v(q^2) = F_1^{\text{p}}(q^2) - F_1^{\text{n}}(q^2) \\ g_m(q^2) = F_2^{\text{p}}(q^2) - F_2^{\text{n}}(q^2) \end{cases} \quad (2.51)$$

Wniosek jest taki, że powyższe dwa czynniki postaci zawierają ten sam człon dipolowy, co czynniki F_1 i F_2 . Korzystając z (2.22) i (2.23) otrzymujemy $g_v(0) = 1$ i $g_m(0) \approx 3.71$.

Rozdział 3

Przekroje czynne

Abyśmy mogli opisać przekrój czynny rozpraszania neutrin na jądrach atomowych, musimy dysponować przekrojem czynnym dla rozpraszania na swobodnych nukleonach. Dlatego znaczną część tego rozdziału poświęcimy rozpraszaniu leptonów na swobodnym nukleonie i wprowadzimy niezbędny formalizm, jak na przykład ogólną definicję tensora hadronowego.

3.1 Ogólny opis przekroju inkluzywnego

3.1.1 Elektron

Rozważmy *dowolną* tarczę hadronową X i proces $eX \rightarrow e'X'$. Elektrony będziemy traktować jako fale płaskie. W *przybliżeniu impulsowym* elektrony są na tyle wysokoenergetyczne, że „widzą” jądro jako swobodne nukleony. Dlatego słuszne będzie założenie, że elektron sprzęga się z pojedynczym nukleonem. Gdy hadronowy stan końcowy X' nie jest pojedynczą cząstką, nie można skorzystać z reguł Feynmana. W celu wyliczenia macierzy przejścia S musielibyśmy odwołać się do klasycznej teorii pola i związku S z hamiltonianem oddziaływania. Pozwala to wyrazić S_{fi} przez elementy macierzowe prądów. Operatory prądu i stany zdefiniujemy w obrazie Heisenberga.

$$S_{\text{fi}} = ie^2 \int d^4x \int d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k' | J_{\mu}^{\text{lept}}(x) | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^{\mu}(y) | p_i \rangle e^{-iq(x-y)}$$

W przypadku gdy wszystkie cztery stany są stanami własnymi hamiltonianu i operatora pędu, możemy zapisać zależność od x i y (zarówno czasową x_0, y_0 , jak i przestrzenną) w postaci funkcji wykładniczych oraz wyciąkować S_{fi} po tych zmiennych. Pojawiają się dwie delty Diraca:

$$\begin{aligned}
S_{\text{fi}} &= ie^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}}(0) | k \rangle e^{i(k-k')x} \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu(0) | p_i \rangle e^{i(p_i-p_f)y} e^{-iq(x-y)} \\
&= ie^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}}(0) | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu(0) | p_i \rangle e^{i(k-k'-q)x} e^{i(p_i-p_f+q)y} \\
&= ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}}(0) | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu(0) | p_i \rangle (2\pi)^4 \delta^4(k-k'-q) (2\pi)^4 \delta^4(p_i-p_f+q)
\end{aligned}$$

Następnie przez wycalkowanie po q zamieniamy obie delty na jedną (zachowanie czteropędu) otrzymując ostatecznie

$$S_{\text{fi}} = i(2\pi)^4 \frac{e^2}{q^2} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}}(0) | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu(0) | p_i \rangle \delta^4(k-k'+p_i-p_f), \quad (3.1)$$

gdzie $q = k - k' = p_f - p_i$.

Znajdźmy teraz inkluzywny przekrój czynny. Przestrzenią fazową stanów końcowych jest $d\beta = d^3k' d\beta_h$, gdzie $d\beta_h$ odpowiada samym hadronom. Wiemy też, że całkowity pęd początkowy P_i jest równy $k + p_i$, a końcowy $P_f = k' + p_f$. Korzystając z (3.1) i ze związku (2.2) dostaniemy amplitudę przejścia:

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -(2\pi)^3 \frac{e^2}{q^2} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}} | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu | p_i \rangle,$$

a następnie z ogólnego wzoru (2.7) dostaniemy różniczkowy przekrój czynny:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= (2\pi)^4 (2\pi)^6 \frac{e^4}{q^4} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}} | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu | p_i \rangle \langle k' | J_\nu^{\text{lept}} | k \rangle^* \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\nu | p_i \rangle^* \times \\
&\times \frac{1}{u_{\text{rel}}} \delta^4(k' + p_f - k - p_i) d^3k' d\beta_h.
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Rozważamy procesy z wysokoenergetycznymi elektronami: $|\vec{k}| \gg m_e$. Jeśli oprócz tego założymy, że tarcza spoczywa: $p_i = (M_T, \vec{0})$, to prędkość względna wyniesie

$$u_{\text{rel}} = \frac{|\vec{k}|}{E} \approx 1.$$

Warunek $|\vec{k}'| \gg m_e$ natomiast prowadzi do

$$d^3k' = |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| d\Omega' \approx E'^2 dE' d\Omega'.$$

W wyrażeniu (3.2) można wyróżnić część leptonową i część hadronową. Jeśli wiązka padająca jest niespolaryzowana i nie mierzymy spinu, to uśredniamy/sumujemy po dozwolonych wartościach $\frac{1}{2} \sum_{\text{spiny pocz.}} \sum_{\text{spiny końc.}} \equiv \overline{\sum_{\text{spiny}}}$ i część leptonową możemy zapisać

$$\overline{\sum_{\text{spiny}}} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}} | k \rangle \langle k' | J_\nu^{\text{lept}} | k \rangle^* = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{EE'} m_e^2 \overline{\sum_{\text{spiny}}} \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) (\bar{u}(k') \gamma_\nu u(k))^*,$$

gdzie wykorzystano reprezentację stanów cząstek swobodnych podaną w Dodatku A. Wprowadzamy tzw. *tensor leptonowy*

$$L_{\mu\nu}^{\text{el}} \equiv m_e^2 \sum_{\text{spiny}} \overline{(\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k))} (\bar{u}(k')\gamma_\nu u(k))^* \quad (3.3)$$

i *tensor hadronowy*

$$W^{\mu\nu} \equiv (2\pi)^6 \sum_f \int d\beta_h \sum_{\text{spiny}} \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu | p_i \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\nu | p_i \rangle^* \delta^4(k' + p_f - k - p_i) E_p, \quad (3.4)$$

gdzie przez \sum_f oznaczono sumowanie po wszystkich stanach końcowych, do których jest możliwe przejście ze stanu początkowego, włączając stany wzbudzone. Tak zdefiniowany tensor dobrze transformuje się pod działaniem grupy Lorentza [12]. Pozwoli to nam zapisać inkluzywny przekrój czynny dla elektronu w zwartej postaci:

$$\frac{d^3\sigma^{\text{el}}}{dE'd\Omega'} = (2\pi)^{-2} \frac{e^4}{q^4} \frac{E'}{EE_p} L_{\mu\nu}^{\text{el}} W^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Całkowity przekrój czynny σ^{el} dla rozpraszania elektromagnetycznego jest nieskończony.

Wynik otrzymaliśmy wiedząc o stanach hadronowych tylko to, że są stanami o określonej energii i pędzie. Cała reszta informacji o hadronach zawarta jest w tensorze $W^{\mu\nu}$. Wzór (3.5) można zatem stosować do opisu zarówno rozpraszania na swobodnym nukleonie, jak i na jądrze atomowym. Powyższy przekrój czynny jest skalarem. W przypadku pomiaru spinów/skrętności, zależałyby od układu odniesienia.

3.1.2 Neutrino

Przekroju czynnego rozpraszania neutrina na dowolnej tarczy nie będziemy liczyć krok po kroku, lecz posłużymy się wynikami otrzymanymi dla elektronu. Omówimy tylko podobieństwa i różnice między tymi dwoma przypadkami.

Różnica między macierzą przejścia dla elektronu i dla oddziaływania CC wynika z innych stałych sprzężenia i rodzaju propagatora sprzęgającego prąd leptonowy z hadronowym. Dla elektronu mieliśmy czynnik $-\frac{e^2}{q^2}$ w macierzy S_{fi} , co dało czynnik $\frac{e^4}{q^4}$ w przekroju czynnym. Teraz natomiast korzystamy z teorii Fermiego oddziaływania punktowego. Elementy macierzowe prądów będą miały taką samą postać, jak dla oddziaływania elektromagnetycznego, przy czym przez J_μ^{lept} i J_{hadr}^μ będziemy teraz rozumieć prąd słaby.

$$S_{\text{fi}} = -i \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}}(x) | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu(y) | p_i \rangle e^{-iq(x-y)}$$

Jeśli chodzi o założenia dotyczące stanów leptonowych i hadronowych, to są one takie same jak poprzednio. Wiemy również, że neutrino ma masę, dlatego opisujemy je funkcją falową z czynnikiem normalizacyjnym analogicznym do elektronowego.

$$\begin{aligned} d\sigma &= (2\pi)^4 (2\pi)^6 \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}} | k \rangle \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\mu | p_i \rangle \times \\ &\times \langle k' | J_\nu^{\text{lept}} | k \rangle^* \langle p_f | J_{\text{hadr}}^\nu | p_i \rangle^* \frac{1}{u_{\text{rel}}} \delta^4(k' + p_f - k - p_i) d^3 k' d\beta_h \end{aligned}$$

Część leptonowa zapisana w notacji macierzowej:

$$\sum_{\text{spiny}} \langle k' | J_\mu^{\text{lept}} | k \rangle \langle k' | J_\nu^{\text{lept}} | k \rangle^* = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{EE'} m_\nu m_l \sum_{\text{spiny}} \bar{u}(k') \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u(k) (\bar{u}(k') \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u(k))^*.$$

Tutaj, w odróżnieniu od elektronu, nie uśredniamy, lecz sumujemy po spinie początkowym, bo rzut spinu neutrina na kierunek ruchu jest zawsze ujemny. Tensor leptonowy dla oddziaływania CC definiujemy jako

$$L_{\mu\nu}^{\text{CC}} \equiv m_\nu m_l \sum_{\text{spiny}} (\bar{u}(k') \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u(k)) (\bar{u}(k') \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u(k))^*, \quad (3.6)$$

natomiast tensor hadronowy $W_{\text{CC}}^{\mu\nu}$ jest zdefiniowany identycznie jak tensor $W_{\text{el}}^{\mu\nu}$ dany równaniem (3.4).

W przypadku neutrin mamy $|\vec{k}| \gg m_\nu$ i przybliżamy prędkość względną przez $u_{\text{rel}} \approx 1$, podobnie jak to zrobiliśmy dla elektronów. Jednak *niekoniecznie* musi zachodzić $m_l \ll |\vec{k}'| \approx E'$, zwłaszcza dla neutrin mionowych o niezbyt wysokich energiach. Ponieważ

$$\frac{d|\vec{k}'|}{dE'} = \frac{d}{dE'} \sqrt{E'^2 - m_l^2} = \frac{E'}{\sqrt{E'^2 - m_l^2}} = \frac{E'}{|\vec{k}'|},$$

to teraz $d^3 k' = |\vec{k}'| E' dE' d\Omega'$ i różniczkowy inkluzywny przekrój czynny przyjmie ostatecznie postać

$$\frac{d^3 \sigma^{\text{CC}}}{dE' d\Omega'} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi^2} \frac{|\vec{k}'|}{EE_p} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} W^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

3.2 Swobodny nukleon

3.2.1 Przekrój czynny dla elektronu

Obliczymy teraz przekrój czynny na elastyczne rozpraszanie elektromagnetyczne elektronu na swobodnym nukleonie, czyli proces $e^- N \rightarrow e^- N$. Przy okazji wprowadzimy tzw. czynnik odrzutu, który jest istotny zwłaszcza przy dużych przekazach energii w stosunku do masy tarczy.

W stanie początkowym mamy dwie cząstki swobodne o czteropędach k , p , a w stanie końcowym – o czteropędach k' , p' . Reguły Feynmana i wycałkowanie po $d^4 q$ dadzą

$$S_{\text{fi}} = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) \delta^4(k + p - k' - p') \prod_{j=1}^4 \sqrt{\frac{m_j}{E_j}},$$

gdzie $q = k - k'$, a $\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1 + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2$ jest operatorem elektromagnetycznego prądu hadronowego. Ale $S_{\text{fi}} = -2\pi i \delta^4(P_{\text{f}} - P_{\text{i}}) \mathcal{M}_{\text{fi}}$, czyli amplituda wynosi

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) \prod_{j=1}^4 \sqrt{\frac{m_j}{E_j}}.$$

Jeśli założymy (podobnie jak to robiliśmy przy ogólnym opisie przekroju inkluzywnego), że wiązka początkowa i tarcza są niespolaryzowane i nie mierzymy spinu, to kwadrat modułu amplitudy

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 &\rightarrow \overline{\sum_{\text{spiny lept.}}} \overline{\sum_{\text{spiny hadr.}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{e^4}{q^4} \overline{\sum_{\text{spiny lept.}}} (\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)) (\bar{u}(k') \gamma_\nu u(k))^* \times \\ &\times \overline{\sum_{\text{spiny hadr.}}} (\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^* \frac{m_e^2 M^2}{EE' E_p E_{p'}}. \end{aligned}$$

Tensor leptonowy dla elektronu jest zdefiniowany równaniem (3.3), natomiast tensor hadronowy odpowiadający swobodnemu nukleonowi ma postać

$$H_{\text{el}}^{\mu\nu} \equiv M^2 \overline{\sum_{\text{spiny}}} (\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^*.$$

Możemy wyrazić kwadrat amplitudy przez tensory $L_{\mu\nu}^{\text{el}}$ i $H_{\text{el}}^{\mu\nu}$:

$$|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{EE' E_p E_{p'}} L_{\mu\nu}^{\text{el}} H_{\text{el}}^{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Wyjdźmy teraz ze wzoru (2.7) i podstawmy $d\beta = d^3 k' d^3 p'$ oraz $P_{\text{i}} = p + k$, $P_{\text{f}} = p' + k'$. Wykorzystamy pędową część delty Diraca całkując po trójpedzie \vec{p}' :

$$\begin{aligned} \sigma &= (2\pi)^4 \int d^3 k' \int d^3 p' \frac{|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}{u_{\text{rel}}} \delta^4(p' + k' - p - k) \\ &= (2\pi)^4 \int d^3 k' \int d^3 p' \frac{|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}{u_{\text{rel}}} \delta(E_{p'} + E' - E_p - E) \delta^3(\vec{p}' + \vec{k}' - \vec{p} - \vec{k}) \\ &= (2\pi)^4 \int d^3 k' \frac{|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}{u_{\text{rel}}} \delta(E_{p'} + E' - E_p - E) \Bigg|_{\text{warunek } \vec{p}' = \vec{p} + \vec{k} - \vec{k}'}. \end{aligned}$$

We współrzędnych sferycznych $d^3 k' = |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| d\Omega'$. Zakładamy, że tarcza (nukleon) spoczywa: $\vec{p} = \vec{0}$ i pomijamy masę elektronu w stosunku do jego energii: $E, E' \gg m_e$.

Pozwala to m.in. dokonać przybliżenia $u_{\text{rel}} = \frac{|\vec{k}|}{E} \approx 1$. Zachowamy jednak tymczasowo zmienną całkowania $|\vec{k}'|$ i wprowadzimy ją do delty Diraca: $\delta(E_{p'} + E' - E_p - E) \rightarrow \delta(|\vec{k}'| - \dots)$. Jak się przekonamy, doprowadzi to do pojawienia się czynnika odrzutu. W celu zamiany zmiennych w delcie Diraca korzystamy z tożsamości

$$\delta\left(f(|\vec{k}'|)\right) = \frac{\delta(|\vec{k}'| - |\vec{k}'|_0)}{\left|\frac{\partial f}{\partial |\vec{k}'|}(|\vec{k}'|_0)\right|},$$

gdzie $|\vec{k}'|_0$ jest miejscem zerowym funkcji f . Zapiszmy funkcję f jako

$$\begin{aligned} f(|\vec{k}'|) &= E_{p'} + E' - E_p - E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}'|^2} + E' - M - E \\ &\approx \sqrt{M^2 + E^2 + |\vec{k}'|^2 - 2E|\vec{k}'| \cos \theta} + |\vec{k}'| - M - E. \end{aligned}$$

Jej pochodna wynosi

$$\frac{\partial f}{\partial |\vec{k}'|} = \frac{|\vec{k}'| - E \cos \theta}{E_{p'}} + 1.$$

Miejsce zerowe to $|\vec{k}'|_0 = M + E - E_{p'}$, więc

$$\frac{\partial f}{\partial |\vec{k}'|}(|\vec{k}'|_0) = \frac{M + E - E_{p'} - E \cos \theta}{E_{p'}} + 1 = \frac{M + E - E \cos \theta}{E_{p'}}.$$

Jest to wyrażenie dodatnie, więc $\left|\frac{\partial f}{\partial |\vec{k}'|}(|\vec{k}'|_0)\right| = \frac{M + E - E \cos \theta}{E_{p'}}$ i przekrój czynny z nową zmienną przyjmie postać

$$\begin{aligned} \sigma &= (2\pi)^4 \int d|\vec{k}'| \int d\Omega' E'^2 |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \frac{E_{p'}}{M + E - E \cos \theta} \delta(|\vec{k}'| - M - E + E_{p'}) \Big|_{\vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}'} \\ &= (2\pi)^4 \int d\Omega' |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \frac{E'^2 E_{p'}}{M + E(1 - \cos \theta)} \Big|_{\vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}', E' = M + E - E_{p'}}. \end{aligned}$$

Kąt bryłowy rozproszenia elektronu Ω' stanowi dwa stopnie swobody, natomiast wycalkowaliśmy po trzecim stopniu, czyli wartości pędu rozproszonego elektronu. Różniczkowy przekrój czynny możemy zatem zapisać jako

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = (2\pi)^4 |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \frac{E'^2 E_{p'}}{M + 2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} = (2\pi)^4 |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 R \frac{E'^2 E_{p'}}{M},$$

gdzie $R \equiv \left[1 + \frac{2E}{M_T} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]^{-1}$ jest czynnikiem odrzutu tarczy o masie M_T . Po wstawieniu kwadratu amplitudy danego równaniem (3.8) otrzymamy

$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{d\Omega'} = (2\pi)^{-2} \frac{e^4}{q^4} R \frac{E'}{M^2 E} L_{\mu\nu}^{\text{el}} H_{\text{el}}^{\mu\nu}$$

z warunkiem $p' = p + k - k'$.

W Dodatku B.1.3 zostało jawnie wyliczone zwięźenie $L_{\mu\nu}^{\text{el}} H_{\text{el}}^{\mu\nu}$. Wstawiając je do otrzymanego powyżej wzoru, dostaniemy przekrój czynny wyrażony przez elektromagnetyczne czynniki postaci:

$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{d\Omega'} = \frac{e^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{64\pi^2 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} R \left\{ \left(F_1^2 + \frac{F_2^2}{4M^2} Q^2 \right) + (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\}.$$

Skorzystaliśmy przy tym z $q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$ (jest to prawdziwe również dla nieelastycznych procesów), a $Q^2 \equiv -q^2 > 0$. Powyższy przekrój czynny zależy od czynników postaci $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$; oprócz tego od zmiennych Q^2 i $\cos \theta$. Nie są to jednak niezależne zmienne – powinno być jasne, że w formalizmie rozpraszania elastycznego istnieje tylko jeden kinematyczny stopień swobody, czyli jednoznaczna odpowiedniość między zmiennymi Q^2 , $\cos \theta$, E' . Można na przykład wyrazić Q^2 tylko przez $\cos \theta$ (bez E') rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} Q^2 = -(k - k')^2 & = 2EE'(1 - \cos \theta) \\ Q^2 = -(p' - p)^2 & = 2M(E - E') \end{cases}.$$

Energia padającego elektronu E jest ustalona. Funkcja opisująca ten przekrój czynny nie zależy natomiast od kąta azymutalnego φ (symetria cylindryczna wokół wektora \vec{k}). Całkowity przekrój czynny $\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right) d\Omega' = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right) d\cos \theta d\varphi$ dla rozpraszania elektromagnetycznego jest nieskończony. Można wycałkować jedynie po φ otrzymując $\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = 2\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)$.

Jeśli wprowadzimy standardowe oznaczenie $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ oraz przekrój czynny Motta:

$$\sigma_{\text{M}} \equiv \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

to różniczkowy przekrój czynny dla procesu $e^-N \rightarrow e^-N$ zapiszemy ostatecznie jako

$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{d\Omega'} = \sigma_{\text{M}} R \left\{ \left(F_1^2 + \frac{F_2^2}{4M^2} Q^2 \right) + (F_1 + F_2)^2 \frac{Q^2}{2M^2} \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right\}.$$

Ogólną postać tensora hadronowego $W_{\text{el}}^{\mu\nu}$ wyraża się często przez skalarne „funkcje struktury” w_1^{el} i w_2^{el} . Dla swobodnego nukleonu ($M_{\text{T}} = M$) możemy je wyznaczyć porównując ze sobą tensory $W_{\text{el}}^{\mu\nu}$ i $H_{\text{el}}^{\mu\nu}$ (lub wyrażenia na przekrój czynny):

$$\begin{aligned} w_1^{\text{el}}(Q^2) &= -\frac{1}{4} Q^2 (F_1(Q^2) + F_2(Q^2))^2, \\ w_2^{\text{el}}(Q^2) &= M^2 F_1^2(Q^2) + \frac{1}{4} Q^2 F_2^2(Q^2). \end{aligned}$$

3.2.2 Przekrój czynny dla neutrina

Rozpatrujemy teraz proces $\nu n \rightarrow l^- p$. Jest to oddziaływanie „kwazielastyczne” przez „prąd naładowany” (od ang. *charged current quasi-elastic*, CCQE). W stanie początkowym

mamy neutron i neutrino, a w stanie końcowym – proton i lepton naładowany. W obrębie teorii Fermiego, z reguł Feynmana i całkowania po d^4q otrzymamy element macierzy S :

$$S_{\text{fi}} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_l(k') \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu(k) \times \\ \times \bar{u}_p(p') \Gamma^\mu u_n(p) \delta^4(k' + p' - k - p) \prod_{j=1}^4 \sqrt{\frac{m_j}{E_j}},$$

gdzie macierz Γ^μ jest teraz wierzchołkiem oddziaływania słabego, w wyniku którego neutron przechodzi w proton. Operator ten dany jest wyrażeniem w nawiasie kwadratowym w równaniu (2.37). Znajdujemy amplitudę prawdopodobieństwa, która wynosi

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_l(k') \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu(k) \bar{u}_p(p') \Gamma^\mu u_n(p) \prod_{j=1}^4 \sqrt{\frac{m_j}{E_j}},$$

natomiast jej kwadrat

$$|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \rightarrow \sum_{\text{spiny lept.}} \overline{\sum_{\text{spiny hadr.}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \\ = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2} \sum_{\text{spiny lept.}} (\bar{u}_l(k') \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu(k)) (\bar{u}_l(k') \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu(k))^* \times \\ \times \overline{\sum_{\text{spiny hadr.}}} (\bar{u}_p(p') \Gamma^\mu u_n(p)) (\bar{u}_p(p') \Gamma^\nu u_n(p))^* \frac{m_\nu m_l M M'}{E E' E_p E_{p'}}.$$

Podobnie jak w rozpraszaniu elektronu, kwadrat modułu \mathcal{M}_{fi} można wyrazić przez tensor leptonowy i hadronowy. Tensor leptonowy, odpowiadający powyższej amplitudzie, zdefiniowany został w równaniu (3.6). Tensor hadronowy będzie miał postać

$$H_{CC}^{\mu\nu} \equiv M M' \overline{\sum_{\text{spiny}}} (\bar{u}_p(p') \Gamma^\mu u_n(p)) (\bar{u}_p(p') \Gamma^\nu u_n(p))^*, \quad (3.9)$$

gdzie M i M' to odpowiednio masa neutronu i protonu. Mamy więc

$$|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2} \frac{1}{E E' E_p E_{p'}} L_{\mu\nu}^{CC} H_{CC}^{\mu\nu}.$$

Korzystamy z tego samego wzoru na przekrój czynny, co w przypadku elektronu, czyli

$$\sigma = (2\pi)^4 \int d^3k' \frac{|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}{u_{\text{rel}}} \delta(E_{p'} + E' - E_p - E) \Bigg|_{\text{warunek } \vec{p}' = \vec{p} + \vec{k} - \vec{k}'}$$

Wciąż słuszne jest przybliżenie $u_{\text{rel}} \approx 1$. Założymy znów, że nukleon początkowy spoczywa: $(E_p, \vec{p}) = (M_N, 0)$. Wtedy całkowity przekrój czynny zapiszemy w formie

$$\sigma^{\text{CC}} = \frac{G_{\text{F}}^2 \cos^2 \theta_{\text{C}}}{8\pi^2} \int d^3 k' \delta(E_{p'} + E' - E_p - E) \frac{1}{M_{\text{N}} E E' E_{p'}} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

z warunkiem $\vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}'$. Różniczkowy przekrój czynny można wyrazić jako

$$\frac{d\sigma^{\text{CC}}}{d\Omega'} = \frac{G_{\text{F}}^2 \cos^2 \theta_{\text{C}}}{8\pi^2} \frac{|\vec{k}'|}{M_{\text{N}} E E_{p'}} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu}$$

z dodatkowym warunkiem $E' = M_{\text{N}} + E - E'$.

Znając jawną postać operatora Γ^μ można przeprowadzić rachunki, w wyniku których tensor $H^{\mu\nu}$ będzie zależał bezpośrednio od składowych czterowektorów p i q . Podobnie, można wyrazić tensor $L_{\mu\nu}$ przez czterowektory k i q . Oba tensory oraz ich zwężenie zostały obliczone w Dodatku B.2.

3.2.3 Związek między $W^{\mu\nu}$ a $H^{\mu\nu}$

Zastosujemy teraz ogólny formalizm przekroju inkluzywnego przedstawiony w podrozdziale 3.1 do rozpraszania na swobodnym nukleonie, czyli znajdziemy związek między tensorami $W^{\mu\nu}$ i $H^{\mu\nu}$.

W przypadku rozpraszania (kwazi)elastycznego stany $|p_i\rangle$ i $|p_f\rangle$ są stanami jednocząstkowymi. Nukleon, zarówno początkowy jak i końcowy, jest na powłoce masy. Jego czteropędy wynoszą $p_i = p = (E_p, \vec{p})$ i $p_f = p' = (E_{p'}, \vec{p}')$. Oznaczmy więc $|p_i\rangle = |p\rangle$, $|p_f\rangle = |p'\rangle$. Stopnie swobody końcowego stanu hadronowego to $d\beta_{\text{h}} = d^3 p'$.

Podstawiając to do definicji tensora $W^{\mu\nu}$ (3.4) otrzymamy

$$W^{\mu\nu} = (2\pi)^6 \int d^3 p' \sum_{\text{spiny}} \langle p' | J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle \langle p' | J_{\text{hadr}}^\nu | p \rangle^* \delta^4(k' + p' - k - p) E_p.$$

Jeżeli, podobnie jak w przypadku leptonów, odpowiednio unormujemy fale płaskie opisujące nukleony, to

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spiny}} \langle p' | J_{\text{hadr}}^\mu | p \rangle \langle p' | J_{\text{hadr}}^\nu | p \rangle^* &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{E_p E_{p'}} M M' \times \\ &\times \sum_{\text{spiny}} \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^* . \end{aligned}$$

Po wycałkowaniu po $d^3 p'$, tensor $W^{\mu\nu}$ przyjmie postać

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{E_{p'}} H^{\mu\nu} \delta(E' + E_{p'} - E - E_p), \quad (3.11)$$

gdzie $H^{\mu\nu} = M M' \sum_{\text{spiny}} (\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(p') \Gamma^\nu u(p))^*$ oraz $\vec{p}' = \vec{k} + \vec{p} - \vec{k}'$. Dystrybucja w równaniu (3.11) wyraża bilans energii w procesie. Wynik jest prawdziwy zarówno dla rozpraszania elektronu, jak i neutrina. Różnica między tymi procesami zawarta jest w operatorze Γ^μ . W przypadku $e^-N \rightarrow e^-N$ można też zastąpić M' przez M .

Do ogólnych wzorów na różniczkowe przekroje czynne (3.5) i (3.7) możemy wstawić tensor hadronowy odpowiadający pojedynczemu nukleonowi (3.11). Następnie, przez całkowanie po energii rozproszonego leptonu E' , można pozbyć się jednego z trzech stopni swobody. Otrzymamy

$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{d\Omega'} = (2\pi)^{-2} \frac{e^4}{q^4} \frac{E'}{EE_p E_{p'}} L_{\mu\nu}^{\text{el}} H_{\text{el}}^{\mu\nu}$$

dla elektronu oraz

$$\frac{d\sigma^{\text{CC}}}{d\Omega'} = \frac{G_{\text{F}}^2 \cos^2 \theta_{\text{C}}}{8\pi^2} \frac{|\vec{k}'|}{EE_p E_{p'}} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu}$$

dla neutrina. W obu przypadkach należy pamiętać o bilansie energii $E' + E_{p'} - E - E_p = 0$ jako o dodatkowym warunku. Odtworzyliśmy w ten sposób wzory dla rozpraszania elastycznego (kwazielastycznego) omówione w podrozdziałach 3.2.1 i 3.2.2.

3.3 Ogólna postać tensora hadronowego

Inkluzywny przekrój czynny procesów $eX \rightarrow e'X'$ i $\nu X \rightarrow \nu'X'$ wyraziliśmy m.in. przez tensor hadronowy $W^{\mu\nu}$ opisujący dowolną tarczę. Znajdźmy jego najogólniejszą postać.

Zacznijmy od oddziaływania typu CC. Można założyć, że tensor $W^{\mu\nu}$ jest skonstruowany z czteropędów charakteryzujących hadrony (dla procesu inkluzywnego niezależne są p^μ i q^μ). Można też użyć tensora metrycznego $\eta^{\mu\nu}$ i całkowicie antysymetrycznego tensora $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$. Tworzymy takie kombinacje, aby wszystkie wyrazy były liniowo niezależne. Stojące przy nich współczynniki będą skalarnymi funkcjami zależnymi od niezmienników lorentzowskich (p^2 , q^2 , pq). Nazywamy je *funkcjami struktury* i oznaczymy je przez W_i . Wtedy ogólna postać tensora dla CC będzie następująca:

$$\begin{aligned} W_{\text{CC}}^{\mu\nu} &= W_1^{\text{CC}} \eta^{\mu\nu} + \frac{W_2^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}^2} p^\mu p^\nu + i \frac{W_3^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta + \frac{W_4^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}^2} q^\mu q^\nu + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{W_5^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}^2} (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) + \frac{1}{2} i \frac{W_6^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}^2} (p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Występują w niej 4 wyrazy symetryczne i 2 antysymetryczne oraz 6 niezależnych funkcji struktury. M_{T} jest masą tarczy ($p^2 = M_{\text{T}}^2$). Z definicji tensora $W^{\mu\nu}$ wynika, że $(W^{\mu\nu})^* = W^{\nu\mu}$, w tym sensie jest on więc „hermitowski”. Stąd dla wyrazów symetrycznych zachodzi $(W_{\text{sym}}^{\mu\nu})^* = W_{\text{sym}}^{\mu\nu}$, a dla antysymetrycznych $(W_{\text{anty}}^{\mu\nu})^* = -W_{\text{anty}}^{\mu\nu}$. Wyrazy symetryczne są więc rzeczywiste, a antysymetryczne – czysto urojone. Chcemy jednak, żeby wszystkie funkcje W_i były zdefiniowane jako rzeczywiste, dlatego napisaliśmy jednostkę urojoną przy wyrazach antysymetrycznych.

Rozważmy teraz oddziaływanie elektromagnetyczne. Na początek założymy taki sam rozkład tensora jak w równaniu (3.12). Ze względu na istnienie pewnych własności prądu elektromagnetycznego, będziemy mogli powiedzieć więcej o tensorze $W^{\mu\nu}$ w tym przypadku i będzie on mniej skomplikowany niż w przypadku neutrina. Po pierwsze,

parzystość jest teraz zachowana. Z tego powodu wkład W_3 nie będzie występował w tensorze. Po drugie, możemy wykorzystać zasadę zachowania prądu: wiemy, że zwiężenia tensora hadronowego z q_μ oraz q_ν muszą zniknąć. Mamy więc związki:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} q_\mu &= W_1 q^\nu + \frac{W_2}{M_T^2} (pq) p^\nu + \frac{W_4}{M_T^2} q^2 q^\nu + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{W_5}{M_T^2} ((pq) q^\nu + p^\nu q^2) + \frac{1}{2} i \frac{W_6}{M_T^2} ((pq) q^\nu - p^\nu q^2) = 0, \\ W^{\mu\nu} q_\nu &= W_1 q^\mu + \frac{W_2}{M_T^2} p^\mu (pq) + \frac{W_4}{M_T^2} q^\mu q^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{W_5}{M_T^2} (p^\mu q^2 + (pq) q^\mu) + \frac{1}{2} i \frac{W_6}{M_T^2} (p^\mu q^2 - (pq) q^\mu) = 0. \end{aligned}$$

Skoro wektory p^μ i q^μ są zmiennymi niezależnymi, to współczynniki przy tych wektorach muszą być równe zeru (niezależnie przy p^ν , p^μ , q^ν , q^μ). Dostajemy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{W_2}{M_T^2} pq + \frac{1}{2} \frac{W_5}{M_T^2} q^2 - \frac{1}{2} i \frac{W_6}{M_T^2} q^2 &= 0, \\ \frac{W_2}{M_T^2} pq + \frac{1}{2} \frac{W_5}{M_T^2} q^2 + \frac{1}{2} i \frac{W_6}{M_T^2} q^2 &= 0, \\ W_1 + \frac{W_4}{M_T^2} q^2 + \frac{1}{2} \frac{W_5}{M_T^2} pq + \frac{1}{2} i \frac{W_6}{M_T^2} pq &= 0, \\ W_1 + \frac{W_4}{M_T^2} q^2 + \frac{1}{2} \frac{W_5}{M_T^2} pq - \frac{1}{2} i \frac{W_6}{M_T^2} pq &= 0, \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned} W_6 &= 0, \\ W_5 &= -2W_2 \frac{pq}{q^2}, \\ W_4 &= W_2 \frac{(pq)^2}{q^4} - W_1 \frac{M_T^2}{q^2}. \end{aligned}$$

Zatem, dzięki własności zachowania prądu, funkcje W_4 i W_5 wyrażają się przez W_1 i W_2 . Ostatecznie, elektromagnetyczny tensor hadronowy zapiszemy jako

$$W_{\text{el}}^{\mu\nu} = W_1^{\text{el}} \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) + \frac{W_2^{\text{el}}}{M_T^2} \left(p^\mu + \frac{pq}{Q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{pq}{Q^2} q^\nu \right), \quad (3.13)$$

gdzie $Q^2 = -q^2$ oraz $W_{1,2} = W_{1,2}(q^2, pq)$. W tym przypadku mamy więc tylko część symetryczną i 2 niezależne funkcje struktury. Wynik jest zgodny z postacią otrzymaną w pracy [12].

3.4 Inkluzywny przekrój czynny – najogólniejsza postać

3.4.1 Rozpraszanie elektronu na dowolnej tarczy

Wyrazimy laboratoryjny przekrój na rozpraszanie elektronu na dowolnej tarczy przez funkcje struktury. Ogólny wzór na przekrój czynny (3.5) wycałkujemy po kącie φ' , żeby przekrój przyjął formę „podwójnego różniczkowego”:

$$\frac{d^2\sigma^{\text{el}}}{dE'd\cos\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^4}{q^4} \frac{E'}{EE_p} L_{\mu\nu}^{\text{el}} W_{\text{el}}^{\mu\nu}.$$

W Dodatku B.1.1 pokazaliśmy, że dla niespolaryzowanych elektronów

$$L_{\mu\nu}^{\text{el}} = \frac{1}{2}(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu} k k').$$

Za $W_{\text{el}}^{\mu\nu}$ weźmiemy najogólniejszą postać (3.13). Wiemy też, że $L_{\mu\nu}^{\text{el}} q^\mu = L_{\mu\nu}^{\text{el}} q^\nu = 0$, więc $L_{\mu\nu}^{\text{el}} W_{\text{el}}^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{el}} W_{\text{eff}}^{\mu\nu}$, gdzie

$$W_{\text{eff}}^{\mu\nu} = W_1^{\text{el}} \eta^{\mu\nu} + \frac{W_2^{\text{el}}}{M_{\text{T}}^2} p^\mu p^\nu.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\text{el}} W_{\text{el}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu} k k') \left(W_1^{\text{el}} \eta^{\mu\nu} + \frac{W_2^{\text{el}}}{M_{\text{T}}^2} p^\mu p^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} W_1^{\text{el}} (k k' + k k' - 4k k') + \frac{1}{2} \frac{W_2^{\text{el}}}{M_{\text{T}}^2} ((k p)(k' p) + (k p)(k' p) - p^2 k k') \\ &= -W_1^{\text{el}} k k' + \frac{W_2^{\text{el}}}{M_{\text{T}}^2} \left(E E' M_{\text{T}}^2 - \frac{1}{2} M_{\text{T}}^2 k k' \right). \end{aligned}$$

W następnych krokach będziemy dokonywać zamiany zmiennych korzystając z

$$q^2 \approx -2k k' \approx -4E E' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

co jest prawdziwe zarówno dla elastycznych, jak i nieelastycznych procesów. Otrzymamy

$$L_{\mu\nu}^{\text{el}} W_{\text{el}}^{\mu\nu} = -2W_1^{\text{el}} E E' \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2^{\text{el}} E E' \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

a po wstawieniu do przekroju czynnego

$$\frac{d^2\sigma^{\text{el}}}{dE'd\cos\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^4}{16E^2 E'^2 E_p \sin^4 \frac{\theta}{2}} E'^2 \left[W_2^{\text{el}} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2W_1^{\text{el}} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

Jeśli wprowadzimy standardowe oznaczenia $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ i $\sigma_{\text{M}} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$, to ogólny różniczkowy przekrój czynny będziemy mogli zapisać w zwartej formie:

$$\frac{d^2\sigma^{\text{el}}}{dE'd\cos\theta} = 2\pi\frac{\sigma_M}{E_p} \left[W_2^{\text{el}}(q^2, pq) - 2W_1^{\text{el}}(q^2, pq)\text{tg}^2\frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.14)$$

Wyrażenie to jest prawdziwe dla wszystkich procesów, w których obserwuje się jedynie końcowy pęd elektronów. Można je stosować do rozpraszania elastycznego i nieelastycznego.

3.4.2 Rozpraszanie neutrina na dowolnej tarczy

Obliczmy teraz ogólną postać inkluzywnego przekroju czynnego typu CC, dla dowolnej tarczy hadronowej. Zapiszemy wzór (3.7) jako:

$$\frac{d^2\sigma^{\text{CC}}}{dE'd\cos\theta} = \frac{G_F^2 \cos^2\theta_C}{4\pi} \frac{|\vec{k}'|}{EE_p} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} W_{\text{CC}}^{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

Wiemy, że

$$L_{\mu\nu}^{\text{CC}} = 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu} k k') + \chi i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma,$$

gdzie $\chi = -1$ dla procesu $\nu n \rightarrow l^- p$ i $\chi = +1$ dla $\bar{\nu} p \rightarrow l^+ n$. Za $W_{\text{CC}}^{\mu\nu}$ weźmiemy najogólniejszą postać daną równaniem (3.12). Skorzystamy z własności, że zwięźenie tensora antysymetrycznego z symetrycznym jest równe zeru. Jeśli wyodrębnimy w obu tensorach część symetryczną i antysymetryczną

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= L_{\text{sym}}^{\mu\nu} + L_{\text{anty}}^{\mu\nu}, \\ W^{\mu\nu} &= W_{\text{sym}}^{\mu\nu} + W_{\text{anty}}^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

to

$$L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{sym}} W_{\text{sym}}^{\mu\nu} + L_{\mu\nu}^{\text{anty}} W_{\text{anty}}^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Zajmijmy się najpierw zwięzieniem części symetrycznych:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\text{sym}} W_{\text{sym}}^{\mu\nu} &= 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu} k k') \times \\ &\times \left(W_1 \eta^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M_T^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M_T^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{2M_T^2} (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \right) \\ &= 2 \left[W_1 (k k' + k k' - 4k k') + \frac{W_2}{M_T^2} ((kp)(k'p) + (kp)(k'p) - p^2(kk')) + \right. \\ &+ \frac{W_4}{M_T^2} ((qk)(qk') + (qk)(qk') - q^2(kk')) + \\ &+ \frac{W_5}{2M_T^2} ((pk)(qk') + (qk)(pk') - (pq)(kk') + \\ &+ (qk)(pk') + (pk)(qk') - (pq)(kk')) \left. \right]. \end{aligned}$$

Przyjmując teraz, że $p = (M_T, \vec{0})$, dostaniemy

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\text{sym}} W_{\text{sym}}^{\mu\nu} &= 2 \left[-2W_1(kk') + \frac{W_2}{M_T^2} (2EE'M_T^2 - M_T^2(kk')) + \right. \\ &+ \frac{W_4}{M_T^2} (2(qk)(qk') + Q^2(kk')) + \\ &\left. + \frac{W_5}{M_T^2} (EM_T(qk') + E'M_T(qk) - \omega M_T(kk')) \right]. \end{aligned}$$

Zwężenie części antysymetrycznych:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\text{anty}} W_{\text{anty}}^{\mu\nu} &= 2\chi i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma \left(i \frac{W_3}{M_T^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta + i \frac{W_6}{2M_T^2} (p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu) \right) \\ &= -4\chi \frac{W_3}{M_T^2} (\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta) k^\rho k'^\sigma p_\alpha q_\beta - \\ &- \chi \frac{W_6}{M_T^2} (\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma p^\mu q^\nu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma p^\nu q^\mu) \\ &= 4\chi \frac{W_3}{M_T^2} (k^\alpha k'^\beta p_\alpha q_\beta - k^\beta k'^\alpha p_\alpha q_\beta) - 2\chi \frac{W_6}{M_T^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma p^\mu q^\nu \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy między innymi z tożsamości $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 2(\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta)$ oraz $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu q^\mu = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\mu q^\nu$. Następnie, zastępując k przez $q + k'$ możemy napisać

$$\begin{aligned} k^\alpha k'^\beta p_\alpha q_\beta &= (pk)(qk') = (pq + pk')(qk'), \\ k^\beta k'^\alpha p_\alpha q_\beta &= (pk')(qk) = (pk')(q^2 + qk'), \end{aligned}$$

czyli

$$k^\alpha k'^\beta p_\alpha q_\beta - k^\beta k'^\alpha p_\alpha q_\beta = (pq)(qk') + Q^2(pk').$$

Zauważmy ponadto, że

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma p^\mu q^\nu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho k'^\sigma p^\mu q^\nu + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k'^\rho k'^\sigma p^\mu q^\nu = 0,$$

bo oba wyrazy są jednocześnie symetryczne i antysymetryczne względem zamiany pewnej pary indeksów. Same algebraiczne własności powodują zatem, że W_6 nie pojawia się w zwężeniu. Uwzględniając powyższe, mamy

$$L_{\mu\nu}^{\text{anty}} W_{\text{anty}}^{\mu\nu} = 4\chi \frac{W_3}{M_T^2} ((pq)(qk') + Q^2(pk')).$$

Jeśli założymy, że tarcza spoczywa, to

$$L_{\mu\nu}^{\text{anty}} W_{\text{anty}}^{\mu\nu} = 4\chi \frac{W_3}{M_T^2} (M_T \omega(qk') + Q^2 M_T E').$$

Możemy teraz wstawić wyliczone elementy do różniczkowego przekroju czynnego (3.15) otrzymując

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\text{CC}}}{dE'd\cos\theta} &= \frac{G_{\text{F}}^2 \cos^2\theta_{\text{C}}}{2\pi} \frac{|\vec{k}'|}{EM_{\text{T}}} \left[-2W_1^{\text{CC}}(kk') + W_2^{\text{CC}}(2EE' - kk') + \right. \\ &+ \left. \frac{W_4^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}^2} m_l^2(kk') - \frac{W_5^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}} m_l^2 E + 2\chi \frac{W_3^{\text{CC}}}{M_{\text{T}}} ((E + E')(kk') - m_l^2 E) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wprowadźmy oznaczenie „elementarnego” przekroju czynnego,

$$\sigma_0 \equiv \frac{G_{\text{F}}^2 \cos^2\theta_{\text{C}}}{(2\pi)^2} E' |\vec{k}'|,$$

które będziemy używać w dalszej części pracy.

Rozdział 4

Funkcje odpowiedzi

W tym rozdziale dokonamy rozkładu zwiężenia i przekroju czynnego na tzw. funkcje odpowiedzi (*response functions*). Jest to istotne dlatego, że w przeciwieństwie do funkcji struktury funkcje odpowiedzi mają interpretację fizyczną. Są niezależnymi obserwabami – można w jednym doświadczeniu zmierzyć każdą funkcję z osobna.

4.1 Rozkład tensora leptonowego

W rozpraszaniu leptonów na jądrze wyróżnionym kierunkiem jest przekaz czteropędu $q^\mu = k^\mu - k'^\mu = (\omega, \vec{q})$. Wybierzmy układ współrzędnych przestrzennych, w którym $\vec{q} \parallel \hat{z}$ oraz $(\vec{k} \times \vec{k}') \parallel \hat{y}$ (Rysunek 4.1). Składowe czterowektorów w tym układzie są następujące:

$$k = \left(E, \frac{|\vec{k}||\vec{k}'|}{|\vec{q}|} \sin \theta, 0, \frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{q}|} - \frac{|\vec{k}||\vec{k}'|}{|\vec{q}|} \cos \theta \right), \quad (4.1)$$

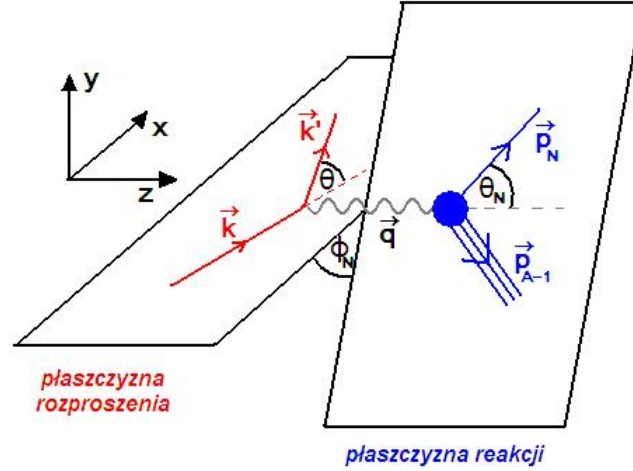
$$k' = \left(E', \frac{|\vec{k}||\vec{k}'|}{|\vec{q}|} \sin \theta, 0, \frac{|\vec{k}||\vec{k}'|}{|\vec{q}|} \cos \theta - \frac{|\vec{k}'|^2}{|\vec{q}|} \right), \quad (4.2)$$

$$q = (\omega, 0, 0, |\vec{q}|), \quad p_A = (M_A, 0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} p_N &= (E_N, |\vec{p}_N| \sin \theta_N \cos \phi_N, |\vec{p}_N| \sin \theta_N \sin \phi_N, |\vec{p}_N| \cos \theta_N), \\ p_{A-1} &= (M_A + \omega - E_N, -|\vec{p}_N| \sin \theta_N \cos \phi_N, -|\vec{p}_N| \sin \theta_N \sin \phi_N, |\vec{q}| - |\vec{p}_N| \cos \theta_N). \end{aligned}$$

Wprowadźmy bazę czterowektorów $\{b_\kappa^\mu\}_{\kappa=0,1,2,3}$ taką, żeby wszystkie czterowektory były parami ortogonalne: $b_{\kappa\mu} b_\lambda^\mu = 0$ dla $\kappa \neq \lambda$. Jako układ spełniający ten warunek weźmiemy

$$\begin{cases} b_0^\mu &\equiv l^\mu \equiv (|\vec{q}|, 0, 0, \omega), \\ b_1^\mu &\equiv t_x^\mu \equiv (0, 1, 0, 0), \\ b_2^\mu &\equiv t_y^\mu \equiv (0, 0, 1, 0), \\ b_3^\mu &\equiv q^\mu = (\omega, 0, 0, |\vec{q}|). \end{cases}$$



Rysunek 4.1: Orientacja układu hadronowego względem układu leptonowego dla procesu ekskluzywnego.

Ze względu na sygnaturę $(+, -, -, -)$, wśród powyższych czterowektorów jeden jest czasopodobny ($l_\mu l^\mu > 0$), a trzy pozostałe przestrzennopodobne.

Każdy tensor, w szczególności leptonowy, można zapisać jako

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda} B_{\kappa\lambda}^{\text{lept}} b_\kappa^\mu b_\lambda^\nu, \quad (4.3)$$

gdzie B^{lept} jest macierzą 4×4 rozkładu tensora leptonowego w wybranej bazie. Elementy macierzy B^{lept} można znaleźć zwiężając tensor z odpowiednimi czterowektorami bazowymi i korzystając przy tym z ich ortogonalności, np.

$$\begin{aligned} q_\mu q_\nu L^{\mu\nu} &= \sum_{\kappa, \lambda} B_{\kappa\lambda}^{\text{lept}} q_\mu q_\nu b_\kappa^\mu b_\lambda^\nu = B_{qq}^{\text{lept}} q_\mu q_\nu q^\mu q^\nu = B_{qq}^{\text{lept}} Q^4 \\ \Rightarrow B_{qq}^{\text{lept}} &= \frac{1}{Q^4} q_\mu q_\nu L^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Wiemy, że $q_\nu L^{\mu\nu} = 0$ i $Q^4 > 0$, więc w tym przypadku dostaniemy $B_{qq}^{\text{lept}} = 0$.

W przypadku rozpraszania elektronu \vec{q} jest kierunkiem propagacji fotonu wirtualnego. Tensor dla elektronu $L_{\text{el}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - \eta^{\mu\nu} k k')$ jest symetryczny. Wynika stąd, że odpowiadająca mu macierz B^{lept} w rozkładzie (4.3) będzie symetryczna. Ma ona więc 10 niezależnych elementów. Można je obliczyć sposobem opisanym powyżej. W przybliżeniu wysokoenergetycznym wyniosą one

$$\begin{aligned} B_{qq}^{\text{lept}} Q^4 &= 0 \\ B_{ll}^{\text{lept}} Q^4 &= 2 \frac{E^3 E'^3}{|\vec{q}|^2} \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$B_{xx}^{\text{lept}} = \frac{1}{2} \frac{EE'}{|\vec{q}|^2} (E + E')^2 (1 - \cos \theta)$$

$$B_{yy}^{\text{lept}} = \frac{1}{2} EE' (1 - \cos \theta)$$

$$B_{qx}^{\text{lept}} Q^2 = B_{qy}^{\text{lept}} Q^2 = 0$$

$$-B_{ql}^{\text{lept}} Q^4 = 0$$

$$B_{xy}^{\text{lept}} = 0$$

$$-B_{xl}^{\text{lept}} Q^2 = \frac{E^2 E'^2}{|\vec{q}|^2} (E + E') \sin \theta (\cos \theta - 1)$$

$$-B_{yl}^{\text{lept}} Q^2 = 0$$

przy czym posłużono się takimi składowymi czterowektorów, jak we wzorach (4.1) i (4.2). Zapiszmy wszystkie elementy razem jako

$$B^{\text{lept}} = \begin{pmatrix} B_{ll} & B_{lx} & B_{ly} & B_{lq} \\ B_{xl} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xq} \\ B_{yl} & B_{yx} & B_{yy} & B_{yq} \\ B_{ql} & B_{qx} & B_{qy} & B_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \# & \# & 0 & 0 \\ \# & \# & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie przez # oznaczono wyrażenia na ogół różne od zera. Jeśli w analogiczny sposób rozłożymy tensor hadronowy,

$$W^{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma} B_{\rho\sigma}^{\text{hadr}} b_{\rho}^{\mu} b_{\sigma}^{\nu},$$

to zwężenie będzie równe

$$W_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = \sum_{\kappa,\lambda,\rho,\sigma} B_{\kappa\lambda}^{\text{lept}} B_{\rho\sigma}^{\text{hadr}} b_{\kappa}^{\mu} b_{\rho\mu} b_{\lambda}^{\nu} b_{\sigma\nu} = \sum_{\kappa,\lambda} B_{\kappa\lambda}^{\text{lept}} B_{\kappa\lambda}^{\text{hadr}} (b_{\kappa})^2 (b_{\lambda})^2.$$

Zostawiając tylko niezerowe elementy macierzy B^{lept} możemy zapisać powyższą sumę jako¹

$$W_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = B_{ll}^{\text{lept}} B_{ll}^{\text{hadr}} (l^2)^2 + B_{xx}^{\text{lept}} B_{xx}^{\text{hadr}} (t_x^2)^2 +$$

$$+ B_{yy}^{\text{lept}} B_{yy}^{\text{hadr}} (t_y^2)^2 + 2B_{xl}^{\text{lept}} B_{xl}^{\text{hadr}} (l^2)(t_x^2). \quad (4.4)$$

¹W przypadku elektronu powinno być oczywiste, że również macierz hadronowa B^{hadr} jest symetryczna.

W wybranym przez nas układzie odniesienia dostaliśmy $B_{xl}^{\text{lept}} \neq 0$. Sprawdźmy, ile wynosi (w tym samym układzie) odpowiedni element dla tensora hadronowego.

$$\begin{aligned} t_{x\mu}l_\nu W^{\mu\nu} &= B_{xl}^{\text{hadr}}t_x^2l^2 = B_{xl}^{\text{hadr}}(-1)(-q^2) = -B_{xl}^{\text{hadr}}Q^2, \\ t_{x\mu}l_\nu W^{\mu\nu} &= (-1)l_\nu W^{x\nu} = (-1)|\vec{q}|W^{x0} + (-1)(-\omega)W^{x3}, \end{aligned}$$

stąd

$$B_{xl}^{\text{hadr}} = \frac{1}{Q^2} (|\vec{q}|W^{x0} - \omega W^{x3}).$$

Biorąc pod uwagę postać (3.13) widzimy, że składowe W^{x0} i W^{x3} są równe zero, bo $\eta^{x0} = \eta^{x3} = 0$, $q^x = 0$ (przekaz pędu wzdłuż osi z), $p^x = 0$ (tarcza spoczywa). Zatem $B_{xl}^{\text{hadr}} = 0$ i równanie (4.4) możemy zapisać jako

$$W_{\mu\nu}L^{\mu\nu} = Q^4 B_{ll}^{\text{lept}} B_{ll}^{\text{hadr}} + B_{xx}^{\text{lept}} B_{xx}^{\text{hadr}} + B_{yy}^{\text{lept}} B_{yy}^{\text{hadr}}. \quad (4.5)$$

Okazuje się więc, że w zwięźeniu pozostają tylko diagonalne elementy. Wyrażmy tę własność jako $W_{\mu\nu}L^{\mu\nu} = W_{\mu\nu}\tilde{L}^{\mu\nu}$, gdzie $\tilde{L}^{\mu\nu}$ jest częścią diagonalną rozkładu tensora w bazie $\{b_\kappa^\mu\}$:

$$\tilde{L}^{\mu\nu} = B_{ll}^{\text{lept}}l^\mu l^\nu + B_{xx}^{\text{lept}}t_x^\mu t_x^\nu + B_{yy}^{\text{lept}}t_y^\mu t_y^\nu \quad (4.6)$$

(po uwzględnieniu $B_{qq}^{\text{lept}} = 0$). Fakt ten nie zależy od układu współrzędnych, w którym pracujemy. Pierwszy wyraz w rozkładzie (4.6) interpretowany jest jako polaryzacja podłużna (*longitudinal*) pośredniczącego fotonu i utożsamiany z funkcją odpowiedzi R_L , natomiast wyrazy drugi i trzeci – jako polaryzacja poprzeczna (*transverse*) i funkcja odpowiedzi R_T . Jak wiemy, polaryzację poprzeczną mają fotony fizyczne. Wkład od fotonów spolaryzowanych wzdłuż kierunku propagacji jest więc miarą „wirtualności” fotonów.

Ponieważ zwięźenie $W_{\mu\nu}^{\text{el}}L^{\mu\nu}$ rozkłada się na dwa różne² składniki, przekrój czynny dla elektronów będzie można wyrazić przez dwie funkcje odpowiedzi: R_L i R_T . W rozpraszaniu neutrin liczba funkcji odpowiedzi wynosi pięć.

4.2 Funkcje odpowiedzi

4.2.1 Elektron

Obliczmy elementy macierzy hadronowej występujące we wzorze (4.5), żeby przekonać się, że są one różne od zera.

$$\begin{aligned} l_\mu l_\nu W^{\mu\nu} &= B_{ll}^{\text{hadr}}(l^2)^2 = B_{ll}^{\text{hadr}}Q^4, \\ l_\mu l_\nu W^{\mu\nu} &= l_0 l_0 W^{00} + 2l_0 l_3 W^{03} + l_3 l_3 W^{33} = \\ &= |\vec{q}|^2 W^{00} - 2|\vec{q}|\omega W^{03} + \omega^2 W^{33}. \end{aligned}$$

²Ze względu na symetrię wokół wektora \vec{q} , składowe xx i yy traktuje się jako równoważne.

Pomocny teraz będzie warunek $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$, z którego wynika, że składowe tensora 03, 30 i 33 są proporcjonalne do składowej 00:

$$W^{03} = W^{30} = \frac{\omega}{|\vec{q}|} W^{00}, \quad W^{33} = \left(\frac{\omega}{|\vec{q}|}\right)^2 W^{00}.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} l_\mu l_\nu W^{\mu\nu} &= |\vec{q}|^2 W^{00} - 2\omega^2 W^{00} + \frac{\omega^4}{|\vec{q}|^2} W^{00} = \frac{1}{|\vec{q}|^2} (|\vec{q}|^2 - \omega^2)^2 W^{00} \\ &= \frac{Q^4}{|\vec{q}|^2} W^{00} = \frac{Q^4}{|\vec{q}|^2} \left[W_1 \left(1 + \frac{\omega^2}{Q^2}\right) + W_2 \frac{1}{M_T^2} \left(M_T + \frac{M_T \omega}{Q^2} \omega\right)^2 \right] \\ &= \frac{Q^4}{|\vec{q}|^2} \left[W_1 \frac{|\vec{q}|^2}{Q^2} + W_2 \left(1 + \frac{\omega^2}{Q^2}\right)^2 \right] = W_1 Q^2 + W_2 |\vec{q}|^2 \end{aligned}$$

oraz

$$B_{ll}^{\text{hadr}} = \frac{W_1}{Q^2} + W_2 \frac{|\vec{q}|^2}{Q^4} \neq 0.$$

Łatwo też pokazać, że

$$B_{xx}^{\text{hadr}} = W^{xx} = -W_1 \neq 0, \quad B_{yy}^{\text{hadr}} = W^{yy} = -W_1 \neq 0.$$

Funkcje odpowiedzi będziemy definiować przez składowe tensora hadronowego jak w pracach Butkevicha, np. [8]. Oznaczmy

$$\begin{cases} R_L^{\text{el}} &\equiv W_{\text{el}}^{00} = W_1^{\text{el}} \frac{|\vec{q}|^2}{Q^2} + W_2^{\text{el}} \frac{|\vec{q}|^4}{Q^4}, \\ R_T^{\text{el}} &\equiv W_{\text{el}}^{xx} + W_{\text{el}}^{yy} = -2W_1^{\text{el}}. \end{cases}$$

Potraktujmy to jako układ równań i rozwiążmy względem funkcji struktury:

$$\begin{cases} W_1^{\text{el}} &= -\frac{1}{2} R_T^{\text{el}}, \\ W_2^{\text{el}} &= \frac{Q^4}{|\vec{q}|^4} R_L^{\text{el}} + \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} R_T^{\text{el}}. \end{cases}$$

Możemy teraz wstawić funkcje struktury do równania (3.14) wyrażając przekrój czynny przez funkcje odpowiedzi:

$$\frac{d^2\sigma^{\text{el}}}{dE'd\cos\theta} = 2\pi \frac{\sigma_M}{M_T} \left[\frac{Q^4}{|\vec{q}|^4} R_L^{\text{el}} + \left(\frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} + \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) R_T^{\text{el}} \right].$$

Współczynniki stojące przy funkcjach odpowiedzi zależą tylko od kinematyki leptonów. Oznaczmy je przez $v_L \equiv \frac{Q^4}{|\vec{q}|^4}$ i $v_T \equiv \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} + \text{tg}^2 \frac{\theta}{2}$. Wtedy podwójny różniczkowy przekrój czynny przyjmie postać

$$\frac{d^2\sigma^{\text{el}}}{dE'd\cos\theta} = 2\pi \frac{\sigma_M}{M_T} [v_L R_L^{\text{el}} + v_T R_T^{\text{el}}]. \quad (4.7)$$

Wynik zgadza się z przekrojem inkluzywnym podanym w pracach [8] i [10]. R_T i R_L są funkcjami $|\vec{q}|$ i ω . Wyrażają się przez funkcje struktury, które z kolei można wyrazić przez czynniki postaci. Procedura wydzielenia poszczególnych funkcji znana jest jako „separacja Rosenblutha”. Polaryzacja poprzeczna fotonu dominuje dla rozproszeń wstecznych ($\theta \sim 180^\circ$) i odpowiada sytuacji, gdy spin elektronu w reakcji zostanie odwrócony.

4.2.2 Neutrino

O różnych stanach polaryzacji wirtualnego bozonu możemy także mówić w przypadku oddziaływania słabego, bowiem bozony W^\pm i Z^0 mają spin równy 1. Funkcje odpowiedzi dla oddziaływania typu CC zdefiniujemy przez składowe ogólnej postaci tensora $W_{CC}^{\mu\nu}$, analogicznie jak to robiliśmy w przypadku elektromagnetycznym. Wciąż pracujemy w układzie odniesienia opisanym w podrozdziale 4.1.

$$\begin{aligned}
R_{CC} &\equiv W^{00} = W_{\text{sym}}^{00} = W_1 + W_2 + W_4 \frac{\omega^2}{M_T^2} + W_5 \frac{\omega}{M_T} \\
R_{CL} &\equiv W^{03} + W^{30} = W_{\text{sym}}^{03} + W_{\text{sym}}^{30} = 2W_{\text{sym}}^{03} = \\
&= 2W_4 \frac{\omega|\vec{q}|}{M_T^2} + W_5 \frac{|\vec{q}|}{M_T} \\
R_{LL} &\equiv W^{33} = W_{\text{sym}}^{33} = -W_1 + W_4 \frac{|\vec{q}|^2}{M_T^2} \\
R_T &\equiv W^{xx} + W^{yy} = W_{\text{sym}}^{xx} + W_{\text{sym}}^{yy} = -2W_1 \\
R_{T'} &\equiv i(W^{xy} - W^{yx}) = i(W_{\text{anty}}^{xy} - W_{\text{anty}}^{yx}) = 2iW_{\text{anty}}^{xy} = \\
&= -2 \frac{W_3}{M_T^2} \varepsilon^{12\alpha\beta} p_\alpha q_\beta = -2 \frac{W_3}{M_T^2} \varepsilon^{1203} p_0 q_z = -2W_3 \frac{|\vec{q}|}{M_T}
\end{aligned}$$

Tym razem składowe 00, 03=30, 33 (CC, CL, LL) stanowią odrębne funkcje, bo prąd aksjalny nie jest zachowany.³ W definicji ostatniej funkcji odpowiedzi jednostka urojona pojawia się po to, żeby funkcja była rzeczywista (wyraża się ona przez antysymetryczne wyrazy tensora, które są urojone). Pozostałe funkcje wyrażają się przez samą część symetryczną i dlatego są rzeczywiste.

Należy jeszcze uzasadnić, że w zwężeniu nie ma wkładów od innych składowych niż te, które zostały oznaczone jako funkcje odpowiedzi. Wiemy, że zwężenie dzieli się na dwie części według (3.16). W wybranym układzie współrzędnych wektory \vec{k} i \vec{k}' leżą w płaszczyźnie (x, z) . Ich y -owe składowe wynoszą więc zero i dlatego

$$\begin{aligned}
L_{0y}^{\text{sym}} = L_{y0}^{\text{sym}} = L_{xy}^{\text{sym}} = L_{yx}^{\text{sym}} = L_{3y}^{\text{sym}} = L_{y3}^{\text{sym}} &= 0, \\
L_{0x}^{\text{anty}} = L_{x0}^{\text{anty}} = L_{x3}^{\text{anty}} = L_{3x}^{\text{anty}} = L_{03}^{\text{anty}} = L_{30}^{\text{anty}} &= 0.
\end{aligned}$$

³Nowe oznaczenie – litera „C” – pochodzi od słowa *charge* [17]. Pierwsze cztery funkcje są sumą wyrazów wektor-wektor i pseudowektor-pseudowektor, podczas gdy ostatnia stanowi wyraz „interferencyjny” wektor-pseudowektor [10, 17].

Oczywiście oprócz tego mamy $L_{00}^{\text{anty}} = L_{xx}^{\text{anty}} = L_{yy}^{\text{anty}} = L_{33}^{\text{anty}} \equiv 0$. Można też pokazać, że

$$\begin{aligned} W_{\text{sym}}^{\mu\nu} &\neq 0 && \text{tylko dla składowych } 00, xx, yy, 33, 03 = 30, \\ W_{\text{anty}}^{\mu\nu} &\neq 0 && \text{tylko dla składowych } 03 = -30, xy = -yx. \end{aligned}$$

Z powyższych warunków można łatwo wywnioskować, które wyrazy będą niezerowe w zwięźeniu tensorów. W części symetrycznej zwiężenia „przeżyją” tylko W_{sym}^{00} , W_{sym}^{xx} , W_{sym}^{yy} , W_{sym}^{33} oraz $W_{\text{sym}}^{03} = W_{\text{sym}}^{30}$, a w części antysymetrycznej – tylko $W_{\text{anty}}^{xy} = -W_{\text{anty}}^{yx}$. Jedynym wyróżnionym kierunkiem dla jądra niespolaryzowanego może być przekaz pędu. Mamy więc do czynienia z symetrią obrotową tensora $W^{\mu\nu}$ względem trzeciej osi i dlatego jego poprzeczne składowe xx i yy muszą być sobie równe. W efekcie daje to 5 niezależnych funkcji odpowiedzi.

Chcemy wyrazić przekrój czynny przez funkcje odpowiedzi. Musimy w tym celu znaleźć współczynniki kinematyczne stojące przy poszczególnych funkcjach. Wyraziliśmy już funkcje odpowiedzi przez funkcje struktury. „Odwróćmy” teraz tę zależność:

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{1}{2}R_T \\ W_3 &= -\frac{M_T}{2|\vec{q}|}R_{T'} \\ W_4 &= \frac{M_T^2}{|\vec{q}|^2}(R_{LL} + W_1) = \frac{M_T^2}{|\vec{q}|^2}\left(R_{LL} - \frac{1}{2}R_T\right) \\ W_5 &= \frac{M_T}{|\vec{q}|}R_{CL} - 2\frac{\omega}{M_T}W_4 = \frac{M_T}{|\vec{q}|}R_{CL} + \frac{M_T\omega}{|\vec{q}|^2}(R_T - 2R_{LL}) \\ W_2 &= R_{CC} - W_1 - \frac{\omega^2}{M_T^2}W_4 - \frac{\omega}{M_T}W_5 \\ &= R_{CC} - \frac{\omega}{|\vec{q}|}R_{CL} + \frac{\omega^2}{|\vec{q}|^2}R_{LL} + \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2}R_T \end{aligned}$$

Tak wyliczone funkcje struktury wstawiamy do wyrażenia na przekrój czynny (3.17). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\text{CC}}}{dE'd\cos\theta} &= 2\pi\frac{\sigma_0}{EE'E_p}\left[kk'R_T - \chi\frac{1}{|\vec{q}|}(\omega qk' + Q^2E')R_{T'}\right. \\ &+ (2EE' - kk')\left(R_{CC} - \frac{\omega}{|\vec{q}|}R_{CL} + \frac{\omega^2}{|\vec{q}|^2}R_{LL} + \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2}R_T\right) \\ &+ \left(2\frac{(qk)(qk')}{|\vec{q}|^2} + \frac{Q^2}{|\vec{q}|^2}kk'\right)\left(R_{LL} - \frac{1}{2}R_T\right) \\ &\left. + (Eqk' + E'qk - \omega kk')\left(\frac{1}{|\vec{q}|}R_{CL} + \frac{\omega}{|\vec{q}|^2}R_T - 2\frac{\omega}{|\vec{q}|^2}R_{LL}\right)\right]. \end{aligned}$$

Pozostaje nam wyznaczyć z powyższego wzoru współczynniki przy każdej z funkcji odpowiedzi. Będziemy korzystać z $|\vec{k}| \approx E$, a prędkość leptonu naładowanego oznaczymy przez $\beta \equiv \frac{|\vec{k}'|}{E'}$. Można też pokazać, że $Eqk' + E'qk - \omega kk' \approx -Em_l^2$.

współczynnik przy R_{CC} :

$$v_{CC} = \frac{2EE' - kk'}{EE'} = \frac{EE' + |\vec{k}||\vec{k}'| \cos \theta}{EE'} = 1 + \beta \cos \theta$$

przy R_{CL} :

$$\begin{aligned} v_{CL} &= \frac{-\omega(2EE' - kk') + Eqk' + E'qk - \omega kk'}{EE'|\vec{q}|} = \\ &= \frac{-\omega(EE' + |\vec{k}||\vec{k}'| \cos \theta) - Em_l^2}{EE'|\vec{q}|} = -\frac{\omega}{|\vec{q}|}(1 + \beta \cos \theta) - \frac{m_l^2}{E'|\vec{q}|} \end{aligned}$$

przy R_{LL} :

$$\begin{aligned} v_{LL} &= \frac{\omega^2(2EE' - kk') + 2(qk)(qk') + Q^2kk' - 2\omega(Eqk' + E'qk - \omega kk')}{EE'|\vec{q}|^2} = \\ &= 1 - \beta \cos \theta + \frac{2EE'\omega^2 + 2(qk)(qk') - 2\omega(Eqk' + E'qk)}{EE'|\vec{q}|^2} = \\ &= 1 + \beta \cos \theta - 2\beta \frac{E|\vec{k}'|}{|\vec{q}|^2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

przy R_T :

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{|\vec{q}|^2kk' + \frac{1}{2}Q^2(2EE' - kk') - (qk)(qk') - \frac{1}{2}Q^2kk' + \omega(Eqk' + E'qk - \omega kk')}{EE'|\vec{q}|^2} = \\ &= 1 - \beta \cos \theta + \frac{E}{|\vec{q}|^2} \left(|\vec{k}'| \beta \cos^2 \theta + E' - \frac{m_l^2}{E'} - 2\beta |\vec{k}'| \cos^2 \theta \right) = \\ &= 1 - \beta \cos \theta + \beta \frac{E|\vec{k}'|}{|\vec{q}|^2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

przy $R_{T'}$:

$$v_{T'} = -\frac{\omega qk' + Q^2 E'}{EE'|\vec{q}|} = \frac{E + E'}{|\vec{q}|}(\beta \cos \theta - 1) + \frac{m_l^2}{E'|\vec{q}|}$$

Znaleźliśmy wszystkie współczynniki. Otrzymane wyrażenia zgadzają się z podanymi w [8]. Możemy teraz za ich pomocą zapisać przekrój czynny:

$$\frac{d^2\sigma^{\text{CC}}}{dE'd \cos \theta} = 2\pi \frac{\sigma_0}{E_p} [v_{CC}R_{CC} + v_{CL}R_{CL} + v_{LL}R_{LL} + v_T R_T + \chi v_{T'} R_{T'}]. \quad (4.8)$$

4.3 Analiza numeryczna

Naszym celem jest ilościowe zbadanie wkładów od poszczególnych funkcji odpowiedzi do różniczkowego przekroju czynnego. Skupimy się na neutrinach mionowych, czyli procesach $\nu_\mu n \rightarrow \mu^- p$ i $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ n$. Najpierw rozważymy rozpraszanie monoenergetycznego neutrina na spoczywającym nukleonie. Później przejdziemy do wiązki neutrin, a następnie do nukleonu w jądrze, czyli z niezerowym pędem początkowym (model gazu Fermiego).

Parametryzację słabych czynników postaci można znaleźć m.in. w artykule [11]. Podane tam wzory, przepisane według naszej konwencji, są następujące:

$$g_v(q^2) = \frac{1 - (1 + \xi)q^2/4M_N^2}{1 - q^2/4M_N^2} G_{\text{dipol}}(q^2),$$

$$g_m(q^2) = \frac{\xi}{1 - q^2/4M_N^2} G_{\text{dipol}}(q^2),$$

gdzie $G_{\text{dipol}}(q^2) = (1 - q^2/M_V^2)^{-2}$. Są one zgodne ze związkami (2.51) wyprowadzonymi przez nas drogą teoretyczną. Czynniki pseudowektorowy (aksjalny) i pseudoskalarny przewidywane przez tzw. hipotezę PCAC (*partially conserved axial current*):

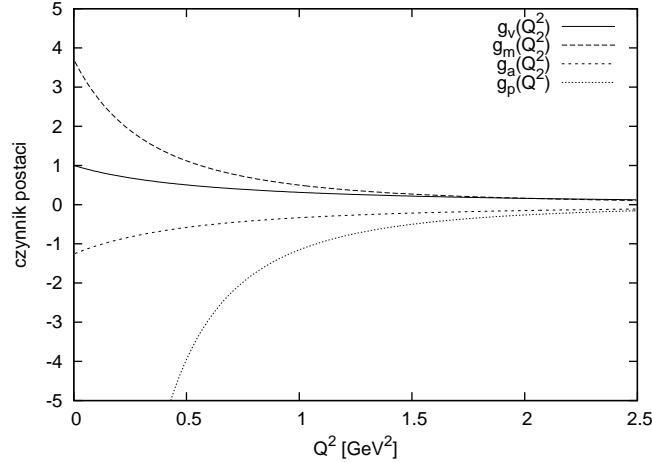
$$g_a(q^2) = \frac{g_A}{(1 - q^2/M_A^2)^2},$$

$$g_p(q^2) = \frac{4M_N^2}{m_\pi^2 - q^2} g_a(q^2).$$

Wartości parametrów występujących w powyższych wzorach:

- $\xi = (\mu_p - 1) - \mu_n \simeq 3.706$,
- $M_V \simeq 0.843 \text{ GeV}$,
- masa aksjalna $M_A \simeq 1.03 \text{ GeV}$,
- $g_A = g_a(0) \simeq -1.26$,
- $M_N = \frac{1}{2}(M_n + M_p) \simeq 0.93892 \text{ GeV}$,
- masa pionu naładowanego $m_\pi \simeq 0.13957 \text{ GeV}$.

Oprócz tego potrzebne nam będą stałe: masa mionu $m_\mu \simeq 0.1056584 \text{ GeV}$, stała Fermiego $G_F = G_F/(\hbar c)^3 \simeq 1.1664 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, kąt Cabibbo (czyli element V_{ud} macierzy CKM) $\cos \theta_C \simeq 0.974$. Funkcje odpowiedzi R_j wyrażają się przez funkcje struktury i mają ten sam wymiar co one, czyli są bezwymiarowe. Bezwymiarowe są też współczynniki v_j . Z analizy wymiarowej wyrażenia na przekrój czynny wynika, że musi być ono dodatkowo pomnożone przez stałą konwersji $(\hbar c)^2$ mającą wymiar (powierzchnia) \times (energia)².



Rysunek 4.2: Słabe czynniki postaci. Wszystkie czynniki mają skończoną wartość dla $Q^2 = 0$.

4.4 Spoczywający nukleon i monoenergetyczne neutрино

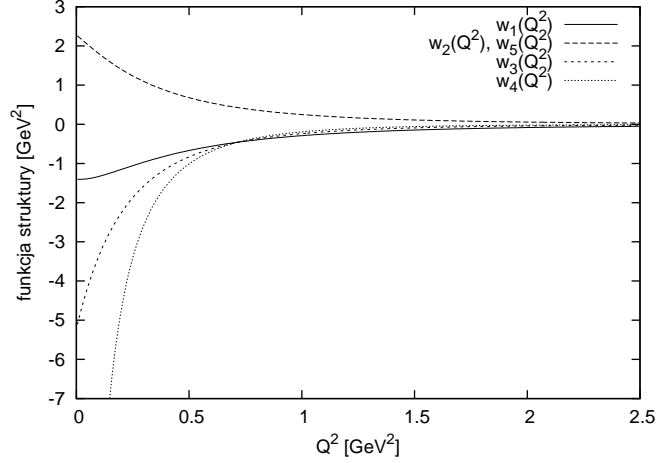
Tarczą jest swobodny nukleon, więc $M_T = M_N$. Otrzymany inkluzywny przekrój czynny (4.8) zawiera wkłady od wszystkich kanałów dla CC, w szczególności od CCQE ($\nu n \rightarrow l^- p$ lub $\bar{\nu} p \rightarrow l^+ n$). Wkład kwazielastyczny dany jest relacją $W^{\mu\nu} = \frac{1}{E_{p'}} H^{\mu\nu} \delta(E' + E_{p'} - E - E_p)$, gdzie tensor $H^{\mu\nu}$ odpowiada swobodnemu nukleonowi. Funkcje struktury dla tensora $H_{CC}^{\mu\nu}$ zdefiniowane zostały w Dodatku B.2 i wynoszą

$$\begin{aligned}
 w_1 &= -\frac{1}{4} ((g_v + g_m)^2 + g_a^2) Q^2 - M_N^2 g_a^2 \\
 w_2 &= \frac{1}{4} g_m^2 Q^2 + M_N^2 (g_v^2 + g_a^2) \\
 w_3 &= M_N^2 g_a (g_v + g_m) \\
 w_4 &= \frac{1}{16} (g_m^2 + g_p^2) Q^2 - \frac{1}{4} M_N^2 (g_m^2 + 2g_v g_m + 2g_a g_p) \\
 w_5 &= \frac{1}{4} g_m^2 Q^2 + M_N^2 (g_v^2 + g_a^2) = w_2
 \end{aligned}$$

(jeśli wiemy, że wszystkie czynniki postaci są rzeczywiste). Odpowiednie funkcje struktury dla tensora $W_{CC}^{\mu\nu}$ oznaczaliśmy przez W_1, \dots, W_5 . Funkcje struktury są współczynnikami przy liniowo niezależnych wyrazach, z których zbudowane są tensory, dlatego relację między oboma tensorami możemy zapisać na poziomie funkcji struktury:

$$W_i = \frac{1}{E_{p'}} w_i \delta(E' + E_{p'} - E - E_p).$$

Można pójść o krok dalej i zauważyć, że funkcje odpowiedzi R_j (i przekrój czynny) zależą liniowo od funkcji struktury W_i . Powyższą relację zapiszemy wtedy jako



Rysunek 4.3: Funkcje struktury dla rozpraszania kwazielastycznego.

$$R_j = \frac{1}{E_{p'}} R_j^{(\text{CCQE})} \delta(E' + E_{p'} - E - E_p)$$

i zyskamy możliwość wyciągnięcia współczynnika $1/E_{p'}$ i delty Diraca na zewnątrz całego wyrażenia na przekrój czynny. Po wycalkowaniu po energii leptonu naładowanego otrzymamy

$$\frac{d\sigma^{\text{CCQE}}}{d\cos\theta_\mu} = \frac{2\pi\sigma_0}{E_p E_{p'}} [v_{\text{CC}} R_{\text{CC}} + v_{\text{CL}} R_{\text{CL}} + v_{\text{LL}} R_{\text{LL}} + v_{\text{T}} R_{\text{T}} + \chi v_{\text{T}'} R_{\text{T}'}],$$

gdzie doszedł nam warunek zachowania energii $E' = E + E_p - E_{p'}$, a za funkcje W_i należy wstawić dokładnie w_i (przy funkcjach odpowiedzi pominięto indeks „(CCQE)”). Dla rozważanego procesu zachowanie energii da nam $E_{p'} = E_\nu + M_N - E_\mu$, zatem energię końcową nukleonu będziemy mogli wyrazić przez wielkości ustalone lub mierzone w eksperymencie. Żeby dostać ścisły wynik, należy uwzględnić człon wynikający z zamiary argumentu delty Diraca. Sprowadza się to do pomnożenia $\frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu}$ przez $RE_{p'}/M_N$, gdzie czynnik odrzutu dla procesu kwazielastycznego wynosi

$$R = \left[1 + \frac{E_\nu}{M_N} \left(1 - \frac{E_\mu}{\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}} \cos\theta_\mu \right) \right]^{-1}. \quad (4.9)$$

Po jawnym zapisaniu współczynnika σ_0 i stałej konwersji $(\hbar c)^2$ wzór na przekrój czynny przyjmie postać

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{CCQE}}}{d\cos\theta_\mu} &= (\hbar c)^2 \frac{G_F^2 \cos^2\theta_C}{2\pi} R \frac{E_\mu \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}}{M_N^2} \times \\ &\times [v_{\text{CC}} R_{\text{CC}} + v_{\text{CL}} R_{\text{CL}} + v_{\text{LL}} R_{\text{LL}} + v_{\text{T}} R_{\text{T}} + \chi v_{\text{T}'} R_{\text{T}'}] \end{aligned} \quad (4.10)$$

(zależność energii mionu E_μ od kosinusa i energii neutrina została podana niżej).

Żeby ułatwić porównywanie wyników z danymi eksperymentalnymi, wyrazimy jeszcze różniczkowy przekrój czynny jako pochodną względem Q^2 oraz względem E_μ . Musimy w tym celu obliczyć jakobiany

$$J_1 \equiv \frac{d \cos \theta_\mu}{dE_\mu}, \quad J_2 \equiv \frac{d \cos \theta_\mu}{dQ^2}.$$

Korzystając między innymi z definicji przekazu pędu i zasady zachowania energii można udowodnić następujące równości:

$$2E \left(E' - \sqrt{E'^2 - m_l^2} \cos \theta \right) - m_l^2 = Q^2 = 2M_N(E - E'),$$

prawdziwe dla układu spoczynkowego nukleonu (laboratoryjny układ odniesienia „LAB”). Z nich można wyprowadzić związki pomiędzy zmiennymi $\{\cos \theta_\mu, Q^2, E_\mu\}$:

$$\cos \theta_\mu = \frac{E_\mu - \frac{2M_N(E_\nu - E_\mu) + m_\mu^2}{2E_\nu}}{\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}} = \frac{E_\nu - \frac{Q^2}{2M_N} - \frac{Q^2 + m_\mu^2}{2E_\nu}}{\sqrt{\left(E_\nu - \frac{Q^2}{2M_N}\right)^2 - m_\mu^2}}$$

$$Q^2 = 2M_N(E_\nu - E_\mu) = \frac{\left(\frac{E_\nu}{M_N} + 1\right) \left(1 - \frac{m_\mu^2}{2E_\nu^2}\right) - \frac{E_\nu}{M_N} \cos^2 \theta_\mu - \cos \theta_\mu \sqrt{\Delta}}{2 \left(\frac{1}{2E_\nu} + \frac{1}{2M_N}\right)^2 - \frac{1}{2M_N^2} \cos^2 \theta_\mu}$$

$$E_\mu = E_\nu - \frac{Q^2}{2M_N} = \frac{M_N + \frac{m_\mu^2}{2E_\nu} + \frac{m_\mu^2 M_N}{2E_\nu^2} + \frac{M_N^2}{E_\nu} + M_N \cos \theta_\mu \sqrt{\Delta}}{\left(1 + \frac{M_N}{E_\nu}\right)^2 - \cos^2 \theta_\mu}$$

gdzie

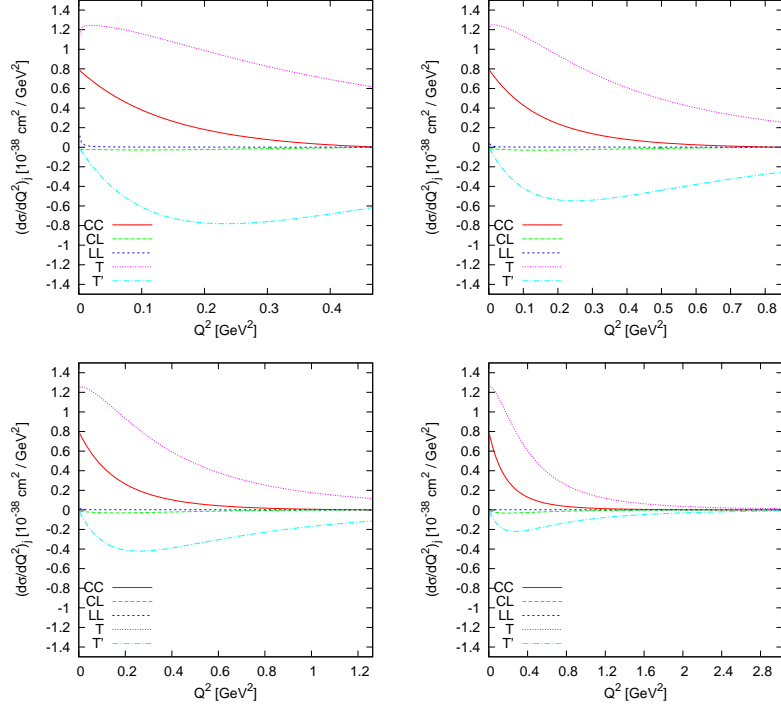
$$\Delta = \left(1 - \frac{m_\mu^2}{2E_\nu M_N}\right)^2 - \frac{m_\mu^2}{E_\nu^2} + \frac{m_\mu^2}{M_N^2} (\cos^2 \theta_\mu - 1).$$

Jakobiany wynoszą zatem

$$J_1 = \frac{1 + \frac{M_N}{E_\nu} - \frac{E_\mu}{|\vec{k}'|} \cos \theta_\mu}{|\vec{k}'|} > 0,$$

$$J_2 = -\frac{1 + \frac{M_N}{E_\nu} - \frac{E_\mu}{|\vec{k}'|} \cos \theta_\mu}{2M_N |\vec{k}'|} < 0.$$

Ich iloraz jest stały i równy $-2M_N$, ponieważ tyle wynosi pochodna $\frac{dQ^2}{dE_\mu}$. Różniczkowe przekroje czynne zapiszemy wtedy jako

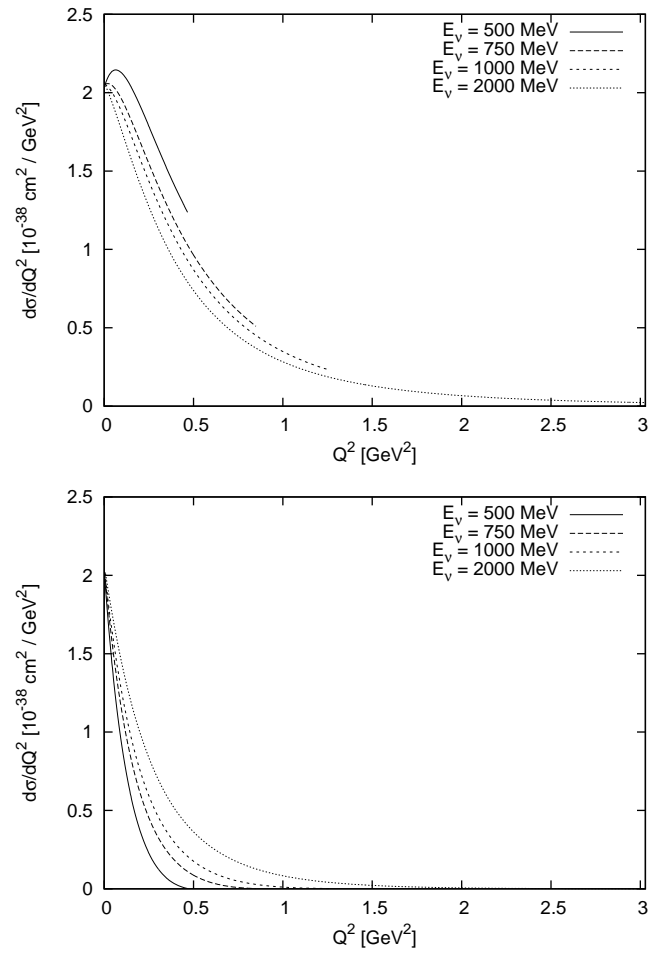


Rysunek 4.4: Wkłady do różniczkowego przekroju czynnego $\frac{d\sigma}{dQ^2}$. Każdemu wykresowi odpowiada inna energia neutrina (odpowiednio 500 MeV, 750 MeV, 1000 MeV, 2000 MeV).

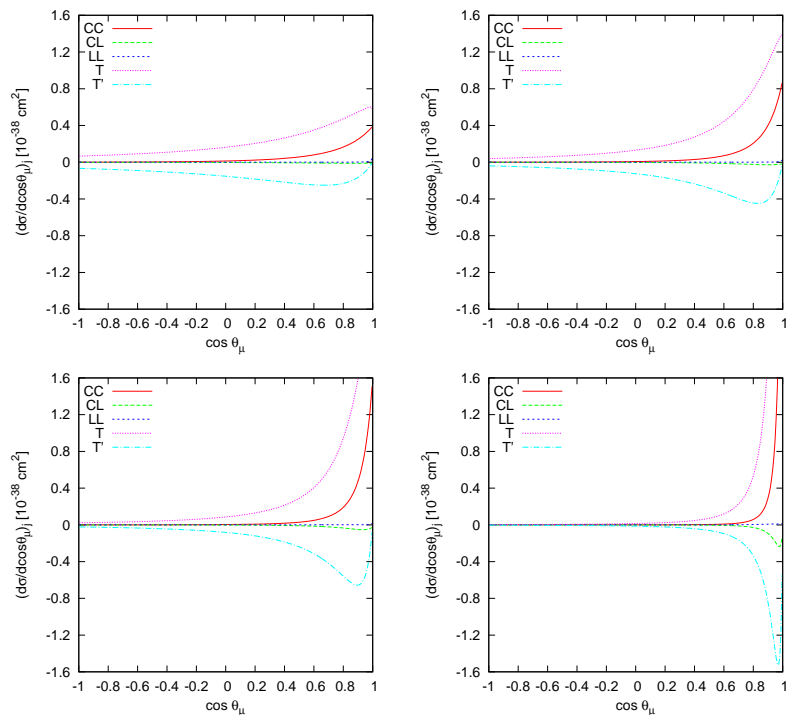
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE_\mu} &= |J_1| \frac{d\sigma}{d \cos \theta_\mu}, \\ \frac{d\sigma}{dQ^2} &= |J_2| \frac{d\sigma}{d \cos \theta_\mu}. \end{aligned}$$

Funkcja różniczkowego przekroju czynnego nie powinna wykraczać poza dozwolony obszar zmiennych. Wiemy, że w układzie środka masy (CMF) kąt rozproszenia mionu jest dowolny: $(\cos \theta_\mu)^{\text{CM}}$ może przyjąć każdą wartość z przedziału $[-1, 1]$. Zakres ten można przeliczyć na zakresy innych zmiennych. Wzory na związki między zmiennymi zawierają jednak parametr E_ν zadany w układzie LAB. Musimy więc przejść z kątem rozproszenia od układu CMF do LAB, zanim skorzystamy z tych wzorów.

W CMF kąt mionu względem wektora pędu neutrina przyjmuje wartość od 0 do 180 stopni. Skoro CMF porusza się względem LAB wzdłuż wektora pędu neutrina, to przekształcenie Lorentza (pchnięcie odpowiadające przejściu $\text{CMF} \rightarrow \text{LAB}$) nie zmienia kąta w tych dwóch skrajnych przypadkach (tzn. kiedy kierunek mionu jest równoległy lub antyrównoległy do kierunku neutrina). Zachodzą więc równoważności $\cos \theta_\mu = \pm 1 \Leftrightarrow (\cos \theta_\mu)^{\text{CM}} = \pm 1$. Przekształcenie Lorentza powoduje tylko zmianę kosinusa na większy (lub kąt θ_μ na mniejszy) na przedziale otwartym $(-1, 1)$. Jeśli potraktujemy to przekształcenie jako odwzorowanie ze zbioru wartości $(\cos \theta_\mu)^{\text{CM}}$ w zbiór



Rysunek 4.5: Różniczkowy przekrój czynny $\frac{d\sigma}{dQ^2}$ dla neutrina i dla antyneutrina.



Rysunek 4.6: Wkłady do różniczkowego przekroju czynnego $\frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu}$. Każdemu wykresowi odpowiada inna energia neutrina.

wartości $\cos\theta_\mu$ ⁴, to korzystając z jego ciągłości (i dwóch warunków opisanych powyżej) widzimy, że kosinus w układzie laboratoryjnym też może przyjmować dowolną wartość z przedziału $[-1, 1]$ (ale jest ona na ogół większa niż w układzie środka masy).

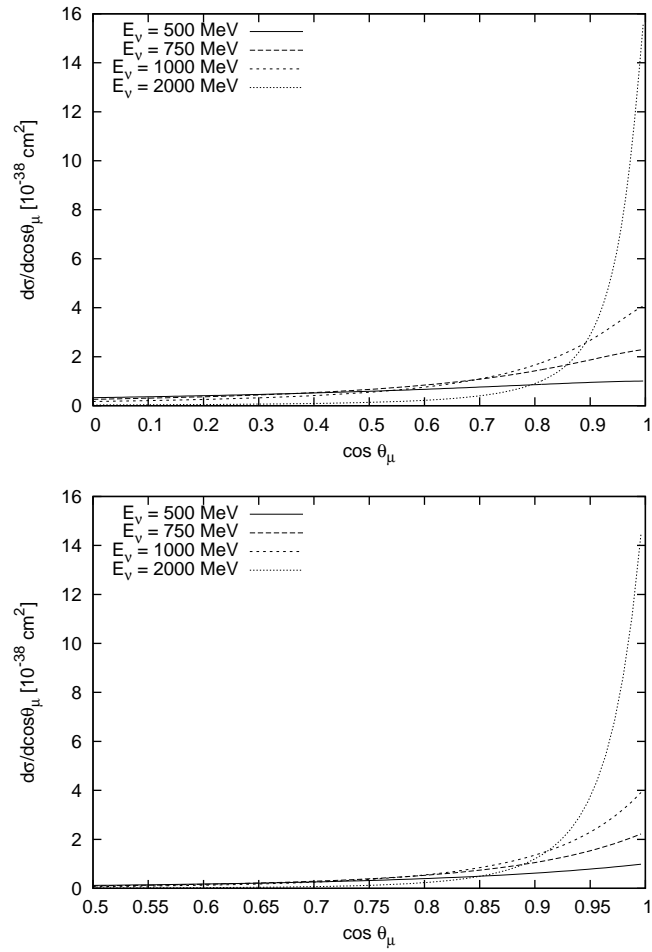
Kolejnym krokiem jest dobranie zakresów Q_{\max}^2 i $E_{\mu\min}$ z warunku, aby $\cos\theta_\mu$ nie był mniejszy od -1 . Jeśli $Q^2 = Q_{\max}^2$, to równoważnie $E_\mu = E_{\mu\min}$. Konkretna wartość tego ograniczenia zależy od E_ν i może być obliczona ze wzoru na $Q^2(\cos\theta_\mu)$ lub $E_\mu(\cos\theta_\mu)$ przez podstawienie $\cos\theta_\mu = -1$. Podobnie, podstawiając $\cos\theta_\mu = 1$ dostaniemy $Q_{\min}^2 \approx 0$ ($Q^2 = 0$ nie jest fizyczne) oraz $E_{\mu\max} \approx E_\nu$.

Różniczkowe przekroje czynne względem trzech różnych zmiennych i dla czterech wybranych wartości energii neutrina zostały przedstawione na rysunkach 4.4–4.9. Przekrój czynny dla procesu $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ n$ jest sumą wkładów od wszystkich funkcji odpowiedzi, a dla procesu $\nu_\mu n \rightarrow \mu^- p$ wkład T' jest brany z przeciwnym znakiem.

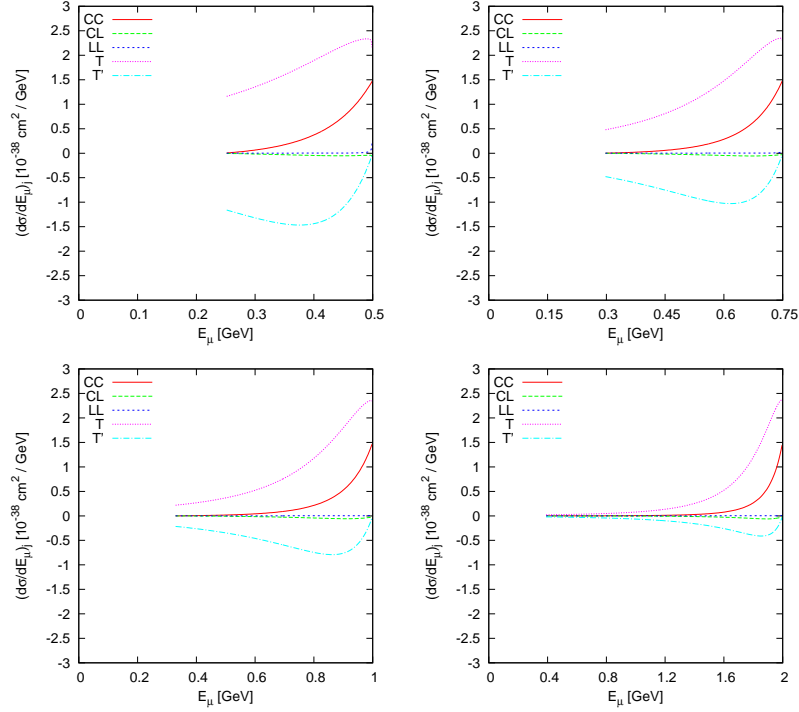
4.5 Spoczywający nukleon i wiązka neutrin

Dla swobodnego nukleonu i monoenergetycznego neutrina mieliśmy odpowiedniość 1:1 między energią mionu E_μ a kątem rozproszenia $\cos\theta_\mu$. Różniczkowy przekrój czynny był funkcją jednej zmiennej. Dopiero w przypadku wiązki neutrin (o różnych energiach)

⁴Gdybyśmy dysponowali odpowiednimi wzorami, moglibyśmy wykonać to odwzorowanie w następujących krokach: $(\cos\theta_\mu)^{\text{CM}} \rightarrow (Q^2)^{\text{CM}} = Q^2 \rightarrow \cos\theta_\mu$. Korzystamy tutaj z faktu, że Q^2 jest takie samo w każdym układzie odniesienia (niezmiennik).



Rysunek 4.7: Różniczkowy przekrój czynny $\frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu}$ dla neutrina i dla antyneutrina. Funkcje mają skończoną wartość na całym przedziale. Ograniczono skale do interesujących przedziałów.



Rysunek 4.8: Wkłady do różniczkowego przekroju czynnego $\frac{d\sigma}{dE_\mu}$. Każdemu wykresowi odpowiada inna energia neutrina.

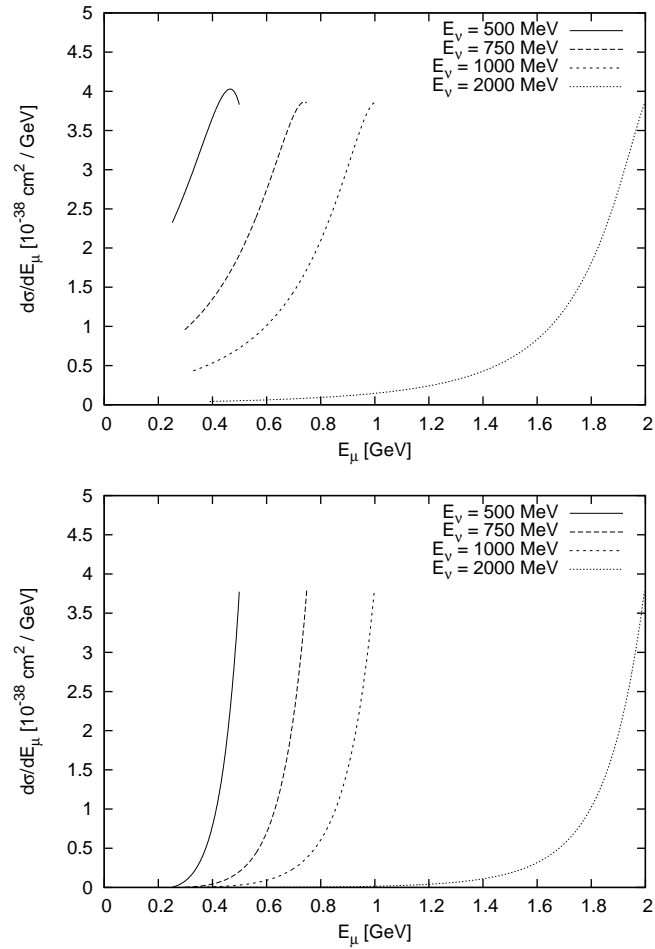
rozsądnie jest wprowadzić „podwójny różniczkowy przekrój czynny” – względem obu zmiennych kinematycznych, i przedstawić go na wykresie w płaszczyźnie $(E_\mu, \cos\theta_\mu)$ albo $(T_\mu, \cos\theta_\mu)$, gdzie $T_\mu \equiv E_\mu - m_\mu$ jest energią kinetyczną mionu. Naszym celem jest przedstawienie wkładów od poszczególnych funkcji odpowiedzi i sprawdzenie, czy istnieją na wykresach takie obszary, w których jedna funkcja dominuje nad innymi.

Analizę przeprowadzimy dla dwóch wiązek (jedna dla neutrin, druga dla antyneutrin) używanych w eksperymencie MiniBooNE. Dane o wiązkach znajdują się w [14]. Zaniebdamy przy tym wkład od zanieczyszczeń. Widmo energii tych wiązek przedstawia rysunek 4.10.

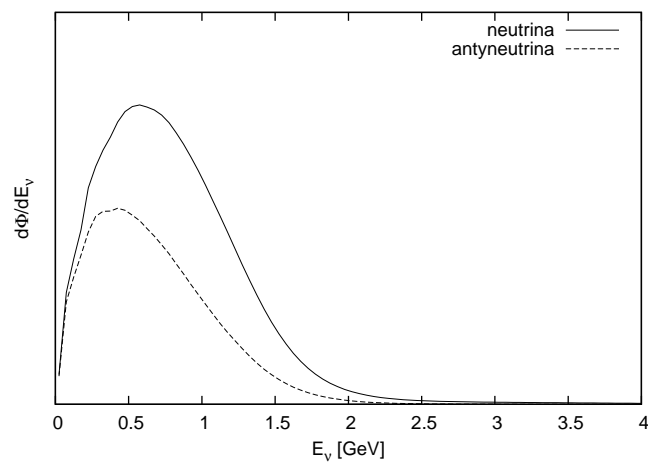
Funkcje te potraktujemy jako rozkład prawdopodobieństwa tego, że pojedyncza cząstka ma energię z przedziału $[E_\nu, E_\nu + dE_\nu)$. Unormujmy je jako $f(E_\nu) \equiv \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dE_\nu}$, gdzie całkowity strumień wynosi $\Phi = \int \left(\frac{d\Phi}{dE_\nu} \right) dE_\nu$. Wtedy przekrój czynny uśredniony po wiązce będzie można wyrazić wzorem

$$\left\langle \frac{d\sigma^{\text{CCQE}}}{d \cos \theta_\mu} \right\rangle_{E_\nu} = \int f(E_\nu) \frac{d\sigma^{\text{CCQE}}}{d \cos \theta_\mu}(E_\nu) dE_\nu,$$

przy czym różniczkowy przekrój dla ustalonej energii neutrina dany jest wzorem (4.10). Implementacja numeryczna powyższego wzoru polegała na próbkowaniu wartości E_ν (z odpowiednio dużą dokładnością) oraz wartości $\cos\theta_\mu$ (z dokładnością $d \cos\theta_\mu = 0.05$) i obliczaniu



Rysunek 4.9: Różniczkowy przekrój czynny $\frac{d\sigma}{dE_\mu}$ dla neutrina i dla antyneutrina.



Rysunek 4.10: Wiązki neutrin i antyneutrin z eksperymentu MiniBooNE. Bezwzględne wartości strumienia na jednostkę energii (oś pionowa) zależą od konkretnego eksperymentu.

$$d\sigma(\cos\theta_\mu, E_\nu) = f(E_\nu) \frac{d\sigma}{d\cos\theta_\mu}(\cos\theta_\mu, E_\nu) d\cos\theta_\mu dE_\nu.$$

Jednocześnie przechodzono do *podwójnie* różniczkowego przekroju $d^2\sigma(\cos\theta_\mu, T_\mu)$ przypisując powyższy wynik odpowiedniemu przedziałowi energii mionu T_μ zadanej jednoznacznie przez $\cos\theta_\mu$ i E_ν . Przedziały energii miały szerokość $dT_\mu = 0.05$ GeV.

Wkłady od poszczególnych funkcji odpowiedzi do podwójnego różniczkowego przekroju czynnego przedstawiono na rysunkach 4.11–4.18. Funkcje CL i T' są ujemne w każdym punkcie płaszczyzny $(\cos\theta_\mu, T_\mu)$, więc zostały przedstawione z dodatkowym znakiem minus. Pozostałe trzy funkcje są dodatnie.

„Obszar zabroniony” na płaszczyźnie wykresu odpowiada ujemnej energii neutrina/antineutrina, natomiast jego granica odpowiada sytuacji gdy $E_\nu \rightarrow \pm\infty$. Był on wyznaczany numerycznie z warunku

$$T_\mu + m_\mu - \cos\theta_\mu \sqrt{T_\mu^2 + 2m_\mu T_\mu} > M_N. \quad (4.11)$$

4.6 Gaz Fermiego

Będziemy teraz analizować rozpraszanie na jądrze atomowym. Najprostszym modelem jądra jest relatywistyczny gaz Fermiego. Przybliżenie to sprawdza się dość dobrze w przypadku inkluzywnego rozpraszania leptonów o energii rzędu 1 GeV. Analizę przeprowadzimy dla tych samych wiązek neutrin i antyneutrin co poprzednio.

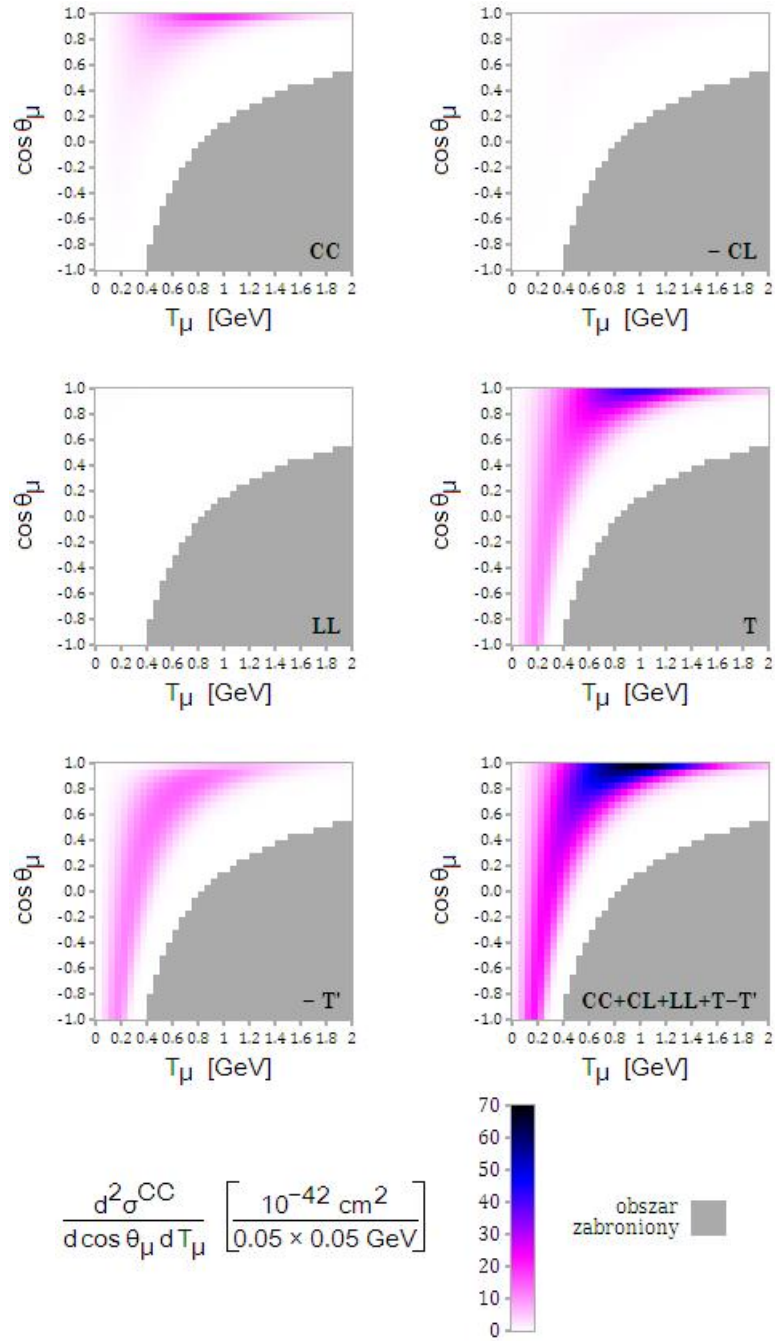
Dotychczas nie uwzględnialiśmy potencjałów, ruchu Fermiego i zakazu Pauliego. Gdy ustalaliśmy wartości $\cos\theta$ i E' , to różniczkowy przekrój czynny był dokładnie δ -funkcją energii neutrina E . W rzeczywistości, kiedy rozpraszanie zachodzi na jądrze, pik ten ma skończoną szerokość, głównie ze względu na ruch Fermiego. Początkowe jądro jako całość spoczywa, ale dodatkowym stopniem swobody jest pęd nukleonu. Można się domyślać, że wykresy uzyskane w poprzednim podrozdziale ulegną dodatkowemu „rozmyciu”. Składowe pędu nukleonu zapiszemy jako

$$\vec{p} = |\vec{p}|(\sin\vartheta \cos\phi, \sin\vartheta \sin\phi, \cos\vartheta).$$

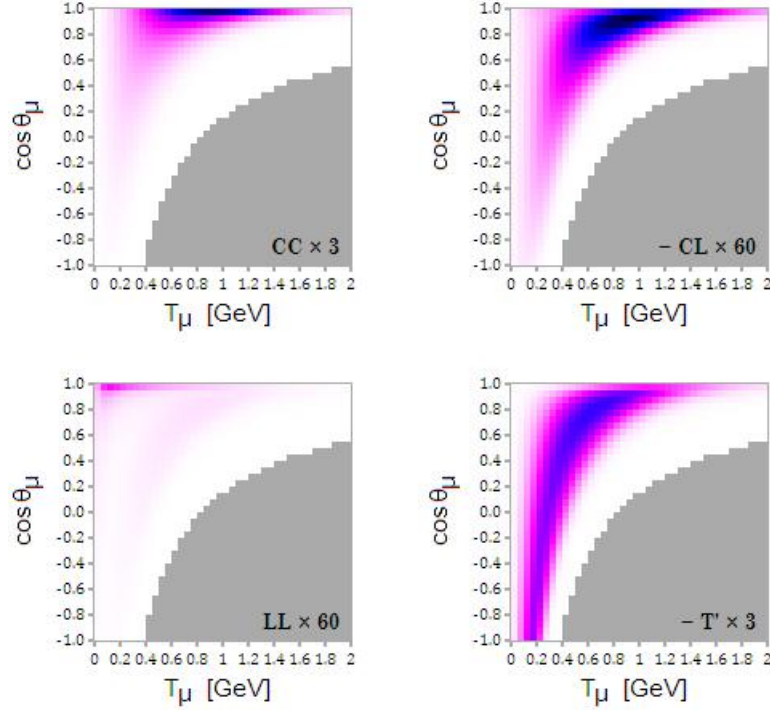
Jeśli $\vec{q} \parallel \hat{z}$, to kąt biegunowy ϑ jest jednocześnie kątem między wektorami \vec{p} i \vec{q} . W gazie Fermiego pędy są rozłożone izotropowo, dlatego rzut na kierunek przekazu pędu $\cos\vartheta \in [-1, 1]$ oraz kąt azymutalny $\phi \in [0, 2\pi]$ będą zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym. W stanie podstawowym maksymalna wartość modułu pędu to „pęd Fermiego” p_F . Jest on stały i wyznaczany dla danego jądra eksperymentalnie. Dla jąder o $Z = N$ wartość pędu Fermiego jest taka sama dla wszystkich nukleonów. Rozpraszanie zachodzi na jądrze tlenu ^{16}O , przyjmiemy więc wartość $p_F = 225$ MeV.

Zakłada się, że nukleony znajdują się w trójwymiarowej studni potencjału i nie oddziałują ze sobą. Do wyciągnięcia nukleonu z jądra potrzebna jest pewna praca. Zastosujemy przybliżenie polegające na pomniejszeniu energii początkowego nukleonu o jego energię wiązania E_B :

$$E_p = \sqrt{M_N^2 + |\vec{p}|^2} \longrightarrow \tilde{E}_p \equiv E_p - E_B.$$



Rysunek 4.11: Przekrój czynny dla wiązki neutron i spoczywającego nukleonu.



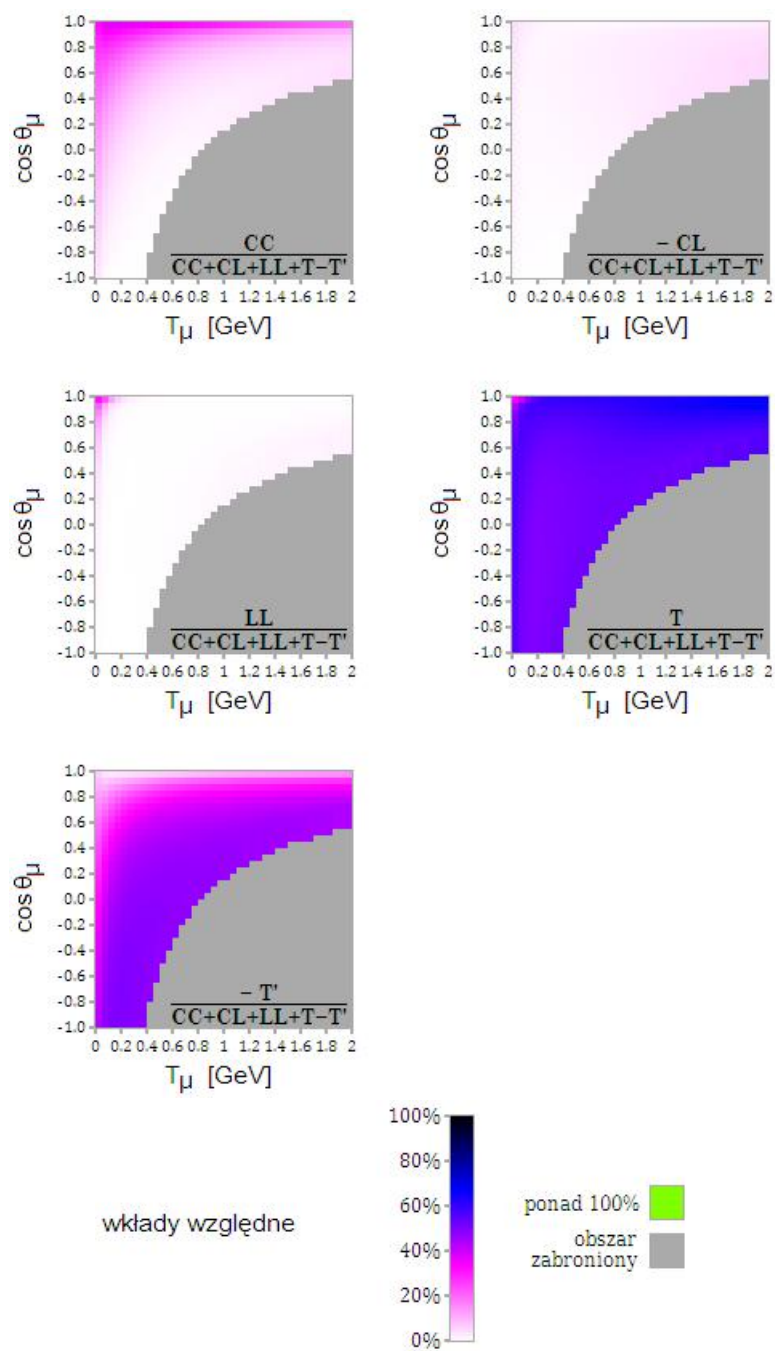
Rysunek 4.12: Przeskalowane wkłady dla wiązki neutrin i spoczywającego nukleonu.

Związane nukleony nie są więc „na powłóce masy”. Spinor Diraca nukleonu pozostawimy w niezmienionej formie. Przyjmijmy $E_B = 26$ MeV. Warto zwrócić uwagę, że $E_B \ll M_N$ i ze względu na przybliżony charakter analizy efekt wiązania nie będzie miał większego wpływu na wyniki.

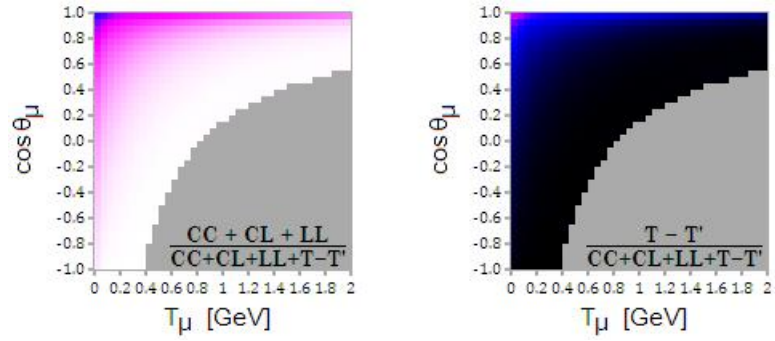
Zwężenie tensorów w inkluzywnym przekroju czynnym liczymy od momentu, w którym założyliśmy, że nukleon spoczywa. Otrzymamy teraz (por. wzór (3.17))

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma^{\text{CC}}}{dT_\mu d\cos\theta_\mu} &= \frac{G_F^2 \cos^2\theta_C}{4\pi} \frac{|\vec{k}'|}{E_\nu E_p} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} W_{\text{CC}}^{\mu\nu} = \\
&= \frac{2\pi\sigma_0}{E_\nu E_\mu E_p} \left[-2W_1 kk' + W_2 \left(2\frac{(pk)(pk')}{M_N^2} - kk' \right) + \right. \\
&+ \frac{W_4}{M_N^2} m_\mu^2 kk' - \frac{W_5}{M_N^2} m_\mu^2 pk + \\
&\left. + 2\chi \frac{W_3}{M_N^2} \left((kk' - m_\mu^2)pk + (kk')(pk') \right) \right].
\end{aligned}$$

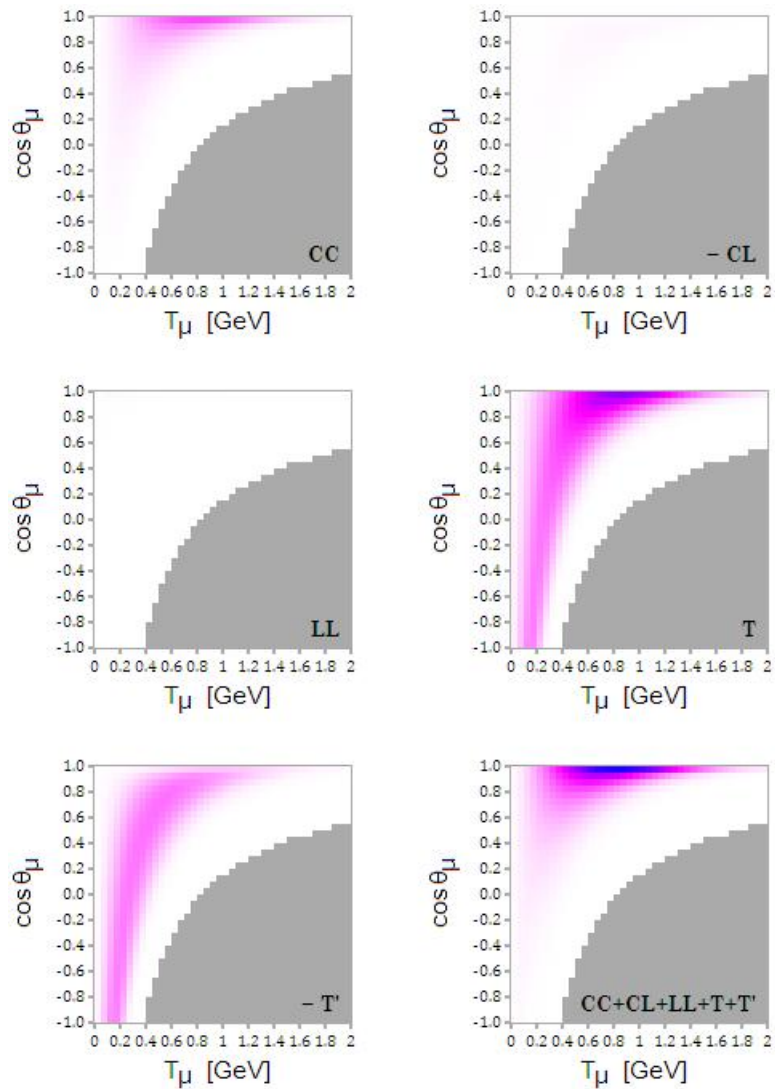
Funkcje odpowiedzi obliczone z tensora hadronowego (ze zmodyfikowaną energią $p^0 = \tilde{E}_p$) wynoszą



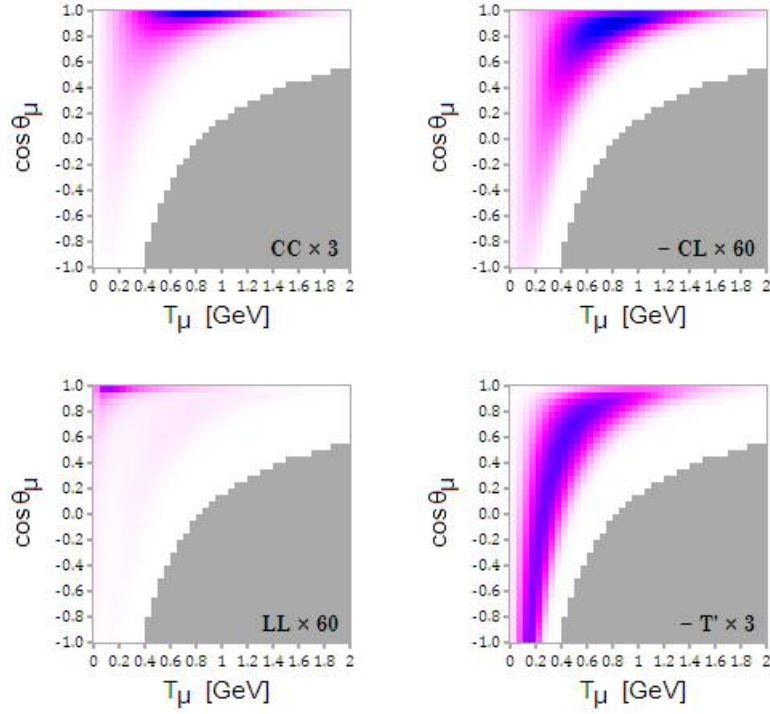
Rysunek 4.13: Wartości względne wkładów dla wiązki neutronów i spoczywającego nukleonu.



Rysunek 4.14: Zsumowane 3 wkłady podłużne oraz 2 wkłady poprzeczne dla wiązki neutron i spoczywającego nukleonu.



Rysunek 4.15: Przekrój czynny dla wiązki antyneutron i spoczywającego nukleonu.

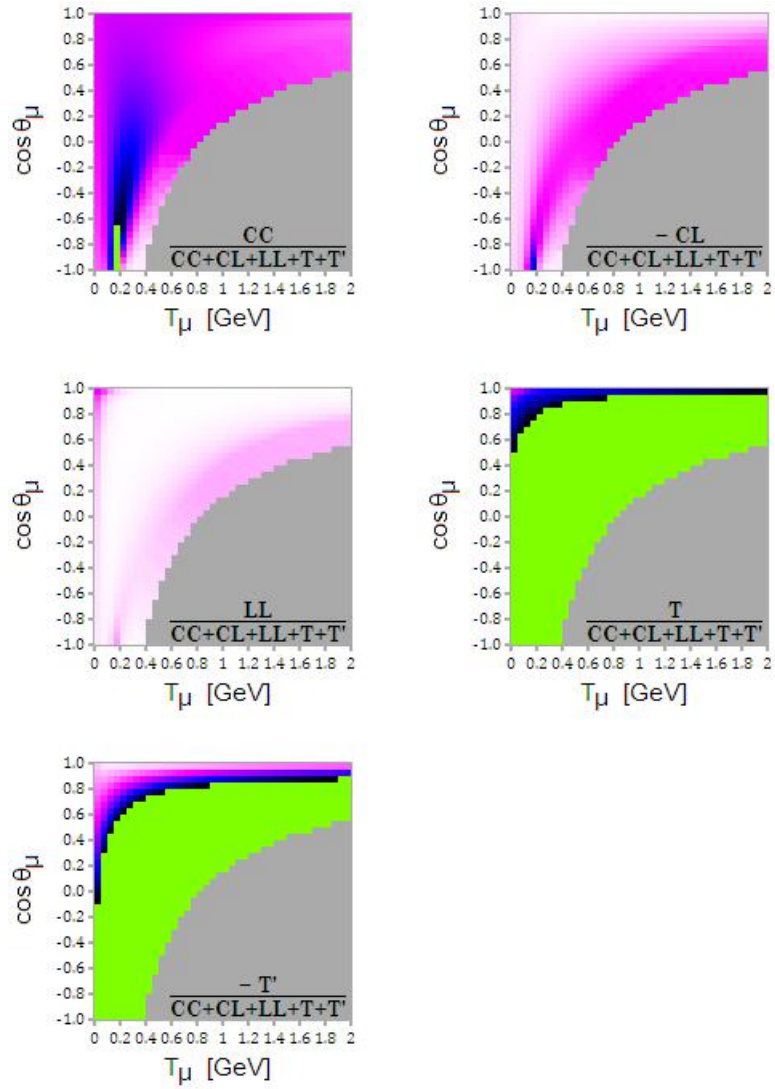


Rysunek 4.16: Przeskalowane wkłady dla wiązki antyneutrini i spoczywającego nukleonu.

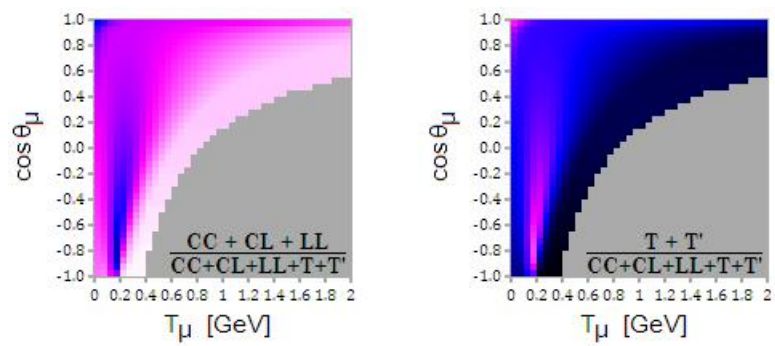
$$\begin{aligned}
 R_{CC} &= W_1 + W_2 \frac{\tilde{E}_p^2}{M_N^2} + W_4 \frac{\omega^2}{M_N^2} + W_5 \frac{\omega \tilde{E}_p}{M_N^2} \\
 R_{CL} &= 2W_2 \frac{\tilde{E}_p |\vec{p}|}{M_N^2} \cos \vartheta + 2W_4 \frac{\omega |\vec{q}|}{M_N^2} + W_5 \frac{\tilde{E}_p |\vec{q}| + \omega |\vec{p}| \cos \vartheta}{M_N^2} \\
 R_{LL} &= -W_1 + W_2 \frac{|\vec{p}|^2}{M_N^2} \cos^2 \vartheta + W_4 \frac{|\vec{q}|^2}{M_N^2} + W_5 \frac{|\vec{q}| |\vec{p}|}{M_N^2} \cos \vartheta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_T &= -2W_1 + W_2 \frac{|\vec{p}|^2}{M_N^2} \sin^2 \vartheta \\
 R_{T'} &= 2W_3 \frac{\omega |\vec{p}| \cos \vartheta - \tilde{E}_p |\vec{q}|}{M_N^2}
 \end{aligned}$$

Dla poruszającego się nukleonu niezerowe są też następujące wkłady:



Rysunek 4.17: Wartości względne wkładów dla wiązki antyneutrino i spoczywającego nukleonu.



Rysunek 4.18: Zsumowane 3 wkłady podłużne oraz 2 wkłady poprzeczne dla wiązki antyneutrino i spoczywającego nukleonu.

$$\begin{aligned}
W^{0x} + W^{x0} &= 2W_2 \frac{\tilde{E}_p |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \cos \phi + W_5 \frac{\omega |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \cos \phi, \\
W^{x3} + W^{3x} &= 2W_2 \frac{|\vec{p}|^2}{M_N^2} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \phi + W_5 \frac{|\vec{q}| |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \cos \phi, \\
i(W^{y3} - W^{3y}) &= 2W_3 \frac{\omega |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \cos \phi - W_6 \frac{|\vec{q}| |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \sin \phi, \\
i(W^{0y} - W^{y0}) &= 2W_3 \frac{|\vec{q}| |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \cos \phi + W_6 \frac{\omega |\vec{p}|}{M_N^2} \sin \vartheta \sin \phi.
\end{aligned}$$

Nie są one jednak niezależnymi funkcjami odpowiedzi. Wyliczenie współczynników kinematycznych przy poszczególnych funkcjach odpowiedzi wymaga odwrócenia powyższej zależności, tzn. rozwiązania tego układu równań względem funkcji struktury. Współczynniki, ze względu na ich złożoną formę, zostały podane w Dodatku C.

Oprócz uśredniania po energiach neutronów, będziemy uśredniać przekrój czynny po „kuli Fermiego” K , czyli po możliwych wartościach pędu nukleonu początkowego:

$$\langle S \rangle = \frac{\int_K S(\vec{p}) d^3 p}{\int_K d^3 p} = \frac{\int_0^{p_F} d|\vec{p}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta |\vec{p}|^2 S(|\vec{p}|, \phi, \cos \vartheta)}{\frac{4}{3} \pi p_F^3},$$

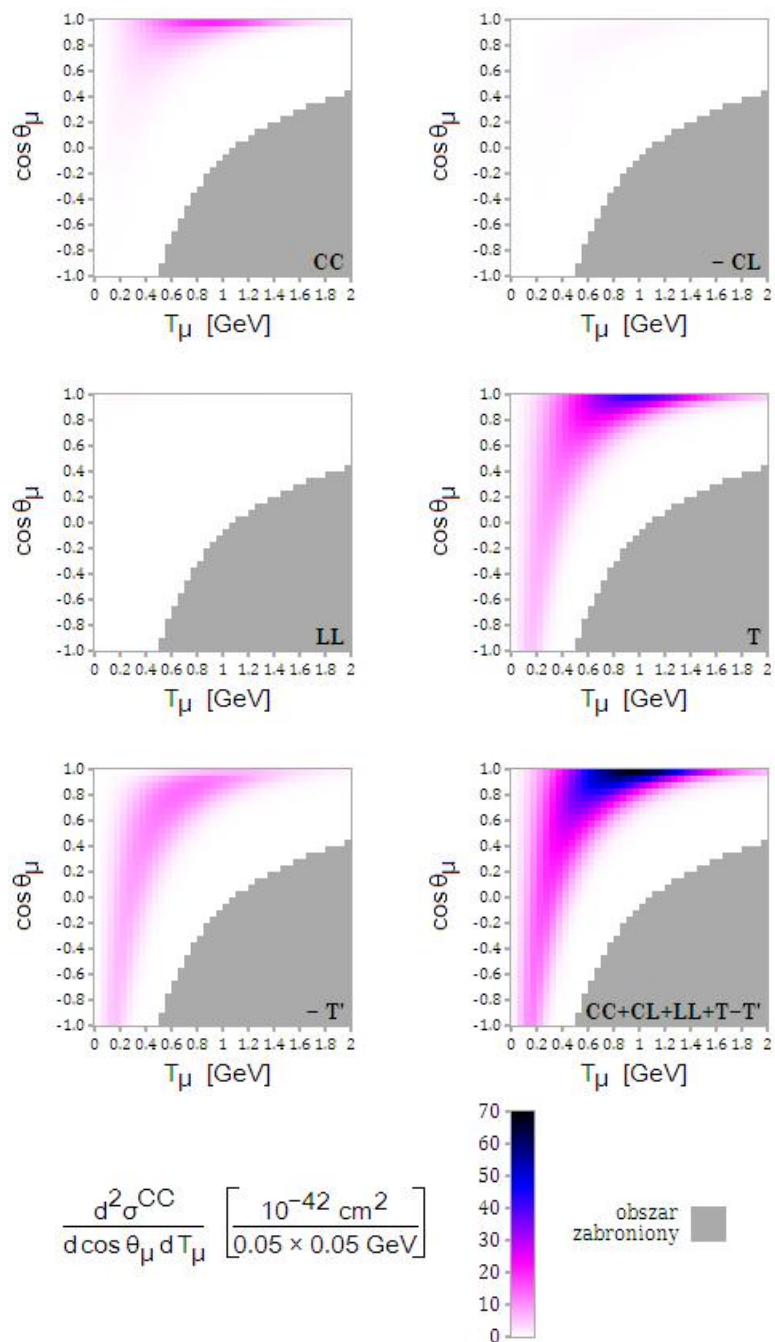
gdzie przez S oznaczyliśmy podwójny różniczkowy przekrój czynny dla dowolnego pędu nukleonu \vec{p} . Podobnie jak dla spoczywającego nukleonu, wyrazimy przekrój czynny przez funkcje w_i , które znamy. Posłużymy się w tym celu związkiem $W^{\mu\nu} = \frac{1}{E_{p'}} H^{\mu\nu} \delta(E_\mu + E_{p'} - E_\nu - \tilde{E}_p)$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d^2 \sigma^{\text{CC}}}{dT_\mu d \cos \theta_\mu} \right\rangle &= \frac{3G_F^2 \cos^2 \theta_C}{16\pi^2 p_F^3} \frac{|\vec{k}'|}{E_\nu} \int_0^{p_F} d|\vec{p}| \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \\
&\quad |\vec{p}|^2 \frac{1}{\tilde{E}_p E_{p'}} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu} \delta(E_\mu + E_{p'} - E_\nu - \tilde{E}_p). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

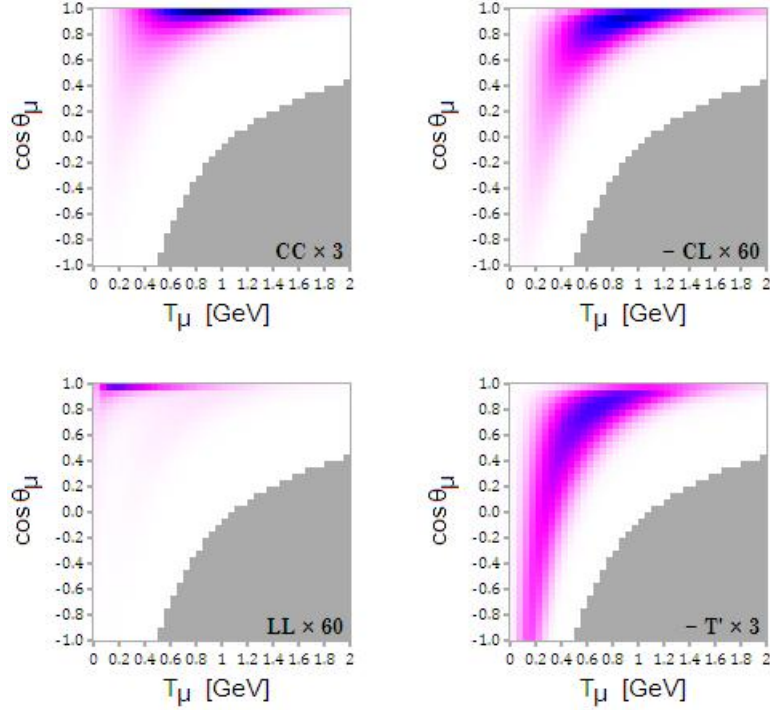
Wyrażenie wewnątrz delty Diraca potraktujemy jako funkcję kąta ϑ :

$$\begin{aligned}
\delta(f(\cos \vartheta)) &= \delta\left(E_\mu + \sqrt{M_N^2 + |\vec{p} + \vec{q}|^2} - E_\nu - \tilde{E}_p\right) \\
&= \delta\left(E_\mu + \sqrt{M_N^2 + |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \vartheta} - E_\nu - \tilde{E}_p\right) \\
&= \delta\left(E_\mu + \sqrt{E_p^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \vartheta} - E_\nu - \tilde{E}_p\right) \\
&= \frac{\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{\left| \frac{\partial f(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} \Big|_{\cos \vartheta = \cos \vartheta_0} \right|}.
\end{aligned}$$

Miejsce zerowe funkcji $f(\cos \vartheta)$ wynosi



Rysunek 4.19: Przekrój czynny dla wiązki neutron i gazu Fermiego.



Rysunek 4.20: Przeskalowane wkłady dla wiązki neutrin i gazu Fermiego.

$$\cos \vartheta_0 = \frac{(E_\nu + \tilde{E}_p - E_\mu)^2 - E_p^2 - |\vec{q}|^2}{2|\vec{p}'||\vec{q}|}, \quad (4.13)$$

natomiast jej pochodna

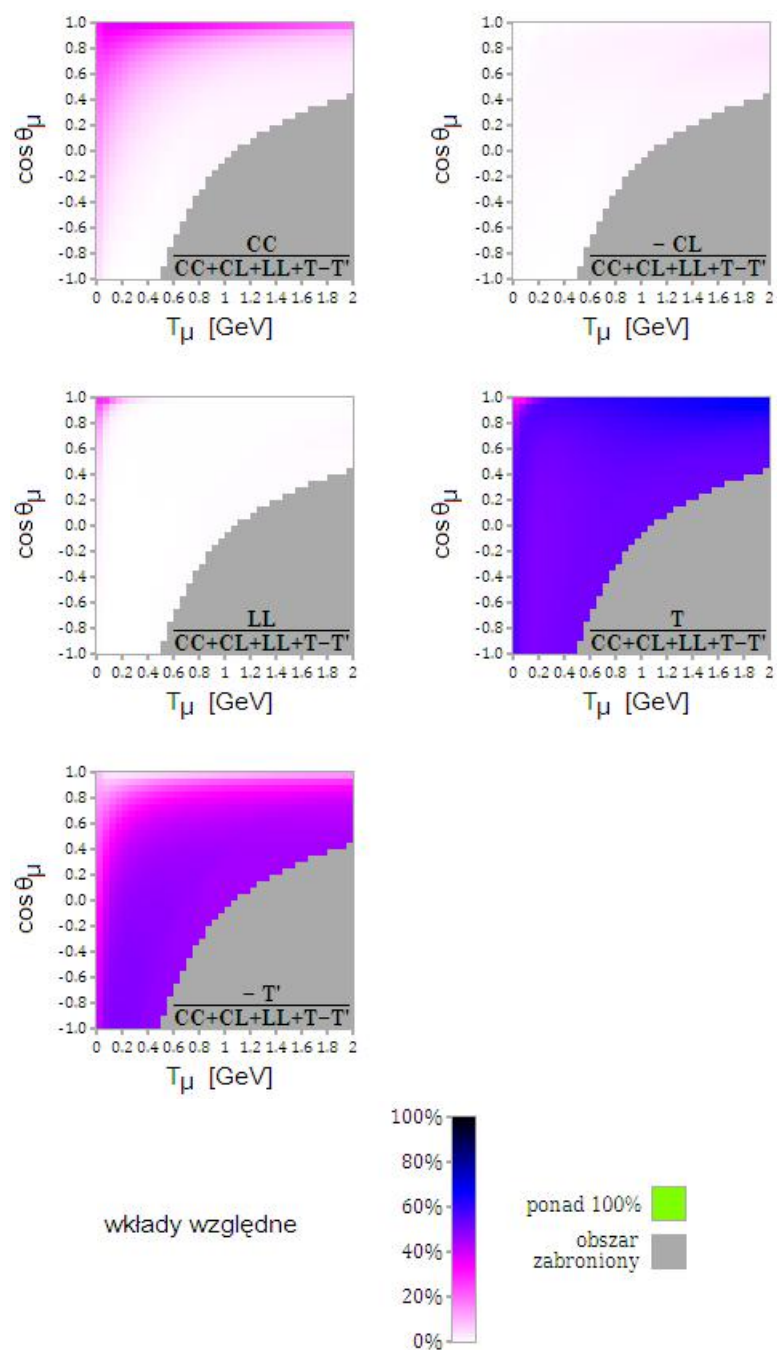
$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} \right|_{\cos \vartheta = \cos \vartheta_0} &= \frac{|\vec{p}'||\vec{q}|}{\sqrt{E_p^2 + |\vec{q}|^2 + 2|\vec{p}'||\vec{q}| \cos \vartheta}} \Big|_{\cos \vartheta = \cos \vartheta_0} \\ &= \frac{|\vec{p}'||\vec{q}|}{E_\nu + \tilde{E}_p - E_\mu} = \frac{|\vec{p}'||\vec{q}|}{E_{p'}}, \end{aligned}$$

przy czym równość $E_{p'} = \tilde{E}_p + E_\nu - E_\mu$ zachodzi dlatego, że zakładamy brak oddziaływań między nukleonami w stanie końcowym. Mamy więc

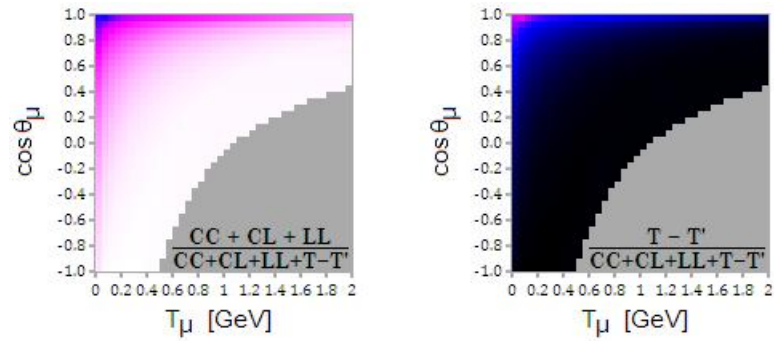
$$\delta(E_\mu + E_{p'} - E_\nu - \tilde{E}_p) = \frac{E_{p'}}{|\vec{p}'||\vec{q}|} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)$$

i możemy się pozbyć delty Diraca wykonując całkę po $\cos \vartheta$. Wówczas równanie (4.12) przyjmie postać

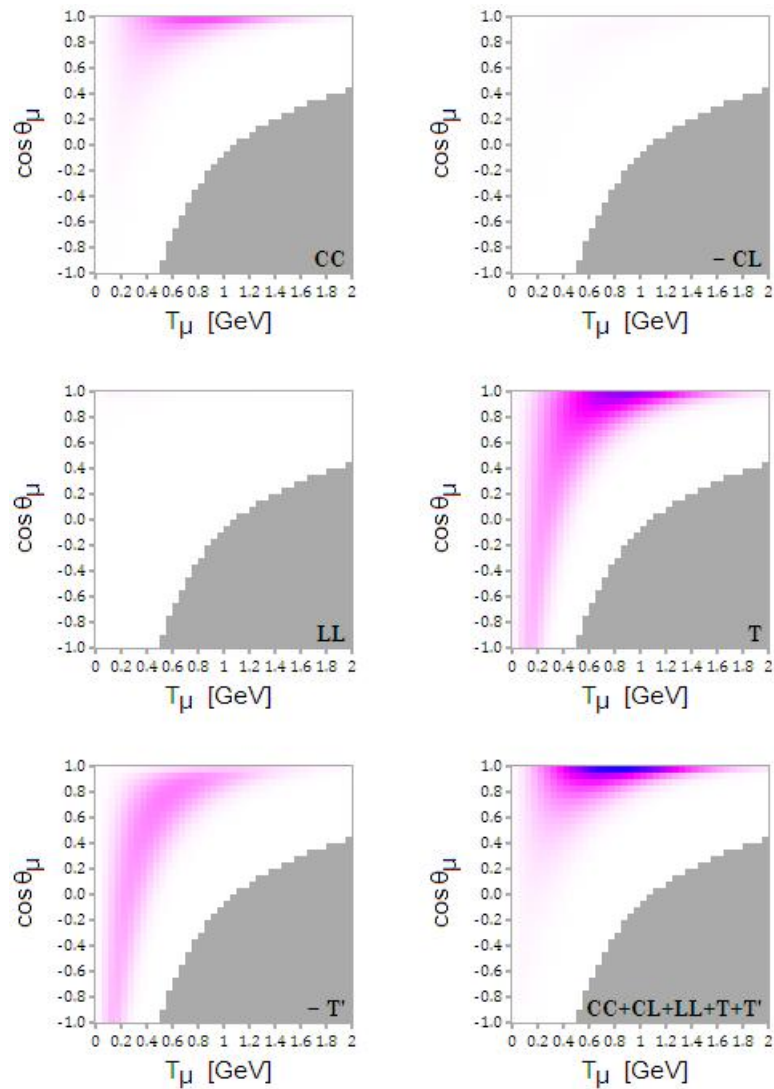
$$\left\langle \frac{d^2 \sigma^{\text{CC}}}{dT_\mu d \cos \theta_\mu} \right\rangle = \frac{3G_F^2 \cos^2 \theta_C}{16\pi^2 p_F^3} \frac{|\vec{k}'|}{E_\nu |\vec{q}|} \int_0^{p_F} d|\vec{p}'| \int_0^{2\pi} d\phi \frac{|\vec{p}'|}{\tilde{E}_p} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu},$$



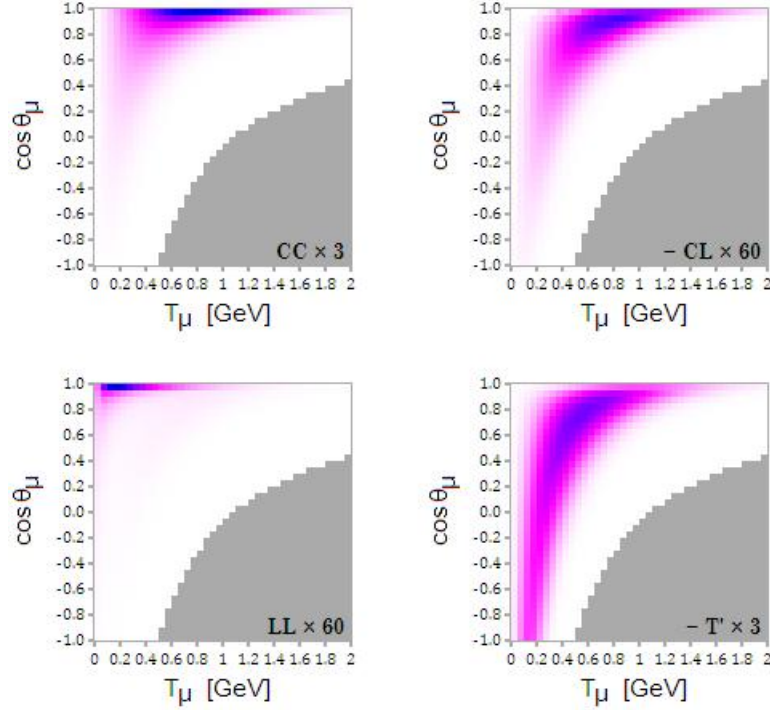
Rysunek 4.21: Wartości względne wkładów dla wiązki neutronów i gazu Fermiego.



Rysunek 4.22: Zsumowane 3 wkłady podłużne oraz 2 wkłady poprzeczne dla wiązki neutrin i gazu Fermiego.



Rysunek 4.23: Przekrój czynny dla wiązki antyneutrin i gazu Fermiego.



Rysunek 4.24: Przeskalowane wkłady dla wiązki antyneutrino i gazu Fermiego.

a $\cos \vartheta$ będzie dany równaniem (4.13). Zmienne T_μ i $\cos \theta_\mu$ pozostają niezależne dla ustalonej energii neutrina, co upraszcza obliczenia numeryczne. Wcześniej, gdy nukleon spoczywał, było to niemożliwe do uzyskania i odwoływaliśmy się do związku między obiema zmiennymi.

Potrzebne nam będą iloczyny skalarne:

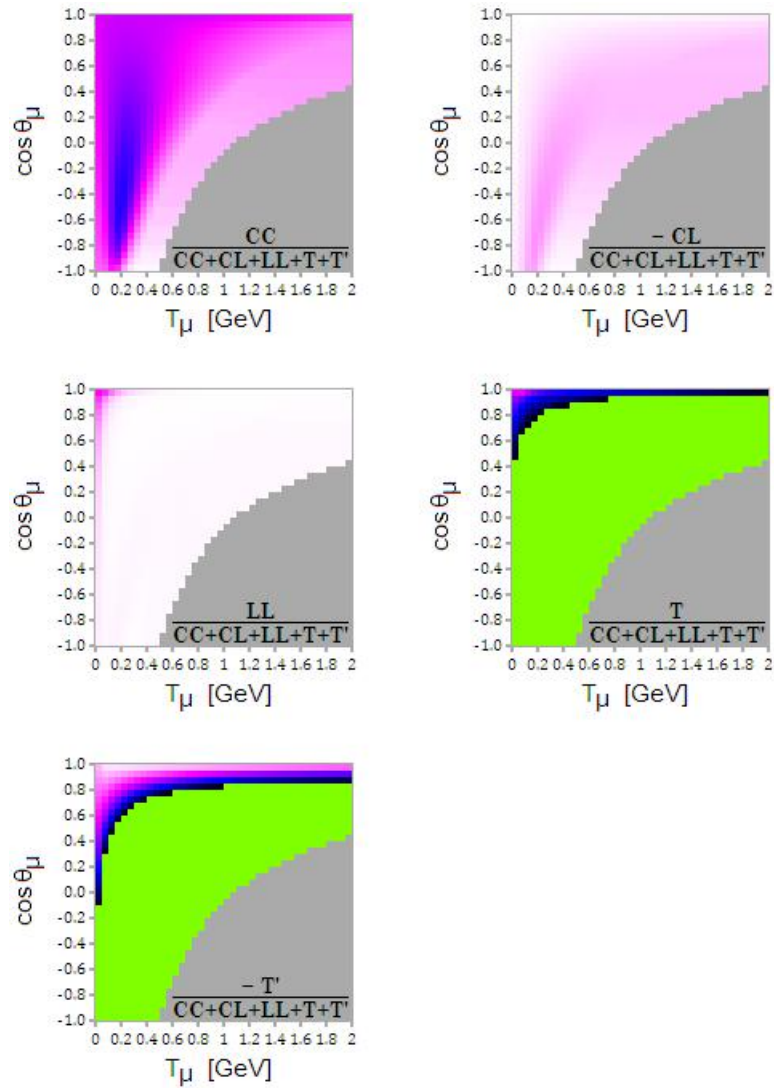
$$\begin{aligned} pk &= \tilde{E}_p E_\nu - \vec{p} \cdot \vec{k}, \\ pk' &= \tilde{E}_p E_\mu - \vec{p} \cdot \vec{k}'. \end{aligned}$$

Jeśli wektory \vec{k} i \vec{k}' leżą w płaszczyźnie (x, z) (tak jak zakładaliśmy poprzednio – Rysunek 4.1), to

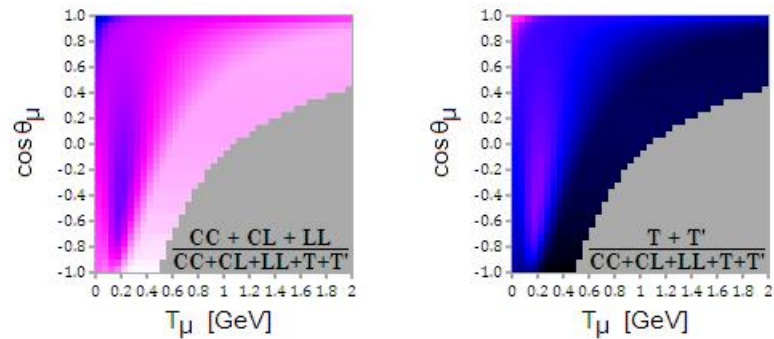
$$\begin{aligned} \vec{k} &= |\vec{k}| \left(\sin(\vec{q}, \vec{k}), 0, \cos(\vec{q}, \vec{k}) \right), \\ \vec{k}' = \vec{k} - \vec{q} &= \left(|\vec{k}| \sin(\vec{q}, \vec{k}), 0, |\vec{k}| \cos(\vec{q}, \vec{k}) - |\vec{q}| \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{k} &= |\vec{p}| E_\nu \left[\sin \vartheta \cos \phi \sin(\vec{q}, \vec{k}) + \cos \vartheta \cos(\vec{q}, \vec{k}) \right], \\ \vec{p} \cdot \vec{k}' &= |\vec{p}| \left[E_\nu \sin \vartheta \cos \phi \sin(\vec{q}, \vec{k}) + \cos \vartheta \left(E_\nu \cos(\vec{q}, \vec{k}) - |\vec{q}| \right) \right]. \end{aligned}$$



Rysunek 4.25: Wartości względne wkładów dla wiązki antyneutrin i gazu Fermiego.



Rysunek 4.26: Zsumowane 3 wkłady podłużne oraz 2 wkłady poprzeczne dla wiązki antyneutrin i gazu Fermiego.

Kosinus i sinus kąta między przekazem pędu a pędem neutrina wynoszą⁵

$$\begin{aligned}\cos(\vec{q}, \vec{k}) &= \frac{(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{k}}{|\vec{q}||\vec{k}|} = \frac{E_\nu - |\vec{k}'| \cos \theta_\mu}{|\vec{q}|}, \\ \sin(\vec{q}, \vec{k}) &\cong \sqrt{1 - \cos^2(\vec{q}, \vec{k})} = \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{q}|} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_\mu} \cong \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{q}|} \sin \theta_\mu.\end{aligned}$$

Iloczyny skalarne wyniosą zatem

$$\begin{aligned}pk &= \tilde{E}_p E_\nu - E_\nu |\vec{k}'| \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} \left[\sin \vartheta \cos \phi \sin \theta_\mu + \cos \vartheta \left(\frac{E_\nu}{|\vec{k}'|} - \cos \theta_\mu \right) \right], \\ pk' &= \tilde{E}_p E_\mu - E_\nu |\vec{k}'| \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} \left[\sin \vartheta \cos \phi \sin \theta_\mu + \cos \vartheta \left(\cos \theta_\mu - \frac{|\vec{k}'|}{E_\nu} \right) \right].\end{aligned}$$

Zależność od ϕ w funkcjach odpowiedzi nie występuje, a we współczynnikach kinematycznych pojawia się tylko w niewielu miejscach. Można jeszcze wykonać całkowanie (uśrednianie) po tym kącie w sposób ścisły. Wystarczy użyć równości $\langle \cos \phi \rangle_\phi = 0$ i $\langle \cos^2 \phi \rangle_\phi = \frac{1}{2}$, gdzie $\langle \dots \rangle_\phi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\phi$. W ten sposób dostaniemy następujące wyrazy:

$$\begin{aligned}\langle pk \rangle_\phi &= \tilde{E}_p E_\nu - E_\nu |\vec{p}| \cos \vartheta \frac{E_\nu - |\vec{k}'| \cos \theta_\mu}{|\vec{q}|}, \\ \langle pk' \rangle_\phi &= \tilde{E}_p E_\mu - |\vec{k}'| |\vec{p}| \cos \vartheta \frac{E_\nu \cos \theta_\mu - |\vec{k}'|}{|\vec{q}|}, \\ \langle (pk)(pk') \rangle_\phi &= \langle pk \rangle_\phi \langle pk' \rangle_\phi + \frac{1}{2} \left(E_\nu |\vec{k}'| \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} \sin \vartheta \sin \theta_\mu \right)^2.\end{aligned}$$

Całkowanie po module pędu zostanie już wykonane numerycznie.

Wyniki zostały przedstawione na rysunkach 4.19–4.26. Występowanie niezerowego pędu nukleonu $|\vec{p}|$ w pewnym stopniu zawęża kinematycznie zabroniony obszar. Warunek ma teraz postać (por. wzór (4.11))

$$T_\mu + m_\mu - \cos \theta_\mu \sqrt{T_\mu^2 + 2m_\mu T_\mu} > \max_{|\vec{p}|, \cos \vartheta} [E_p - |\vec{p}| \cos \vartheta] = E_F + p_F,$$

gdzie $E_F \equiv \sqrt{M_N^2 + p_F^2}$.

⁵Na ogół posługiwanie się relacją $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ wymaga ustalenia właściwego znaku pierwiastka. Jednak w naszym przypadku nie będzie to konieczne, bo wszystkie funkcje sinus występują razem ze zmienną $\cos \phi$, która daje tyle samo wkładów dodatnich, co ujemnych.

Rozdział 5

Wnioski

Główną obserwacją jest to, że funkcje CL i LL są zanedbywalnie małe w porównaniu z pozostałymi wkładami. Największy wpływ na kształt różniczkowego przekroju czynnego mają funkcje poprzeczne T i T', zwłaszcza dla niezbyt niskich wartości Q^2 . Dla antyneutrino (poza obszarem niskich przekazów pędu) te dwa wkłady prawie znoszą się wzajemnie.

Polaryzacje podłużne, zarówno $v_{LL}R_{LL}$ jak i suma $v_{CC}R_{CC} + v_{CL}R_{CL} + v_{LL}R_{LL}$, dominują dla małych energii mionu i małych kątów rozproszenia θ_μ . Jednak ten obszar odpowiada bardzo niskim energiom neutrino. Należy mieć na uwadze, że większość neutrino produkowanych do celów doświadczalnych (również w analizowanych przez nas wiązkach) ma energię mniejszą niż 1 GeV. Sprawia to, że przybliżenie impulsowe nie jest w pełni słuszne – efekty jądrowe stają się znaczące. Ponadto, stosowany przez nas efektywny opis rozpraszania nie uwzględnia zależności czynników postaci od energii padającej cząstki.

W przypadku antyneutrino istnieje jeszcze jeden obszar dominacji odpowiedzi podłużnych. Na wykresach 4.26 znajduje się on w okolicy $T_\mu \approx 200$ MeV i $-0.55 \lesssim \cos \theta_\mu \lesssim -0.25$. Dokładniejsza analiza doświadczalna tego obszaru być może powie nam coś na temat samych jądrowych funkcji odpowiedzi. Trzeba jednak pamiętać, że na uzyskane wyniki nałożona jest produkcja pionów, nie zawsze separowalna, oraz tzw. wzbudzenia 2p2h („2 cząstki-2 dziury”), też trudne do odseparowania.

Dodatek A

Konwencje

Stosujemy układ jednostek, w którym $\hbar = c = 1$. Pozwala to m.in. wyrażać masę i pęd w tych samych jednostkach co energię (wielokrotności eV). Zawsze $-e$ jest zracjonalizowanym ładunkiem elektronu, tak że stała struktury subtelnej jest równa $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$.

Łacińskie wskaźniki zwykle numerują trzy współrzędne przestrzenne, najczęściej oznaczane jako 1, 2, 3. Greckie wskaźniki numerują cztery współrzędne czasoprzestrzenne, oznaczane 0, 1, 2, 3, gdzie x^0 jest współrzędną czasową. Stosowana jest konwencja sumowania względem powtarzających się wskaźników.

Metryka czasoprzestrzeni („tensor metryczny”) $\eta^{\mu\nu}$ jest diagonalna, a jej elementy to $\eta^{00} = +1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1$. „Tensor Levi-Civita” $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ zdefiniowany jest jako wielkość całkowicie antysymetryczna z $\varepsilon^{0123} = +1$.

Czterowektory oznaczane są literami k , p itd., a trójwektory \vec{k} , \vec{p} itd. Długości trójwektorów to $|\vec{k}|$, $|\vec{p}|$ itd. Iloczyn czterowektorów oznaczany jest zwykle z pominięciem wskaźników, tzn. $pk \equiv p_\mu k^\mu = p^0 k^0 - \vec{p} \cdot \vec{k}$.

W całej pracy używaną reprezentacją macierzy gamma jest reprezentacja Pauliego-Diraca, w której te cztery macierze mają postać

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2, 3,$$

gdzie $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$ to macierze 2×2 , odpowiednio jednostkowa i zerowa, natomiast σ^k są macierzami Pauliego:

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Macierz γ_5 zdefiniowana jest następująco:

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Spełnia ona związek antyprzemienności $\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0$.

Na wszystkich diagramach Feynmana czas płynie od dołu do góry.

Rozwiązania równania Diraca $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ dla cząstek swobodnych opisane są spinorami

$$\begin{aligned}\psi_{\text{cząstka}}^s(p, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} u^s(p) e^{-ipx}, \\ \psi_{\text{antycząstka}}^s(p, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} v^s(p) e^{ipx},\end{aligned}$$

gdzie $E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$; m – masa cząstki. Dlatego elementy macierzowe prądów będą wyrażeniami typu

$$\langle p' | J^\mu | p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{mm'}{EE'}} \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p),$$

gdzie czynniki $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}}$ i $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m'}{E'}}$ pochodzą z normalizacji fal płaskich opisujących cząstki. Bispinory u i v spełniają

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)u(\vec{p}) = 0, \quad (p_\mu \gamma^\mu + m)v(\vec{p}) = 0$$

i mają postać

$$\begin{aligned}u^\pm(\vec{p}) &= \frac{N}{E+m} (p_\mu \gamma^\mu + m) \begin{bmatrix} \phi_\pm \\ 0 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \phi_\pm \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi_\pm \end{bmatrix}, \\ v^\pm(\vec{p}) &= \frac{N}{E+m} (m - p_\mu \gamma^\mu) \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_\pm \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_\pm \\ \chi_\pm \end{bmatrix},\end{aligned}$$

gdzie $N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$ oraz

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Następujące tożsamości przydadzą nam się do wyliczenia jawnych postaci tensorów leptonowego i hadronowego:

$$\sum_s u_\alpha^s(\vec{p}) \bar{u}_\beta^s(\vec{p}) = \frac{1}{2m} (p_\mu \gamma^\mu + m)_{\alpha\beta} \quad (\text{A.1})$$

dla cząstki, oraz

$$\sum_s v_\alpha^s(\vec{p}) \bar{v}_\beta^s(\vec{p}) = \frac{1}{2m} (p_\mu \gamma^\mu - m)_{\alpha\beta} \quad (\text{A.2})$$

dla antycząstki, przy czym s oznacza spin (sumowanie po dwóch możliwych orientacjach), a indeksy α i β oznaczają element macierzy.

Ślady iloczynów macierzy γ wynoszą (według Bjorkena, Drella [7])

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma^\delta = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\tau\delta} - \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\delta} + \eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\tau}), \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Tr}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Tr}[\text{nieparzysta liczba macierzy } \gamma] = 0. \quad (\text{A.6})$$

Dodatek B

Obliczenia pomocnicze

B.1 Rozpraszanie elektromagnetyczne

B.1.1 Tensor leptonowy

Podczas liczenia prawdopodobieństwa przejścia dla rozpraszania elektronu na dowolnej tarczy hadronowej, wprowadziliśmy tensor leptonowy

$$L_{\mu\nu} = m_e^2 \overline{\sum}_{\text{spiny}} \left(\bar{u}^{s'}(k') \gamma_\mu u^s(k) \right) \left(\bar{u}^{s'}(k') \gamma_\nu u^s(k) \right)^*,$$

gdzie $\overline{\sum}_{\text{spiny}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{spiny}}$ oznacza uśrednianie po orientacjach spinu cząstek początkowych s i sumowanie po końcowych s' (wiązka i tarcza są niespolaryzowane). W dalszych obliczeniach nie będziemy pisać indeksów spinowych. Korzystając z własności $(\bar{u}(p') \Gamma u(p))^* = \bar{u}(p) \bar{\Gamma} u(p')$, gdzie $\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$, możemy napisać

$$(\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k))^* = \bar{u}(k) \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 u(k') = \bar{u}(k) \gamma_\mu \gamma^0 \gamma^0 u(k') = \bar{u}(k) \gamma_\mu u(k').$$

Wprowadzimy teraz indeksy macierzowe i skorzystamy z tożsamości (A.1), dzięki której wykonamy sumowanie po spinach.

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= m_e^2 \frac{1}{2} \sum_{\text{spiny}} \bar{u}_\alpha(k') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(k) \bar{u}_\rho(k) (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma(k') \\ &= m_e^2 \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} \frac{1}{2m_e} (k^\tau \gamma_\tau + m_e)_{\beta\rho} \frac{1}{2m_e} (k'^\delta \gamma_\delta + m_e)_{\sigma\alpha} \\ &= \frac{1}{8} \text{Tr} [\gamma_\mu (k^\tau \gamma_\tau + m_e) \gamma_\nu (k'^\delta \gamma_\delta + m_e)]. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów na ślady macierzy γ na stronie 76 mamy

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr} [k^\tau k'^\delta \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\delta + m_e k^\tau \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\nu + m_e k'^\delta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\delta + m_e^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \\ &= \frac{1}{8} [4k^\tau k'^\delta (\eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\delta} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\tau\delta} + \eta_{\mu\delta} \eta_{\tau\nu}) + m_e^2 4\eta_{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu - \eta_{\mu\nu} k k' + k_\nu k'_\mu + \eta_{\mu\nu} m_e^2). \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $L_{\mu\nu}q^\mu = L_{\mu\nu}q^\nu = 0$, co jest skutkiem zachowania prądu elektromagnetycznego.

Interesuje nas rozpraszanie elektronów o energiach na tyle wysokich, że $m_e^2 \ll E^2$, dlatego będziemy pomijać masę elektronu. Ostateczną postacią tensora leptonowego będzie więc

$$L_{\mu\nu}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu} k k'). \quad (\text{B.1})$$

B.1.2 Tensor hadronowy

Rozpatrując rozpraszanie elektronu na tarczy hadronowej wprowadziliśmy tensor hadronowy. Dla elastycznego rozpraszania na nukleonie swobodnym miał on postać

$$H^{\mu\nu} = M^2 \sum_{\text{spiny}} \overline{(\bar{u}^{\lambda'}(p') \Gamma^\mu u^\lambda(p))} (\bar{u}^{\lambda'}(p') \Gamma^\nu u^\lambda(p))^*,$$

gdzie przez λ i λ' oznaczono orientacje spinów nukleonu. Operator elektromagnetyczny Γ^μ zawierał dwa (nietrywialne) czynniki postaci:

$$\langle p' | J_{\text{em}}^\mu | p \rangle \sim \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[F_1 \gamma^\mu + \frac{i}{2M} F_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p).$$

W rachunkach użyjemy jednak innej, wygodniejszej postaci:

$$\bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[(F_1 + F_2) \gamma^\mu - \frac{(p + p')^\mu}{2M} F_2 \right] u(p).$$

Równoważność obu postaci można pokazać korzystając z rozkładu Gordona (2.14) (przy uwzględnieniu $M' = M$). Postępując analogicznie jak w przypadku tensora leptonowego, sumujemy po spinach i zapisujemy tensor w postaci śladu:

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Tr} [\Gamma^\mu (p_\alpha \gamma^\alpha + M) \Gamma^\nu (p'_\alpha \gamma^\alpha + M)].$$

Następnie podstawiamy wyrażenie na Γ^μ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} = & \frac{1}{8} \text{Tr} \left[(F_1 + F_2)^2 \gamma^\mu (p_\alpha \gamma^\alpha + M) \gamma^\nu (p'_\alpha \gamma^\alpha + M) + \right. \\ & + \frac{(p + p')^\mu (p + p')^\nu}{4M^2} F_2^2 (p_\alpha \gamma^\alpha + M) (p'_\alpha \gamma^\alpha + M) - \\ & - (F_1 + F_2) \frac{(p + p')^\nu}{2M} F_2 \gamma^\mu (p_\alpha \gamma^\alpha + M) (p'_\alpha \gamma^\alpha + M) - \\ & \left. - (F_1 + F_2) \frac{(p + p')^\mu}{2M} F_2 (p_\alpha \gamma^\alpha + M) \gamma^\nu (p'_\alpha \gamma^\alpha + M) \right]. \end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości na stronie 76 liczymy ślady poszczególnych wyrazów:

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2(p^\mu p'^\nu - \eta^{\mu\nu} pp' + p^\nu p'^\mu + \eta^{\mu\nu} M^2) + \\
&+ \frac{1}{8} \frac{(p + p')^\mu (p + p')^\nu}{4M^2} F_2^2 (4M^2 + 4pp') - \\
&- \frac{1}{8} (F_1 + F_2) \frac{(p + p')^\nu}{2M} F_2 \text{Tr} [\gamma^\mu p_\alpha \gamma^\alpha M + \gamma^\mu M p'_\alpha \gamma^\alpha] - \\
&- \frac{1}{8} (F_1 + F_2) \frac{(p + p')^\mu}{2M} F_2 \text{Tr} [p_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\nu M + M \gamma^\nu p'_\alpha \gamma^\alpha].
\end{aligned}$$

Obliczmy ślad z trzeciego wyrazu powyższego wyrażenia:

$$\text{Tr} [\gamma^\mu p_\alpha \gamma^\alpha M + \gamma^\mu M p'_\alpha \gamma^\alpha] = 4p_\alpha M \eta^{\mu\alpha} + 4M p'_\alpha \eta^{\mu\alpha} = 4M(p + p')^\mu.$$

Jest on mnożony przez $(p + p')^\nu$. Natomiast ostatni wyraz w wyrażeniu na $H^{\mu\nu}$ różni się od trzeciego tylko zamianą indeksów ($\mu \leftrightarrow \nu$), dlatego oba wyrazy są równe i dadzą się zapisać jako jeden:

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - \eta^{\mu\nu} pp' + \eta^{\mu\nu} M^2) + \\
&+ \frac{1}{8} F_2^2 (p + p')^\mu (p + p')^\nu \left(1 + \frac{pp'}{M^2}\right) - \\
&- \frac{1}{2} (F_1 + F_2) F_2 (p + p')^\mu (p + p')^\nu.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu $p'^\mu = p^\mu + q^\mu$ oraz $p'^2 = M^2$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2(2p^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - \eta^{\mu\nu} pq) + \\
&+ \frac{1}{8} F_2^2 \left(2 + \frac{pq}{M^2}\right) (4p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu + 2p^\mu q^\nu + 2p^\nu q^\mu) - \\
&- \frac{1}{2} (F_1 + F_2) F_2 (4p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu + 2p^\mu q^\nu + 2p^\nu q^\mu).
\end{aligned}$$

Powyższy tensor można też zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
H_{\text{el}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 (F_1 + F_2)^2 + \\
&+ \left(p^\mu + \frac{1}{2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{1}{2} q^\nu \right) \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right).
\end{aligned}$$

Równość obu postaci można pokazać sprawdzając osobno wyrazy przy F_1^2 , przy F_2^2 i przy $F_1 F_2$. Z powyższego zapisu widać, że $q_\mu H^{\mu\nu} = q_\nu H^{\mu\nu} = 0$, mamy bowiem $q_\mu \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) = q^\nu - \frac{q^2 q^\nu}{q^2} = 0$ oraz

$$q_\mu \left(p^\mu + \frac{1}{2} q^\mu \right) = qp + \frac{1}{2} q^2 = (p' - p)p + \frac{1}{2} (p' - p)^2 = p'p - M^2 + \frac{1}{2} (2M^2 - 2p'p) = 0.$$

B.1.3 Zwężenie tensorów

Interesuje nas zwężenie tensorów $L_{\mu\nu}$ i $H^{\mu\nu}$. Wprowadzamy

$$H_{\text{eff}}^{\mu\nu} \equiv H^{\mu\nu} - \text{człony z } q^\mu, q^\nu,$$

wtedy $L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}H_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ ze względu na własność $L_{\mu\nu}q^\mu = L_{\mu\nu}q^\nu = 0$. Tensor leptonowy dany jest równaniem (B.1), natomiast zdefiniowany przez nas efektywny tensor hadronowy ma postać

$$H_{\text{eff}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(F_1 + F_2)^2 \eta^{\mu\nu} q^2 + p^\mu p^\nu \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right).$$

Licząc zwężenie będziemy zakładać, że tarcza spoczywa: $p^\mu = (M, \vec{0})$, i skorzystamy ze związków

$$q^2 = (k - k')^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' \approx -2kk' \Rightarrow kk' = -\frac{1}{2}q^2,$$

$$q^2 = -2(EE' - \vec{k}\vec{k}') \approx -2(EE' - EE' \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0,$$

$$pk = EM, \quad pk' = E'M,$$

gdzie E, E' to energie elektronu, a θ to kąt rozproszenia elektronu.

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} &= L_{\mu\nu}H_{\text{eff}}^{\mu\nu} = \frac{1}{8}(F_1 + F_2)^2 q^2 (kk' + kk' - 4kk') + \\ &+ \frac{1}{2} \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) ((pk)(pk') + (pk')(pk) - p^2(kk')) = \\ &= \frac{1}{8}(F_1 + F_2)^2 q^4 + \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) \left((pk)(pk') + \frac{1}{4}M^2 q^2 \right) = \\ &= \frac{q^4}{8}(F_1 + F_2)^2 + \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) M^2 \left(EE' + \frac{q^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias czynnik M^2EE' otrzymujemy ostatecznie

$$L_{\mu\nu}H_{\text{el}}^{\mu\nu} = M^2EE' \left\{ \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - (F_1 + F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Oddziaływanie słabe

B.2.1 Tensor leptonowy

Licząc prawdopodobieństwo przejścia w oddziaływaniu słabym typu *charged current*, wprowadziliśmy tensor leptonowy:

$$L_{\mu\nu}^{\text{CC}} = m_\nu m_l \sum_{\lambda, \lambda'} \left(\bar{u}_1^{\lambda'}(k') \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu^\lambda(k) \right) \left(\bar{u}_1^{\lambda'}(k') \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu^\lambda(k) \right)^*. \quad (\text{B.3})$$

Wprowadziliśmy indeksy λ, λ' oznaczające spiny neutrina i leptonu naładowanego. Korzystając z $(\gamma_0)^2 = \mathbf{1}$ i faktu, że transpozycja dowolnej liczby jest równa tej liczbie, możemy pozbyć się sprzężenia zespolonego w ostatnim czynniku:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_l \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu)^* &= \left(u_l^\dagger \gamma_0 \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_0 \gamma_0 u_\nu \right)^* = \\ &= \left(u_l^\dagger \gamma_0 \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_0 \gamma_0 u_\nu \right)^\dagger = \\ &= (\gamma_0 u_\nu)^\dagger (\gamma_0 \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_0)^\dagger u_l. \end{aligned}$$

Macierze γ_0, γ_5 są hermitowskie oraz $\gamma_0 \gamma_\nu = \gamma_\nu^\dagger \gamma_0$:

$$(\gamma_0 \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_0)^\dagger = \gamma_0^\dagger (\mathbf{1} - \gamma_5)^\dagger \gamma_\nu^\dagger \gamma_0^\dagger = \gamma_0 (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_\nu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_0 \gamma_\nu = \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5),$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z antyprzemienności macierzy γ o różnych indeksach. Mamy więc $(\bar{u}_l \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_\nu)^* = \bar{u}_\nu \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_l$ i tensor leptonowy zapiszemy jako

$$L_{\mu\nu} = m_\nu m_l \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}_1^{\lambda'}(k')_\alpha (\gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5))_{\alpha\beta} u_\nu^\lambda(k)_\beta \bar{u}_\nu^\lambda(k)_\gamma (\gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5))_{\gamma\delta} u_1^{\lambda'}(k')_\delta,$$

przy czym wprowadziliśmy jawny zapis wskaźników macierzowych (z sumowaniem). Możemy teraz przetrzasnąć czynnik $\bar{u}_1^{\lambda'}(k')_\alpha$ na koniec oraz skorzystać z tożsamości (A.1) wykonując sumę po spinach obu cząstek. Dostaniemy

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= m_\nu m_l \frac{1}{2m_\nu} \frac{1}{2m_l} (\gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5))_{\alpha\beta} (k_\rho \gamma^\rho + m_\nu)_{\beta\gamma} (\gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5))_{\gamma\delta} (k'_\sigma \gamma^\sigma + m_l)_{\delta\alpha} \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) (k_\rho \gamma^\rho + m_\nu) \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) (k'_\sigma \gamma^\sigma + m_l)]. \end{aligned}$$

Ślad nieparzystej liczby macierzy γ^μ jest równy zero, więc pod śladem zostaną tylko następujące wyrazy (γ_5 ma parzystą liczbę macierzy γ^μ):

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) k_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) k'_\sigma \gamma^\sigma + m_\nu m_l \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5)] \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\mu k_\rho \gamma^\rho \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5)^2 k'_\sigma \gamma^\sigma + m_\nu m_l \gamma_\mu \gamma_\nu (\mathbf{1} + \gamma_5) (\mathbf{1} - \gamma_5)]. \end{aligned}$$

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} - \gamma_5)^2 &= \mathbf{1}^2 + (\gamma_5)^2 - \gamma_5 - \gamma_5 = 2(\mathbf{1} - \gamma_5), \\ (\mathbf{1} + \gamma_5)(\mathbf{1} - \gamma_5) &= \mathbf{1}^2 - (\gamma_5)^2 - \gamma_5 + \gamma_5 = \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Zatem pod śladem zostaje tylko pierwszy człon:

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}k_\rho k'_\sigma \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) \gamma^\sigma] \\ &= \frac{1}{2}k^\rho k'^\sigma \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma] + \frac{1}{2}k^\rho k'^\sigma \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_5].\end{aligned}$$

Oba ślady liczymy z tożsamości podanych na stronie 76:

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu} &= 2k^\rho k'^\sigma (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu}) + 2ik^\rho k'^\sigma \varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma} \\ &= 2(k_\mu k'_\nu - \eta_{\mu\nu} k k' + k_\nu k'_\mu + i\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma} k^\rho k'^\sigma).\end{aligned}$$

Po uporządkowaniu indeksów w epsilon otrzymujemy

$$L_{\mu\nu}^{\text{CC}} = 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu} k k' - i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma). \quad (\text{B.4})$$

Widzimy, że w tym tensorze oprócz części symetrycznej występuje część antysymetryczna, czego nie było w odpowiednim tensorze dla prądu elektromagnetycznego.

Można tensor $L_{\mu\nu}$ wyrazić przez składowe czteropędu neutrina k i przekazu czteropędu $q = k - k'$:

$$m_\nu^2 \ll m_l^2 \Rightarrow -kk' \approx \frac{1}{2}m_\nu^2 - kk' = \frac{1}{2}(k^2 - 2kk' + k'^2 - k'^2) = \frac{1}{2}(q^2 - m_l^2)$$

W ten sposób dostaniemy

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu}^{\text{CC}} &= 2(k_\mu k_\nu - k_\mu q_\nu + k_\nu k_\mu - k_\nu q_\mu - \eta_{\mu\nu} k k' - i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma) \\ &= 2 \left(2k_\mu k_\nu - (k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(q^2 - m_l^2) + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho q^\sigma \right).\end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.2.2 Tensor hadronowy

Masy protonu i neutronu różnią się nieznacznie, więc iloczyn MM' będziemy przybliżać przez M_N^2 , gdzie $M_N = \frac{1}{2}(M + M')$ to średnia masa nukleonu. Zatem, wychodząc od definicji tensora $H^{\mu\nu}$ dla oddziaływania typu CC mamy

$$H_{\text{CC}}^{\mu\nu} = M_N^2 \overline{\sum_{s,s'}} \left(\bar{u}_p^{s'}(p') \Gamma^\mu u_n^s(p) \right) \left(\bar{u}_p^{s'}(p') \Gamma^\nu u_n^s(p) \right)^*.$$

s, s' oznaczają spiny neutronu i protonu.

Pełna postać operatora przejścia neutronu w proton to

$$\Gamma^\mu = g_v \gamma^\mu + i \frac{g_m}{2M_N} \sigma^{\mu\nu} q_\nu + g_a \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{g_p}{2M_N} q^\mu \gamma_5,$$

gdzie g_v , g_m , g_a , g_p są funkcjami q^2 . Podobnie jak to robiliśmy w przypadku operatora elektromagnetycznego, znajdziemy teraz równoważną, ale wygodniejszą w rachunkach postać operatora Γ^μ , korzystając z rozkładu Gordona. Równanie (2.14) zapiszemy dla $M \approx M' \approx M_N$ i $p' - p = q$ jako

$$\bar{u}(p')[2M_N \gamma^\mu - (p + p')^\mu]u(p) = \bar{u}(p')[i\sigma^{\mu\nu} q_\nu]u(p).$$

Możemy więc w operatorze Γ^μ zastąpić $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ przez $2M_N \gamma^\mu - (p + p')^\mu$. Otrzymamy w ten sposób wyrażenie nie zawierające macierzy $\sigma^{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\mu = (g_v + g_m) \gamma^\mu - \frac{g_m}{2M_N} (p + p')^\mu + g_a \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{g_p}{2M_N} q^\mu \gamma_5.$$

Obliczmy sprzężenie zespolone w wyrażeniu na tensor hadronowy:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_p \Gamma^\nu u_n)^* &= (\bar{u}_p \Gamma^\nu u_n)^\dagger = u_n^\dagger \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0^\dagger u_p = \\ &= u_n^\dagger \gamma_0 \Gamma^\nu \gamma_0 u_p = \bar{u}_n \overline{\Gamma^\nu} u_p, \end{aligned}$$

gdzie $\overline{\Gamma^\nu} \equiv \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0$. Wprowadźmy do wyrażenia na tensor hadronowy jawne wskaźniki macierzowe i wysumujmy po spinach korzystając z tożsamości (A.1):

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= M_N^2 \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}_p^{s'}(p')_\alpha (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_n^s(p)_\beta \bar{u}_n^s(p)_\gamma (\overline{\Gamma^\nu})_{\gamma\delta} u_p^{s'}(p')_\delta \\ &= M_N^2 \frac{1}{2} \frac{1}{2M_N} \frac{1}{2M_N} (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} (p_\rho \gamma^\rho + M_N)_{\beta\gamma} (\overline{\Gamma^\nu})_{\gamma\delta} (p'_\sigma \gamma^\sigma + M_N)_{\delta\alpha} \\ &= \frac{1}{8} \text{Tr} [\Gamma^\mu (p_\rho \gamma^\rho + M_N) \overline{\Gamma^\nu} (p'_\sigma \gamma^\sigma + M_N)]. \end{aligned}$$

Musimy obliczyć sprzężenie dirakowskie operatora Γ^ν . Zacznijmy od sprzężenia hermitowskiego:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu\dagger} &= \gamma^{\nu\dagger} (g_v + g_m)^* - (p + p')^\nu \frac{g_m^*}{2M_N} + \gamma_5^\dagger \gamma^{\nu\dagger} g_a^* + \gamma_5^\dagger q^\nu \frac{g_p^*}{2M_N} \\ &= \gamma_0 \gamma^\nu \gamma_0 (g_v + g_m)^* - (p + p')^\nu \frac{g_m^*}{2M_N} + \gamma_5 \gamma_0 \gamma^\nu \gamma_0 g_a^* + \gamma_5 q^\nu \frac{g_p^*}{2M_N}. \end{aligned}$$

W trzecim wyrazie możemy przekomutować macierz γ_5 dwa razy w prawą stronę i zapisać go jako $\gamma_0 \gamma^\nu \gamma_5 \gamma_0 g_a^*$. Następnie mnożymy całe wyrażenie obustronnie przez γ_0 :

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma^\nu} = \gamma_0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma_0 &= \gamma^\nu (g_v + g_m)^* - \gamma_0 \gamma_0 (p + p')^\nu \frac{g_m^*}{2M_N} + \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* + \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 q^\nu \frac{g_p^*}{2M_N} \\ &= \gamma^\nu ((g_v + g_m)^* + \gamma_5 g_a^*) - \gamma_5 q^\nu \frac{g_p^*}{2M_N} - (p + p')^\nu \frac{g_m^*}{2M_N}. \end{aligned}$$

Dla uproszczenia wzorów oznaczmy

$$\begin{aligned} (g_v + g_m) + \gamma_5 g_a &\equiv a \quad , \quad \gamma_5 q^\mu g_p - (p + p')^\mu g_m \equiv b^\mu, \\ (g_v + g_m)^* + \gamma_5 g_a^* &\equiv c \quad , \quad \gamma_5 q^\nu g_p^* + (p + p')^\nu g_m^* \equiv d^\nu. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \gamma^\mu a + \frac{1}{2M_N} b^\mu, \\ \overline{\Gamma}^\nu &= \gamma^\nu c - \frac{1}{2M_N} d^\nu \end{aligned}$$

oraz

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Tr} \left[\left(\gamma^\mu a + \frac{1}{2M_N} b^\mu \right) (p_\rho \gamma^\rho + M_N) \left(\gamma^\nu c - \frac{1}{2M_N} d^\nu \right) (p'_\sigma \gamma^\sigma + M_N) \right].$$

Przejdźmy teraz do wyliczenia śladu w wyrażeniu na tensor $H^{\mu\nu}$. Wymnażając wszystko w powyższym wzorze dostalibyśmy sumę 16 wyrazów. Wiemy, że wszystkie wyrazy w a , b^μ , c , d^ν składają się z parzystej liczby macierzy γ^μ (γ^ν). Widzimy zatem, że w każdym z okrągłych nawiasów jeden wyraz składa się z nieparzystej liczby macierzy γ , a drugi wyraz – z parzystej. Dlatego, po wymnożeniu, osiem wyrazów będzie miało nieparzystą liczbę macierzy γ i nie dadzą one wkładu do śladu. Od razu je pominiemy i napiszemy tylko pozostałych osiem wyrazów z *parzystą* liczbą macierzy γ :

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr} \left[\gamma^\mu a p_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu c p'_\sigma \gamma^\sigma - \gamma^\mu a p_\rho \gamma^\rho \frac{1}{2M_N} d^\nu M_N + \right. \\ &+ \gamma^\mu a M_N \gamma^\nu c M_N - \gamma^\mu a M_N \frac{1}{2M_N} d^\nu p'_\sigma \gamma^\sigma + \\ &+ \frac{1}{2M_N} b^\mu p_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu c M_N - \frac{1}{2M_N} b^\mu p_\rho \gamma^\rho \frac{1}{2M_N} d^\nu p'_\sigma \gamma^\sigma + \\ &+ \left. \frac{1}{2M_N} b^\mu M_N \gamma^\nu c p'_\sigma \gamma^\sigma - \frac{1}{2M_N} b^\mu M_N \frac{1}{2M_N} d^\nu M_N \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left\{ p_\rho p'_\sigma \text{Tr} \gamma^\mu a \gamma^\rho \gamma^\nu c \gamma^\sigma - \frac{1}{2} p_\rho \text{Tr} \gamma^\mu a \gamma^\rho d^\nu + \right. \\ &+ M_N^2 \text{Tr} \gamma^\mu a \gamma^\nu c - \frac{1}{2} p'_\sigma \text{Tr} \gamma^\mu a d^\nu \gamma^\sigma + \\ &+ \frac{1}{2} p_\rho \text{Tr} b^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu c - \frac{1}{4M_N^2} p_\rho p'_\sigma \text{Tr} b^\mu \gamma^\rho d^\nu \gamma^\sigma + \\ &+ \left. \frac{1}{2} p'_\sigma \text{Tr} b^\mu \gamma^\nu c \gamma^\sigma - \frac{1}{4} \text{Tr} b^\mu d^\nu \right\}. \end{aligned}$$

Wyliczmy poszczególne ślady:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} b^\mu d^\nu &= \text{Tr} [(\gamma_5)^2 q^\mu q^\nu g_p g_p^* - (p+p')^\mu (p+p')^\nu g_m g_m^* + \\
&+ \gamma_5 (q^\mu g_p (p+p')^\nu g_m^* - (p+p')^\mu g_m q^\nu g_p^*)] = \\
&= 4 (q^\mu q^\nu |g_p|^2 - (p+p')^\mu (p+p')^\nu |g_m|^2),
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że macierz γ_5 jest bezśladowa. Zanim policzymy kolejne ślady zauważmy, że wyrazy typu $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5$ są bezśladowe. Jest tak dlatego, że dla $\mu = \nu$ zachodzi $\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 = \eta_{\mu\mu} \text{Tr} \gamma_5 = 0$, a dla $\mu \neq \nu$ można takie wyrażenie zredukować do iloczynu dwóch macierzy: $i\gamma^\rho \gamma^\sigma$, gdzie $\rho \neq \sigma$, i zachodzi wtedy $\text{Tr} \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4\eta_{\rho\sigma} = 0$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \gamma^\mu a \gamma^\rho d^\nu &= \text{Tr} [\gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma^\rho \gamma_5 q^\nu g_p^* + \gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma^\rho (p+p')^\nu g_m^* + \\
&+ \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma^\rho \gamma_5 q^\nu g_p^* + \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma^\rho (p+p')^\nu g_m^*] = \\
&= (g_v + g_m) (p+p')^\nu g_m^* \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\rho + g_a g_p^* q^\nu \text{Tr} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\rho \gamma_5 = \\
&= 4(g_v + g_m) g_m^* (p+p')^\nu \eta^{\mu\rho} - 4g_a g_p^* q^\nu \eta^{\mu\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \gamma^\mu a \gamma^\nu c &= \text{Tr} [\gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma^\nu (g_v + g_m)^* + \gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* + \\
&+ \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma^\nu (g_v + g_m)^* + \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma^\nu \gamma_5 g_a^*] = \\
&= (g_v + g_m) (g_v + g_m)^* \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_a g_a^* \text{Tr} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5 = \\
&= 4 |g_v + g_m|^2 \eta^{\mu\nu} - 4 |g_a|^2 \eta^{\mu\nu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \gamma^\mu a d^\nu \gamma^\sigma &= \text{Tr} [\gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma_5 q^\nu g_p^* \gamma^\sigma + \gamma^\mu (g_v + g_m) (p+p')^\nu g_m^* \gamma^\sigma + \\
&+ \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma_5 q^\nu g_p^* \gamma^\sigma + \gamma^\mu \gamma_5 g_a (p+p')^\nu g_m^* \gamma^\sigma] = \\
&= (g_v + g_m) (p+p')^\nu g_m^* \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\sigma + g_a g_p^* q^\nu \text{Tr} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma_5 \gamma^\sigma = \\
&= 4(g_v + g_m) g_m^* (p+p')^\nu \eta^{\mu\sigma} + 4g_a g_p^* q^\nu \eta^{\mu\sigma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} b^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu c &= \text{Tr} [\gamma_5 q^\mu g_p \gamma^\rho \gamma^\nu (g_v + g_m)^* + \gamma_5 q^\mu g_p \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* - \\
&- (p+p')^\mu g_m \gamma^\rho \gamma^\nu (g_v + g_m)^* - (p+p')^\mu g_m \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_5 g_a^*] = \\
&= g_p g_a^* q^\mu \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_5 - (p+p')^\mu g_m (g_v + g_m)^* \text{Tr} \gamma^\rho \gamma^\nu = \\
&= 4g_p g_a^* q^\mu \eta^{\rho\nu} - 4g_m (g_v + g_m)^* (p+p')^\mu \eta^{\rho\nu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} b^\mu \gamma^\rho d^\nu \gamma^\sigma &= \text{Tr} [\gamma_5 q^\mu g_p \gamma^\rho \gamma_5 q^\nu g_p^* \gamma^\sigma + \gamma_5 q^\mu g_p \gamma^\rho (p+p')^\nu g_m^* \gamma^\sigma - \\
&- (p+p')^\mu g_m \gamma^\rho \gamma_5 q^\nu g_p^* \gamma^\sigma - (p+p')^\mu g_m \gamma^\rho (p+p')^\nu g_m^* \gamma^\sigma] = \\
&= g_p g_p^* q^\mu q^\nu \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\rho \gamma_5 \gamma^\sigma - (p+p')^\mu (p+p')^\nu g_m g_m^* \text{Tr} \gamma^\rho \gamma^\sigma = \\
&= -4 |g_p|^2 q^\mu q^\nu \eta^{\rho\sigma} - 4 |g_m|^2 (p+p')^\mu (p+p')^\nu \eta^{\rho\sigma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} b^\mu \gamma^\nu c \gamma^\sigma &= \text{Tr} [\gamma_5 q^\mu g_p \gamma^\nu (g_v + g_m)^* \gamma^\sigma + \gamma_5 q^\mu g_p \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* \gamma^\sigma - \\
&- (p + p')^\mu g_m \gamma^\nu (g_v + g_m)^* \gamma^\sigma - (p + p')^\mu g_m \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* \gamma^\sigma] = \\
&= g_p g_a^* q^\mu \text{Tr} \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\sigma - (p + p')^\mu g_m (g_v + g_m)^* \text{Tr} \gamma^\nu \gamma^\sigma = \\
&= -4 g_p g_a^* q^\mu \eta^{\nu\sigma} - 4 g_m (g_v + g_m)^* (p + p')^\mu \eta^{\nu\sigma}.
\end{aligned}$$

Pozostał nam jeszcze jeden ślad do wyliczenia:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \gamma^\mu a \gamma^\rho \gamma^\nu c \gamma^\sigma &= \text{Tr} [\gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma^\rho \gamma^\nu (g_v + g_m)^* \gamma^\sigma + \gamma^\mu (g_v + g_m) \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* \gamma^\sigma + \\
&+ \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma^\rho \gamma^\nu (g_v + g_m)^* \gamma^\sigma + \gamma^\mu \gamma_5 g_a \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_5 g_a^* \gamma^\sigma] = \\
&= 4 |g_v + g_m|^2 (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu}) - \\
&- 4i (g_v + g_m) g_a^* \varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma} - 4i g_a (g_v + g_m)^* \varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma} + \\
&+ 4 |g_a|^2 (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu}) = \\
&= 4 (|g_v + g_m|^2 + |g_a|^2) (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu}) + \\
&+ 8i \text{Re} ((g_v + g_m) g_a^*) \varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma}.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu wszystkich śladów do tensora hadronowego i wykonaniu pewnych przekształceń algebraicznych otrzymamy

$$\begin{aligned}
H_{\text{CC}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \{ 4 |g_v + g_m|^2 \eta^{\mu\nu} (M_N^2 - pp') - 4 |g_a|^2 \eta^{\mu\nu} (M_N^2 + pp') - \\
&- 2(p' - p)^\mu q^\nu g_a g_p^* - 2(p' - p)^\nu q^\mu g_a^* g_p + \\
&+ |g_m|^2 (p + p')^\mu (p + p')^\nu \left(1 + \frac{pp'}{M_N^2} \right) - |g_p|^2 q^\mu q^\nu \left(1 - \frac{pp'}{M_N^2} \right) - \\
&- 4 \text{Re} ((g_v + g_m) g_m^*) (p + p')^\mu (p + p')^\nu + \\
&+ 4 (|g_v + g_m|^2 + |g_a|^2) (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) + \\
&+ 8i \text{Re} ((g_v + g_m) g_a^*) p_\rho p'_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \}.
\end{aligned}$$

Wstawmy $p' = p + q$ oraz $pp' = M_N^2 - \frac{1}{2}q^2$, żeby pozbyć się pędu protonu:

$$\begin{aligned}
H_{\text{CC}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \{ 2 |g_v + g_m|^2 \eta^{\mu\nu} q^2 - 2 |g_a|^2 \eta^{\mu\nu} (4M_N^2 - q^2) - \\
&- 2q^\mu q^\nu g_a g_p^* - 2q^\mu q^\nu g_a^* g_p + \\
&+ |g_m|^2 (4p^\mu p^\nu + 2p^\mu q^\nu + 2p^\nu q^\mu + q^\mu q^\nu) \left(2 - \frac{q^2}{2M_N^2} \right) - |g_p|^2 q^\mu q^\nu \frac{q^2}{2M_N^2} - \\
&- 4 \text{Re} ((g_v + g_m) g_m^*) (4p^\mu p^\nu + 2p^\mu q^\nu + 2p^\nu q^\mu + q^\mu q^\nu) + \\
&+ 4 (|g_v + g_m|^2 + |g_a|^2) (2p^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) + \\
&+ 8i \text{Re} ((g_v + g_m) g_a^*) p_\rho q_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \}.
\end{aligned}$$

Znajdźmy teraz współczynniki skalarne przy wyrazach tworzących tensor:

przy $\eta^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} & 2|g_v + g_m|^2 q^2 - 2|g_a|^2 (4M_N^2 - q^2) = \\ & = 2|g_v|^2 q^2 + 2|g_m|^2 q^2 - 2|g_a|^2 (4M_N^2 - q^2) + 4\text{Re}(g_v g_m^*) q^2 \equiv 8w_1 \end{aligned}$$

przy $p^\mu p^\nu$:

$$\begin{aligned} & 4|g_m|^2 \left(2 - \frac{q^2}{2M_N^2} \right) - 16\text{Re}(g_v g_m^*) - 16|g_m|^2 + 8(|g_v + g_m|^2 + |g_a|^2) = \\ & = 8|g_v|^2 - 8|g_m|^2 \frac{q^2}{4M_N^2} + 8|g_a|^2 \equiv 8\frac{w_2}{M_N^2} \end{aligned}$$

przy $\frac{1}{2}(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)$ – jest taki sam jak przy $p^\mu p^\nu$:

$$8|g_v|^2 - 8|g_m|^2 \frac{q^2}{4M_N^2} + 8|g_a|^2 \equiv 8\frac{w_5}{M_N^2}$$

przy $q^\mu q^\nu$:

$$\begin{aligned} & -2g_a g_p^* - 2g_a^* g_p + |g_m|^2 \left(2 - \frac{q^2}{2M_N^2} \right) - |g_p|^2 \frac{q^2}{2M_N^2} - 4\text{Re}(g_v g_m^*) - 4|g_m|^2 = \\ & = -2|g_m|^2 \left(1 + \frac{q^2}{4M_N^2} \right) - 2|g_p|^2 \frac{q^2}{4M_N^2} - 4\text{Re}(g_v g_m^* + g_a g_p^*) \equiv 8\frac{w_4}{M_N^2} \end{aligned}$$

przy $i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma$:

$$8\text{Re}(g_v g_a^* + g_m g_a^*) \equiv 8\frac{w_3}{M_N^2}$$

Tensor hadronowy zapiszemy teraz w postaci

$$H_{\text{CC}}^{\mu\nu} = w_1 \eta^{\mu\nu} + \frac{w_2}{M_N^2} p^\mu p^\nu + \frac{w_3}{M_N^2} i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma + \frac{w_4}{M_N^2} q^\mu q^\nu + \frac{w_5}{M_N^2} \frac{p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu}{2}. \quad (\text{B.6})$$

Funkcje w_1, \dots, w_5 to tak zwane *funkcje struktury*. Zależą od kwadratu przekazu czteropędu zarówno bezpośrednio, jak i pośrednio (przez czynniki postaci). Najogólniejsza postać tensora hadronowego ma jeszcze jeden niezależny wyraz: $i\frac{1}{2}(p^\mu q^\nu - q^\mu p^\nu)$ (z odpowiadającą mu szóstą funkcją struktury), który, jak się okazało w powyższych rachunkach, nie występuje w tensorze dla swobodnego nukleonu. Widzimy również, że funkcję $w_5(q^2)$ da się wyrazić przez funkcję $w_2(q^2)$ – w naszej konwencji są one dokładnie sobie równe. Tensor ten ma część symetryczną i antysymetryczną, w odróżnieniu od tensora dla oddziaływania elektromagnetycznego.

B.2.3 Zwężenie tensorów

Obliczymy teraz zwężenie tensora $L_{\mu\nu}$ danego wzorem (B.5) z tensorem $H^{\mu\nu}$ danym wzorem (B.6). Oba tensory mają część symetryczną i część antysymetryczną. Zauważmy, że zwężenie tensora symetrycznego $S^{\dots\mu\nu\dots}$ z antysymetrycznym $A^{\dots\mu\nu\dots}$ jest tożsamościowo równe zeru, bo

$$\sum_{\mu,\nu} S^{\dots\mu\nu\dots} A_{\dots\mu\nu\dots} = - \sum_{\mu,\nu} S^{\dots\nu\mu\dots} A_{\dots\nu\mu\dots} = - \sum_{\nu,\mu} S^{\dots\mu\nu\dots} A_{\dots\mu\nu\dots}.$$

Zatem wystarczy liczyć tylko zwężenia wyrazów symetrycznych z symetrycznymi i antysymetrycznych z antysymetrycznymi:

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{sym}} H_{\text{sym}}^{\mu\nu} + L_{\mu\nu}^{\text{anty}} H_{\text{anty}}^{\mu\nu}.$$

Obliczmy zwężenia poszczególnych wyrazów z tensora hadronowego:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} L_{\mu\nu} &= 2(2k^2 - 2kq + 2(q^2 - m_l^2)) \approx 2(-2kq + 2(q^2 - m_l^2)), \\ p^\mu p^\nu L_{\mu\nu} &= 2\left(2(pk)^2 - 2(pk)(pq) + \frac{1}{2}M_N^2(q^2 - m_l^2)\right), \\ \frac{1}{2}(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)L_{\mu\nu} &= 4(pk)(qk) - 2(pk)q^2 - 2(pq)(kq) + pq(q^2 - m_l^2), \\ q^\mu q^\nu L_{\mu\nu} &= 2\left(2(qk)^2 - 2(qk)q^2 + \frac{1}{2}q^2(q^2 - m_l^2)\right), \\ i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma L_{\mu\nu} &= -2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} k^\kappa q^\lambda = \\ &= -4(\delta_\lambda^\rho \delta_\kappa^\sigma - \delta_\kappa^\rho \delta_\lambda^\sigma) p_\rho q_\sigma k^\kappa q^\lambda = 4((pk)q^2 - (pq)(qk)). \end{aligned}$$

Masę neutrina zaniedbujemy w stosunku do masy leptonu: $m_\nu^2 \ll m_l^2$. Korzystając z poniższych zależności:

$$pq = p(p' - p) = pp' - M_N^2 = -\frac{1}{2}(2M_N^2 - 2pp') = -\frac{1}{2}(p' - p)^2 = -\frac{1}{2}q^2$$

$$kq = k(k - k') = m_\nu^2 - kk' = \frac{1}{2}(2m_\nu^2 - 2kk') = \frac{1}{2}((k - k')^2 - m_l^2 + m_\nu^2) \approx \frac{1}{2}(q^2 - m_l^2)$$

można wyrazić iloczyny pq i kq w zwężeniach przez q^2 . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} L_{\mu\nu} &= 2(q^2 - m_l^2), \\ p^\mu p^\nu L_{\mu\nu} &= 2\left(2(pk)^2 + (pk)q^2 + \frac{1}{2}M_N^2(q^2 - m_l^2)\right), \\ \frac{1}{2}(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)L_{\mu\nu} &= -2m_l^2 pk, \\ q^\mu q^\nu L_{\mu\nu} &= m_l^2(m_l^2 - q^2), \\ i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma L_{\mu\nu} &= 4\left((pk)q^2 + \frac{1}{4}q^2(q^2 - m_l^2)\right). \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenia, po pomnożeniu przez odpowiednie współczynniki i wysumowaniu, dadzą nam zwężenie całego tensora hadronowego z leptonowym, które da się zapisać jako

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(q^2 - m_1^2) \left(\frac{w_2}{M_{\text{N}}^2} \left(2M_{\text{N}}^2 - \frac{1}{2}q^2 \right) + 4w_1 + \frac{1}{2}m_1^2 \left(\frac{w_2}{M_{\text{N}}^2} - 4\frac{w_4}{M_{\text{N}}^2} \right) \right) + \\ &+ \frac{w_3}{M_{\text{N}}^2} q^2 (4pk + q^2 - m_1^2) + \frac{1}{4} \frac{w_2}{M_{\text{N}}^2} (4pk + q^2 - m_1^2)^2. \end{aligned}$$

Reakcja przebiega „w kanale t ”, tzn. pomiędzy zderzającymi się cząstkami wymieniana jest cząstka wirtualna. W tej sytuacji zmienna Mandelstama $t \equiv (p - p')^2$ jest równa q^2 . Jeśli wprowadzimy pozostałe zmienne Mandelstama

$$s \equiv (p + k)^2, \quad u \equiv (p - k')^2,$$

to

$$s - u = p^2 + k^2 + 2pk - p'^2 - k'^2 + 2pk' = m_\nu^2 - m_1^2 + 2pk + 2p(k - q) = m_\nu^2 - m_1^2 + 4pk + q^2.$$

Pomijając masę neutrina mamy $s - u = 4pk + q^2 - m_l^2$ i zwężenie możemy zapisać jako

$$L_{\mu\nu}^{\text{CC}} H_{\text{CC}}^{\mu\nu} = M_{\text{N}}^4 A(q^2) - M_{\text{N}}^2 B(q^2)(s - u) + C(q^2)(s - u)^2, \quad (\text{B.7})$$

gdzie

$$\begin{aligned} A(q^2) &\equiv \frac{q^2 - m_l^2}{4M_{\text{N}}^4} \left(w_2 \left(4 - \frac{q^2}{M_{\text{N}}^2} \right) + 8w_1 + \frac{m_l^2}{M_{\text{N}}^2} (w_2 - 4w_4) \right), \\ B(q^2) &\equiv -w_3 \frac{q^2}{M_{\text{N}}^4}, \\ C(q^2) &\equiv \frac{w_2}{4M_{\text{N}}^2}. \end{aligned}$$

Znak minus przy $B(q^2)$ w równaniu (B.7) jest konwencją stosowaną w fizyce neutrin. Antyneutrinu odpowiadałby plus – bierze się to stąd, że antyneutrino opisywane jest operatorem cząstki prawoskrętnej $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)$, zatem znak przy γ_5 jest przeciwny niż dla neutrina. Można pokazać, że prowadzi to do zmiany znaku przy epsilon w wyrażeniu na tensor leptonowy i w następstwie do zmiany znaku przy współczynniku w_3 w zwężeniu tensorów. Dlatego definiując dla antyneutrina $B(q^2)$ tak samo jak dla neutrina musimy zmienić znak minus na plus w równaniu (B.7).

Dodatek C

Współczynniki kinematyczne dla gazu Fermiego

Rozkład przekroju czynnego względem funkcji odpowiedzi (wzór (4.8)) wymaga znalezienia współczynników kinematycznych v_j . Układ równań napisany na stronie 59 rozwiązano względem funkcji struktury metodą macierzy odwrotnej. Podstawienie rozwiązań do zwężenia tensorów $L^{\mu\nu}$ i $W^{\mu\nu}$ prowadzi do

$$\begin{aligned}
 v_{\text{CC}} &\approx \frac{2}{E_\nu E_\mu M_N^6 \det X} [|\vec{q}|^2 v_1 (2(pk)(pk') - M_N^2 kk') \\
 &- \frac{1}{2} m_\mu^2 |\vec{p}|^2 (E_p |\vec{q}| (1 + \cos^2 \vartheta) + \omega |\vec{p}| (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \cos \vartheta) kk' \\
 &- m_\mu^2 |\vec{q}| |\vec{p}| (\omega |\vec{p}| (1 - 3 \cos^2 \vartheta) + 2E_p |\vec{q}| \cos \vartheta) pk]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{\text{CL}} &\approx \frac{2}{E_\nu E_\mu M_N^6 \det X} [\omega |\vec{q}| v_1 (M_N^2 kk' - 2(pk)(pk')) \\
 &+ m_\mu^2 E_p |\vec{p}| \left(\frac{1}{2} \omega |\vec{p}| (1 - 3 \cos^2 \vartheta) + E_p |\vec{q}| \cos \vartheta \right) kk' \\
 &+ m_\mu^2 E_p^2 |\vec{q}|^2 pk]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{\text{LL}} &\approx \frac{2}{E_\nu E_\mu M_N^6 \det X} [\omega^2 v_1 (2(pk)(pk') - M_N^2 kk') \\
 &+ v_1 m_\mu^2 E_p (E_p kk' + 2\omega pk)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{\text{T}} &\approx \frac{2}{E_\nu E_\mu M_N^6 \det X} [E_p^2 |\vec{q}|^2 (3\omega |\vec{p}| \cos \vartheta - E_p |\vec{q}|) kk' \\
 &+ v_1 \left(Q^2 (pk)(pk') - \frac{1}{2} (M_N^2 Q^2 + m_\mu^2 E_p^2) kk' \right) \\
 &- m_\mu^2 E_p (\omega v_1 + |\vec{q}|^2 |\vec{p}| \cos \vartheta) pk]
 \end{aligned}$$

$$v_{T'} = \frac{(kk' - m_\mu^2)pk + (kk')(pk')}{E_\nu E_\mu v_1}$$

gdzie $v_1 \equiv \omega|\vec{p}| \cos \vartheta - E_p|\vec{q}|$, natomiast $\det X$ jest wyznacznikiem macierzy współczynników w układzie równań:

$$\det X \approx \frac{2E_p^2|\vec{q}|^2}{M_N^6} (3\omega|\vec{p}| \cos \vartheta - E_p|\vec{q}|).$$

Zastosowano przybliżenie polegające na pominięciu $|\vec{p}|^2$ w stosunku do E_p^2 . Energię wiązania można uwzględnić przez zastąpienie $E_p \rightarrow \tilde{E}_p = E_p - E_B$.

Bibliografia

- [1] Kétévi Adiklè Assamagan, *A precise determination of the pion beta-decay rate: Design and calibration*, pibeta.web.psi.ch/docs/publications/ketevi_diss/node9.html
- [2] Donald H. Perkins, *Wstęp do fizyki wysokich energii*, PWN, 2005
- [3] Stephen Gasiorowicz, *Elementary particle physics*, Wiley, New York, 1966
- [4] M.K. Sundareshan, *Handbook of particle physics*, CRC Press LLC, 2001
- [5] E. Leader, E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Volume 1, Cambridge University Press, 1996
- [6] S.M. Bilen'kij, *Lekcii po fizike nejtrinnnyh i lepton-nuklonnyh processov*, Moskwa, 1981
- [7] J.D. Bjorken, S.D. Drell, *Relatywistyczna teoria kwantów*, PWN, Warszawa, 1985
- [8] A.V. Butkevich, S.A. Kulagin, *Quasi-elastic neutrino charged-current scattering cross sections on oxygen*, arXiv:0705.1051v2 [nucl-th]
- [9] C.H. Llewellyn Smith, *Neutrino reactions at accelerator energies*, Stanford University, Stanford
- [10] T.W. Donnelly, *Neutrino-nucleus physics: overview*
- [11] H. Budd et al., *Modeling Quasi-elastic Form Factors for Electron and Neutrino Scattering*, arXiv:hep-ex/0308005v2
- [12] J.D. Walecka, *Electron Scattering and Nuclear Structure*, 1997
- [13] Steven Weinberg, *Teoria pól kwantowych, Tom 1 – Podstawy*, PWN, Warszawa, 1999
- [14] A.A. Aguilar-Arevalo et al. [MiniBooNE Collaboration], *The Neutrino Flux Prediction at MiniBooNE*, Phys. Rev. D 79, 072002 (2009)
- [15] www-boone.fnal.gov
- [16] jnsrv01.kek.jp/public/t2k/index.html
- [17] J.E. Amaro et al., *Using electron scattering superscaling to predict charge-changing neutrino cross sections in nuclei*, Phys. Rev. C 71, 015501 (2005)