

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii

Praca magisterska

Beata Kowal

**Kwazielastyczne rozpraszanie elektronów
na jądrach atomowych**

Opiekun pracy:
Prof. Jan Sobczyk

Wrocław 2014

Streszczenie

Tematem niniejszej pracy jest kwazielastyczne rozpraszanie elektronów na jądrach atomowych. Celem pracy jest wyprowadzenie formuły na przekrój czynny dla rozpraszania elektronów na jądrach, wykonanie wykresów i porównanie z danymi doświadczalnymi.

Praca składa się z trzech rozdziałów. W pierwszym rozważamy proces rozpraszania elektronu na swobodnym nukleonie. Wprowadzamy pojęcie tensora leptonowego i hadronowego oraz znajdujemy ich postać. Wyprowadzamy formułę na przekrój czynny dla rozpraszania elektron-nukleon.

W drugim rozdziale rozważamy proces kwazielastycznego rozpraszania elektronu na jądrze. Wyprowadzamy formułę na przekrój czynny dla tego procesu. Stosujemy przybliżenie impulsowe i przybliżenie fali płaskiej. Stosujemy procedurę de Foresta, aby otrzymać tensor hadronowy dla nukleonu w jądrze. Dostrzegamy problem niezachowania prądu hadronowego i wyprowadzamy poprawkę do tensora hadronowego. Wyprowadzamy przekrój czynny dla modelu globalnego gazu Fermiego i lokalnego gazu Fermiego. Generujemy wykresy dla jąder węgla, tlenu i wapnia.

W trzecim rozdziale zajmujemy się skalowaniem. Wyprowadzamy formułę na funkcję skalowania. Generujemy wykres funkcji skalowania dla węgla.

Abstract

Title: *Quasielastic electron-nucleus scattering.*

The subject of this thesis is quasielastic electron scattering on nuclei. The aim of this thesis is derivation of a cross-section formula for electron-nucleus scattering, generating plots and comparison with experimental data.

The thesis consists of three chapters. In the first we consider a process of electron scattering on a free nucleon. We introduce the leptonic tensor and the hadronic tensor and we find their form. We derive a cross-section formula for electron-nucleon scattering.

In the second chapter we consider a process of quasielastic electron scattering on nuclei. We derive a cross-section formula for this process. We use impulse approximation and plane wave approximation. We use de Forest procedure to receive a formula of hadronic tensor for the nucleon in the nucleus. We see the problem that hadronic current is not conserved and we derive a correction to the hadronic tensor. We derive a cross-section formula for the global Fermi gas model and for the local Fermi gas model. We generate plots for carbon, oxygen and calcium.

In the third chapter we consider scaling. We derive a formula of the scaling function. We generate a plot of the scaling function for carbon.

Spis treści

Wstęp	1
1. Rozpraszanie elektron-nukleon	3
1.1. Przekrój czynny	5
1.2. Macierz rozpraszania	7
Tensor leptonowy i hadronowy	10
Macierz wierzchołka	11
Składowe poprzeczne i podłużne	14
Przybliżenie dipolowe	15
2. Rozpraszanie elektron-jądro	17
Przybliżenie impulsowe	18
2.1. Kwazielastyczne rozpraszanie elektron-jądro	19
2.2. Model gazu Fermiego	25
Funkcja spektralna dla gazu Fermiego	26
2.3. Procedura de Foresta	27
2.4. Problem niezachowania prądu	28
Poprawka do tensora hadronowego	30
Drugi sposób wyliczania poprawki	36
Obliczenie całki	39
2.5. Lokalny gaz Fermiego	42
2.6. Wykresy	44
Węgiel	44
Tlen	47
Wapń	50
3. Skalowanie	53
Dodatki	59
Dodatek A - Obliczenie tensora leptonowego $L_{\mu\nu}$	59
Dodatek B - Obliczenie tensora hadronowego $H_{\mu\nu}$	60
Dodatek C - Obliczenie $L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$	62
Dodatek D - Drugi sposób wyliczania poprawki	63
Bibliografia	67

Wstęp

Rozpraszanie jest ważnym narzędziem w fizyce jądra i cząstek elementarnych, służącym do badania oddziaływania między cząstkami i uzyskaniu informacji o wewnętrznej strukturze jądra i jego składnikach.

Tematem niniejszej pracy jest kwazielastyczne rozpraszanie elektronów na jądrach atomowych. Kwazielastyczne rozproszeniem elektron-jądro polega na rozpraszaniu elektronu na pojedynczym nukleonie jądra, w wyniku czego elektron zostaje wyemitowany z jądra. Wyprowadzimy formułę na przekrój czynny dla tego procesu.

Będziemy rozważali procesy wymiany jednofotonowej i posługiwali się przybliżeniem impulsowym, przybliżeniem fali płaskiej oraz przybliżeniem dipolowym. Wykorzystamy model globalnego gazu Fermiego (*GFG*) oraz lokalnego gazu Fermiego (*LFG*). Wygenerujemy wykresy przekroju czynnego i porównamy zgodność tych modeli z wynikami eksperymentalnymi.

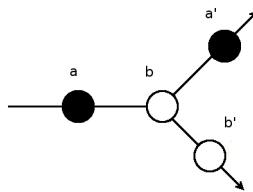
Na końcu zajmiemy się skalowaniem. Wyprowadzimy funkcję skalowania i wygenerujemy wykres jej wartości w oparciu o dane doświadczalne.

Rozpraszanie elektronów to od dawna stosowana metoda badania struktury jądra, techniki rozwinięte w tych badaniach są przedmiotem zainteresowania fizyków badających rozpraszanie neutrin. Oddziaływania neutrin są odmienne, ponieważ słaby prąd hadronowy zawiera część aksjalną (pseudowektorową) oraz wektorową, ale efekty jądrowe są identyczne. A zatem jeśli chcemy, aby model sprawdzał się dla rozpraszania neutrin, jest konieczne żeby działał też dla rozpraszania elektronów. Należy zauważyć, że wiązka elektronów jest monoenergetyczna i zawsze dokładnie znamy wartości przekazu energii i pędu. Dla neutrin wiązka jest rozmyta. Dlatego potrzebujemy modeli, które sprawdzają się w szerokim zakresie różnych sytuacji kinematycznych.

1. Rozpraszanie elektron-nukleon

W procesie rozpraszania badany obiekt - tarcza - jest bombardowany przez strumień cząstek - pocisków. Tempo procesu, energia, masa cząstek rozproszonych i kąty względem strumienia padającego mogą być określone przez układ detektorów.

Rozróżniamy procesy elastyczne i nieelastyczne. W rozpraszaniu elastycznym przed i po procesie występują te same cząstki, ale tarcza pozostaje w stanie podstawowym, absorbuje jedynie pęd odrzutu, a zatem zmienia się jej energia kinetyczna.



Rysunek 1.1. Rozpraszanie elastyczne, rysunek wzorowany na [3]

$$a + b \rightarrow a' + b'$$

Priming oznaczają cząstki po procesie, różnią się od tych przed rozproszeniem jedynie pędem i energią, jądro nie ulega wzbudzeniu. Energia i kąt rozproszenia cząstek a' i b' są jednoznacznie powiązane. Oznaczmy czteropęd tarczy przed i po procesie p i p' , a czteropęd pocisku k i k' .

$$p + k = p' + k'$$

Podnosimy do kwadratu:

$$p^2 + 2(p, k) + k^2 = p'^2 + 2(p', k') + k'^2$$

Korzystamy z zależności:

$$p^2 = p'^2 = M^2$$

$$k^2 = k'^2 = m^2$$

gdzie M to masa tarczy, a m masa pocisku.

$$(p, k) = (p', k') = (p + k - k', k') = (p, k') + (k, k') - m^2 \quad (1.1)$$

W układzie laboratoryjnym związanym z tarczą przed rozproszeniem $p = (M, 0, 0, 0)$, $k = (E_k, \mathbf{k})$, $p' = (E_{p'}, \mathbf{p}')$, $k' = (E'_k, \mathbf{k}')$ równanie 1.1 przybiera postać:

$$ME = ME'_k + E'_k E_k - (\mathbf{k}, \mathbf{k}') - m^2 \quad (1.2)$$

przy założeniu, że energia pocisku jest dużo większa od jego masy m , przyjmujemy $E_k = |\mathbf{k}|$ i $E'_k = |\mathbf{k}'|$

$$ME_k = ME'_k + (1 - \cos(\theta))E'_k E_k$$

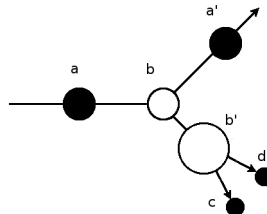
$$E'_k = \frac{E_k}{1 + \frac{E_k}{M}(1 - \cos(\theta))} \quad (1.3)$$

gdzie θ jest kątem między kierunkiem pocisku padającego a kierunkiem pocisku rozproszonego. Relacja $E' \sim \theta$ jest jeden do jednego w przypadku rozproszenia elastycznego. Przekrój czynny będzie funkcją jednego z tych parametrów.

W przypadku rozpraszania nieelastycznego w stanie końcowym może pojawić się więcej niż dwie cząstki. W procesie przedstawionym na rys 1.2

$$a + b \rightarrow a' + b^*$$

$$b^* \rightarrow c + d$$



Rysunek 1.2. Rozpraszanie nieelastyczne, powstawanie stanu wzbudzonego i rozpad, rysunek wzorowany na [3]

część energii kinetycznej cząstki a zostaje spożytkowana na wzbudzenie tarczy b do stanu o wyższej energii b^* . Następnie tarcza powraca do stanu podstawowego

emitując lekką cząstkę (np. foton, mezon π) lub ulega rozpadowi.

Pomiar, w którym obserwujemy tylko cząstki a' a nie obserwujemy innych produktów reakcji nazywamy inkluzyjnym.

1.1. Przekrój czynny

Wielkością stosowaną do opisu procesów rozpraszania jest przekrój czynny σ , który jest miarą prawdopodobieństwa reakcji pomiędzy dwiema zderzającymi się cząstkami.

Rozważmy wyidealizowany eksperyment. Mamy cienką tarczę o gęstości powierzchniowej n'_b . Każda cząstka tarczy ma określony przekrój czynny σ . Bombardujemy tarczę strumieniem monoenergetycznych cząstek a .

Całkowitą liczbę reakcji w jednostce czasu oznaczmy \dot{N} . Niech strumień cząstek ma pole przekroju poprzecznego A , gęstość n_a , a prędkość cząstek-pocisków wynosi v_a . Ilość cząstek a padających w jednostce czasu \dot{N}_a na jednostkę powierzchni tarczy to strumień Φ_a

$$\Phi_a = \frac{\dot{N}_a}{A} = n_a v_a$$

Liczba cząstek tarczy w obrębie strumienia:

$$N_b = n'_b A$$

Prawdopodobieństwo zajścia reakcji P_{int} jest równe stosunkowi efektywnej powierzchni odpowiadającej cząstkom tarczy i pola A

$$P_{int} = \frac{\sigma N_b}{A} = n'_b \sigma \quad (1.4)$$

Ilość zdarzeń w jednostce czasu:

$$\dot{N} = \dot{N}_a P_{int} = \Phi_a N_b \sigma \quad (1.5)$$

Wzór jest poprawny przy założeniu, że centra nie pokrywają się i cząstki rozpraszają się na pojedynczych centrach. Otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{\Phi_a N_b} \quad (1.6)$$

Przekrój czynny jest równy stosunkowi ilości cząstek rozpraszanych w jednostce czasu na cząstce tarczy i strumienia cząstek padających (1.6).

W teorii pola rozpraszanie jest procesem przejścia układu ze stanu początkowego ψ_i , który w dalekiej przeszłości $t \rightarrow -\infty$ odpowiada układowi swobodnemu, do stanu końcowego ψ_f , który w dalekiej przyszłości $t \rightarrow \infty$ odpowiada układowi swobodnemu. Macierz rozpraszania S_{fi} to amplituda prawdopodobieństwa tego procesu.

$$S_{fi} = -i2\pi\delta^{(4)}(p_f - p_i)\mathcal{M}_{fi} \quad (1.7)$$

dla $i \neq f$

Rozważmy cząstkę swobodną w pudle o objętości $V = L^3$. Jeśli założymy periodyczne warunki brzegowe uzyskamy spektrum dyskretne. Po przejściu do granicy $V \rightarrow \infty$ spektrum staje się ciągłe.

$$\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i(\mathbf{p},\mathbf{x})}$$

$$\phi_{\mathbf{p}}(x_1 + L, x_2, x_3) = \phi_{\mathbf{p}}(x_1, x_2, x_3)$$

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$$

$$\langle \phi_{\mathbf{p}} | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle_V = \int_V \phi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{x}) dx^3 = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta_V^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p}}$$

Normalizacja w nieskończonej przestrzeni:

$$|\phi_{\mathbf{p}}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |\phi_{\mathbf{p}}\rangle_V$$

$$\langle \phi_{\mathbf{p}} | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \langle \phi_{\mathbf{p}} | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle_V$$

W granicy $V \rightarrow \infty$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \langle \phi_{\mathbf{p}} | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \delta_V^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Aby obliczyć $|S_{fi}|^2$ musimy najpierw znaleźć kwadrat delty Diraca:

$$(\delta_V^{(4)}(p_f - p_i))^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_V dx^3 \int_T dx_0 \exp(i(x, p_f - p_i)) \delta_V^{(4)}(p_f - p_i) = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta_V^{(4)}(p_f - p_i)$$

$$|S_{fi}|^2 = \frac{VT}{(2\pi)^2} \delta_V^{(4)}(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}^V|^2$$

Ilość stanów końcowych znajdujących się w przedziale pędów $(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f + d\mathbf{p}_f)$ wynosi:

$$\prod_{j=1}^F \frac{V dp_{f(j)}^3}{(2\pi)^3}$$

Ilość cząstek osiągających stan końcowy w przedziale $(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f + d\mathbf{p}_f)$ w jednostce czasu wynosi:

$$\dot{N} = \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 \prod_{i=1}^F \frac{V dp_{f(i)}^3}{(2\pi)^3}$$

Ograniczymy się do przypadku, gdy w stanie początkowym mamy dwie cząstki o czteropędach i spinach (p, s) i (k, λ) . Strumień cząstek padających wynosi $\Phi_a = \frac{v_a}{V}$, a więc przekrój czynny

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{\Phi_a} = \frac{V^2}{v_a(2\pi)^2} \delta_V^{(4)}(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}^V|^2 \prod_{j=1}^F \frac{V dp_{f(j)}^3}{(2\pi)^3}$$

W związku z wybraną normalizacją stanów w skończonej i nieskończonej przestrzeni, macierz \mathcal{M}^V w skończonej przestrzeni i macierz \mathcal{M} w nieskończonej przestrzeni łączy związek:

$$|\mathcal{M}_{fi}^V|^2 = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{(2+F)} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

A więc przekrój czynny ma postać:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{v_a} \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{j=1}^F dp_{f(j)}^3$$

Musimy wyciąkować po wszystkich pędach cząstek końcowych \mathbf{p}_f oraz wysumować po wszystkich końcowych spinach s_f . Dodatkowo uśrednienia po spinach początkowych, które nie są spolaryzowane.

$$\sigma = \bar{\sum}_{s,\lambda} \sum_{s_f} \int \prod_{j=1}^F dp_{f(j)}^3 \frac{(2\pi)^4}{v_a} \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.8)$$

W przypadku, gdy w stanie końcowym mamy dwie cząstki (p', s') i (k', λ') , przekrój czynny wynosi:

$$\sigma = \bar{\sum}_{s,\lambda} \sum_{s',\lambda'} \int dk'^3 dp'^3 \frac{(2\pi)^4}{v_a} \delta^{(4)}(p + k - p' - k') |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.9)$$

1.2. Macierz rozpraszania

Rozważmy najpierw rozpraszanie elektronu na protonie. Ograniczamy się do pierwszego rzędu rachunku zaburzeń (rozpraszanie jednofotonowe). Potraktujmy proton jako cząstkę Diraca bez struktury wewnętrznej o ładunku $-e$. Część hamiltonianu odpowiedzialna za oddziaływanie:

$$\mathcal{H}_{int}(x) = e J_{\mu}^{lept}(x) A^{\mu}(x)$$

Znając prąd hadronowy związany z protonem możemy wyznaczyć pole generowane przez ten prąd. Wybieramy cechowanie Lorenza.

$$\square A^{\mu}(x) = -e J_{hadr}^{\mu}(x)$$

Wprowadzamy funkcję Greena D_F :

$$\square D_F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)$$

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} e^{-i(q,x-y)}$$

Pole generowane przez prąd hadronowy:

$$A^\mu(x) = -e \int d^4y D(x-y) J_{hadr}^\mu(y)$$

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń macierz S ma postać:

$$S = 1 - i \int d^4x \mathcal{H}_{int} = 1 + ie^2 \int d^4x \int d^4y J_{lept}^\mu(x) D(x-y) J_\mu^{hadr}(y)$$

$$\psi_{\lambda k}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_k}} u(k, \lambda) e^{-i(x,k)} - \text{elektron przychodzący}$$

$$\bar{\psi}_{\lambda' k'}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_{k'}}} \bar{u}(k', \lambda') e^{i(x,k')} - \text{elektron wychodzący}$$

$$\psi_{s,p}(x) = \sqrt{\frac{M}{(2\pi)^3 E_p}} u(p, s) e^{-i(x,p)} - \text{proton przychodzący}$$

$$\bar{\psi}_{s',p'}(x) = \sqrt{\frac{M}{(2\pi)^3 E_{p'}}} \bar{u}(p', s') e^{i(x,p')} - \text{proton wychodzący}$$

gdzie $u(p, s) = \sqrt{\frac{E_p + M}{2M}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{p\sigma}{E_p + M} \chi_s \end{pmatrix}$. Konwencja wzorowana na [4]. Prądy leptonowy związany z elektronem:

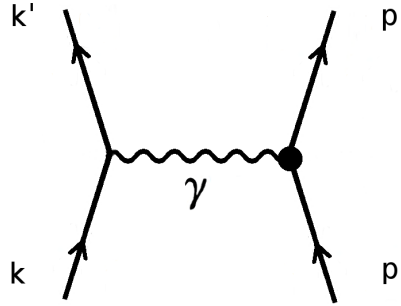
$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu^{lept}(x) &= \langle e(k', \lambda') | J_\mu^{lept}(x) | e(k, \lambda) \rangle = \\ &= \bar{\psi}_{\lambda', k'}(x) \gamma_\mu \psi_{\lambda, k}(x) = \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E_{k'}}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) e^{-i(x, k-k')} \end{aligned}$$

Prądy hadronowy związany z protonem:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu^{hadr}(x) &= \langle p(p', s') | J_\mu^{hadr}(x) | p(p, s) \rangle = \\ &= \bar{\psi}_{s', p'}(x) \gamma_\mu \psi_{s, p}(x) = \\ &= \frac{M}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p', s') \gamma_\mu u(p, s) e^{-i(x, p-p')} \end{aligned}$$

Wyznaczamy element macierzowy S_{fi} pomiędzy stanami początkowym i końcowym, dla $f \neq i$:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= ie^2 \int d^4x \int d^4y \langle e(k', \lambda') | J_\mu^{lept}(x) | e(k, \lambda) \rangle D(x-y) \langle p(p', s') | J_{hadr}^\mu(y) | p(p, s) \rangle = \\
&= -ie^2 \int d^4x d^4y d^4q \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E_{k'}}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \\
&\frac{M}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) e^{-i(x, k' - k + q)} e^{-i(y, p' - p - q)} = \\
&= -ie^2 \int d^4q \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E_{k'}}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \\
&\frac{M}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - k' - q) \delta^{(4)}(p' - p - q) = \\
&= \frac{-ie^2}{(2\pi)^2} \delta^4(p' + k' - p - k) \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) \frac{1}{(k - k')^2 + i\epsilon} \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}}
\end{aligned}$$



Rysunek 1.3. Schemat rozpraszania elektron-nukleon w przybliżeniu jednofotonowym

Proton jak i neutron mają wewnętrzną strukturę. Zmodyfikujemy powyższe rozważania uwzględniając wewnętrzną strukturę nukleonu. Modyfikujemy prąd hadronowy w następujący sposób:

$$\mathcal{J}_{hadr}^\mu(x) = \bar{\psi}_{p', \lambda'}(x) \gamma^\mu \psi_{p, \lambda}(x) \rightarrow \bar{\psi}_{p', \lambda'}(x) \Gamma^\mu \psi_{p, \lambda}(x)$$

gdzie Γ^μ to macierz wierzchołka nukleonu. Prądy hadronowy związany z nukleonem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\mu^{hadr}(x) &= \langle N(p', s') | J_\mu^{hadr}(x) | N(p, s) \rangle = \\
&= \bar{\psi}_{s', p'}(x) \Gamma_\mu \psi_{s, p}(x) = \\
&= \frac{M}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p', s') \Gamma_\mu u(p, s) e^{-i(x, p - p')}
\end{aligned}$$

Amplituda S_{fi} dla rozpraszania elektron-nukleon ma postać

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= ie^2 \int d^4x \int d^4y \langle e(k', \lambda') | J_{\mu}^{lept}(x) | e(k, \lambda) \rangle D(x-y) \langle N(p', s') | J_{hadr}^{\mu}(y) | N(p, s) \rangle = \\
&= -ie^2 \int dx^4 dy^4 dq^4 \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E_{k'}}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_{\mu} u(k, \lambda) \\
&\frac{M}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p', s') \Gamma^{\mu} u(p, s) e^{-i(x, k' - k + q)} e^{-i(y, p' - p - q)} = \\
&= -ie^2 \int dq^4 \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E_{k'}}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_{\mu} u(k, \lambda) \\
&\frac{M}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_{p'}}} \bar{u}(p', s') \Gamma^{\mu} u(p, s) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - k' - q) \delta^{(4)}(p' - p - q)
\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$S_{fi} = -ie^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu} u(k, \lambda) \frac{1}{(k - k')^2 + i\epsilon} \bar{u}(p', s') \Gamma^{\mu} u(p, s) \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) \quad (1.10)$$

Korzystając z wyrażenia

$$S_{fi} = -i2\pi \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) \mathcal{M}_{fi}$$

znajdujemy element macierzowy macierzy \mathcal{M}

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \prod_j \sqrt{\frac{m_j}{E_j}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu} u(k, \lambda) \frac{1}{(k - k')^2 + i\epsilon} \bar{u}(p', s') \Gamma_{\mu} u(p, s) \quad (1.11)$$

Kwadrat modułu elementu macierzowego \mathcal{M}_{fi} :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k - k')^4} \prod_j \frac{m_j}{E_j} \\
&\bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu} u(k, \lambda) (\bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\nu} u(k, \lambda))^* \bar{u}(p', s') \Gamma_{\mu} u(p, s) (\bar{u}(p', s') \Gamma_{\nu} u(p, s))^*
\end{aligned}$$

Sumujemy po spinach końcowych elektronu i nukleonu oraz uśredniamy po spinach początkowych elektronu i nukleonu.

$$\begin{aligned}
\bar{\sum}_{s, \lambda} \sum_{s', \lambda'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \bar{\sum}_{s, \lambda} \sum_{s', \lambda'} \frac{e^4}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k - k')^4} \prod_j \frac{m_j}{E_j} \\
&\bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu} u(k, \lambda) (\bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\nu} u(k, \lambda))^* \bar{u}(p', s') \Gamma_{\mu} u(p, s) (\bar{u}(p', s') \Gamma_{\nu} u(p, s))^*
\end{aligned}$$

Tensor leptonowy i hadronowy

Definiujemy tensor leptonowy:

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} &= m^2 \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu} u(k, \lambda) (\bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\nu} u(k, \lambda))^* = \\
&= \frac{1}{2} m^2 \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu} u(k, \lambda) (\bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\nu} u(k, \lambda))^*
\end{aligned}$$

oraz tensor hadronowy:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= M^2 \sum_s \sum_{s'} \bar{u}(p', s') \Gamma_\mu u(p, s) (\bar{u}(p', s') \Gamma_\nu u(p, s))^* = \\ &= \frac{1}{2} M^2 \sum_{s, s'} \bar{u}(p', s') \Gamma_\mu u(p, s) (\bar{u}(p', s') \Gamma_\nu u(p, s))^* \end{aligned}$$

$$\sum_{s, \lambda} \sum_{s', \lambda'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{(2\pi)^6} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{(k - k')^4} \prod_j \frac{1}{E_j}$$

Przekrój czynny przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{(2\pi)^4}{v_a} \delta^4(p' + k' - p - k) \sum_{s, \lambda} \sum_{s', \lambda'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dp'^3 dk'^3 = \\ &= \frac{e^4}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{v_a} \delta^4(p' + k' - p - k) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{(k - k')^4} \prod_j \frac{1}{E_j} dp'^3 dk'^3 \end{aligned}$$

W dodatku A można znaleźć szczegółowe obliczenia tensora leptonowego $L_{\mu\nu}$. Postać końcowa:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Tr}((k + m)\gamma_\mu(k' + m)\gamma_\nu) = \\ &= \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - (k, k')g_{\mu\nu} + m^2 g_{\mu\nu}) \\ &\approx \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - (k, k')g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Macierz wierzchołka

W wyrażeniu na prąd hadronowy macierz wierzchołka Γ_μ jest skonstruowana z pędów p_μ i p'_μ , masy M oraz macierzy: $\{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\}$.

Prąd hadronowy jest zachowany:

$$q_\mu \mathcal{J}_{had}^\mu(0) = 0$$

gdzie $q_\mu = p'_\mu - p_\mu = k_\mu - k'_\mu$.

Rozważamy tylko oddziaływanie elektromagnetyczne, a więc parzystość jest zachowana. W macierzy Γ_μ nie występują człony zawierające γ_5 .

Macierz Γ_μ otrzymujemy z dokładnością do skalarnych współczynników nazywanych czynnikami postaci. Jedyną zmienną skalarną, jaką możemy zbudować z p_μ i p'_μ

to $p^\mu p'_\mu$, ten z kolei możemy wyrazić przez q^2 :

$$p^\mu p'_\mu = M^2 - \frac{q^2}{2}$$

A więc czynniki postaci są funkcjami zmiennej q^2 . Najbardziej ogólna forma Γ_μ ma postać:

$$\Gamma_\mu = F_1(q^2)\gamma_\mu + i\frac{\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu - p^\nu)}{2M}F_2(q^2) \quad (1.12)$$

Dowodzimy, że prąd jest zachowany, tzn spełniona jest własność $q_\mu \mathcal{J}_{hadr}^\mu(0) = 0$. Dla pierwszego członu skorzystamy z równania Diraca:

$$q^\mu \bar{u}(p', s')\gamma_\mu u(p, s) = \bar{u}(p', s')(\gamma_\mu p'^\mu - \gamma_\mu p^\mu)u(p, s) = \bar{u}(p', s')(M - M)\gamma_\mu u(p, s) = 0$$

Dla drugiego członu skorzystamy z antysymetryczności $\sigma_{\mu\nu}$:

$$q^\mu q^\nu \bar{u}(p', s')\sigma_{\mu\nu} u(p, s) = -q^\mu q^\nu \bar{u}(p', s')\sigma_{\nu\mu} u(p, s) = -q^\mu q^\nu \bar{u}(p', s')\sigma_{\mu\nu} u(p, s) = 0$$

Te własność spełnia również człon postaci $\bar{u}(p', s')(p'_\mu + p_\mu)u(p, s)$ ponieważ:

$$q^\mu(p'_\mu + p_\mu) = p'^2 - p^2 = M^2 - M^2 = 0$$

ale ten człon można wyrazić przez dwa poprzednie korzystając z tożsamości Gordona

$$\bar{u}(p, s)[2M\gamma_\mu - (p_\mu + p'_\mu) - i\sigma_{\mu\nu}q^\nu]u(p', s') = 0$$

Przy pomocy tożsamości Gordona otrzymujemy równoważną postać Γ_μ :

$$\Gamma_\mu = (F_1(q^2) + F_2(q^2))\gamma_\mu - \frac{p'_\mu + p_\mu}{2M}F_2(q^2) \quad (1.13)$$

Obliczamy tensor hadronowy:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}M^2 \sum_{s, s'} \bar{u}(p', s')\Gamma^\mu u(p, s)(\bar{u}(p', s')\Gamma^\nu u(p, s))^* \\ &= \frac{1}{8}Tr((p' + M)\Gamma_\mu(p + M)\gamma_0\Gamma_\nu^\dagger\gamma_0) \\ &= \frac{1}{4}q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) (F_1 + F_2)^2 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{(p, q)}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{(p, q)}{q^2} \right) \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2}q^2 \right) \\ &= \frac{1}{4}q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) H_1 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{(p, q)}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{(p, q)}{q^2} \right) H_2 \end{aligned}$$

gdzie:

$$H_1 = (F_1 + F_2)^2$$

$$H_2 = \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right)$$

Szczegółowe wyliczenie tensora hadronowego znajduje się w dodatku B.

Aby wyznaczyć przekrój czynny obliczamy zwężenie tensorów hadronowego i leptonowego:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - (k, k') g^{\mu\nu}) \left[\frac{1}{4} q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) H_1 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{pq}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{pq}{q^2} \right) H_2 \right] = \\ &= E_k E'_k M^2 \left(-\frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right) H_1 + \left((p, k)(p, k') - M^2 E E' \sin^2(\theta/2) \right) H_2 \end{aligned}$$

W układzie laboratoryjnym związanym z nukleonem:

$$L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = E_k E'_k M^2 \cos^2(\theta/2) \left[-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right]$$

Szczegółowe obliczenia zwężenia tensorów leptonowego i hadronowego znajdują się w dodatku C.

Teraz możemy zapisać przekrój czynny na rozproszenie, gdy w stanie początkowym i końcowym znajdują się elektron i nukleon. Pracujemy w układzie laboratoryjnym związanym z początkowym nukleonem. Będziemy przyjmować prędkość elektronu $v_a = 1$.

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^4}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{M E_k E'_k E'_p} \delta^4(p' + k' - p - k) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{(k - k')^4} dp'^3 dk'^3 = \\ &= \frac{4\alpha^2}{M E_k} \int \frac{1}{E'_k E'_p} \delta(M + E_k - E'_p - E'_k) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{4(k, k')^2} dk'^3 \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } E'_p = \sqrt{M^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} = \sqrt{M^2 + E_k^2 + E'_k{}^2 - 2E_k E'_k \cos(\theta)}$$

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{M E_k} \int \frac{E'_k}{E'_p} \delta(M + E_k - E'_p - E'_k) L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{(k, k')^2} d\Omega dE'_k$$

Korzystamy z własności:

$$\delta(f(E'_k)) = \delta(E'_k - E'_0) / \left| \frac{\partial f}{\partial E'_k}(E'_0) \right|$$

gdzie $f(E'_0) = 0$

$$\delta(M + E_k - E'_p - E'_k) = \delta(E'_k - E'_0) \frac{E'_p}{M + E_k(1 - \cos(\theta))}$$

$$(k, k') = (1 - \cos(\theta)) E_k E'_k = 2 \sin^2(\theta/2) E_k E'_k$$

$$L_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = M^2 E_k E'_k \cos^2(\theta/2) \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\alpha^2}{ME_k} \int d\Omega E'_k dE'_k \delta(E'_k - E'_0) \frac{1}{M + E_k(1 - \cos(\theta))} \\ &= M^2 E_k E'_k \cos^2(\theta/2) \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right) \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2) E_k^2 E'_k{}^2} = \\ &= \alpha^2 \int d\Omega dE'_k \delta(E'_k - E'_0) \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \frac{E_k}{M}(1 - \cos(\theta))} \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right) \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2) E_k^2} = \\ &= \int d\Omega \frac{\alpha^2}{4E_k^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \frac{2E_k}{M} \sin^2(\theta/2)} \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right) \end{aligned}$$

Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie elektron-nukleon ma postać:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_k^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \frac{2E_k}{M} \sin^2(\theta/2)} \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right) \quad (1.14)$$

Składowe poprzeczne i podłużne

Przekrój czynny może być rozpisany na składową podłużną i poprzeczną. Wprowadzamy wektory polaryzacji, jeżeli foton ma pęd wzdłuż osi z to wektor polaryzacji e_L ma postać:

$$e_L = \frac{1}{\sqrt{-q^2}} (|\mathbf{q}|, 0, 0, \omega)$$

Wektory polaryzacji poprzecznej e_T wybieramy:

$$e_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$$

Te trzy wektory wraz z q tworzą bazę ortogonalną w przestrzeni Minkowskiego.

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \sum_{i,j=L,+,-} e_i^\alpha L_{\alpha\beta} (e_j^\beta)^* e_{i\mu} (e_{j\nu})^* \\ H_{\mu\nu} &= \sum_{i,j=L,+,-} e_i^\alpha H_{\alpha\beta} (e_j^\beta)^* e_{i\mu} (e_{j\nu})^* \end{aligned}$$

W układzie związanym z nukleonem niezerowe współczynniki dla tensora hadronowego wynoszą:

$$e_{\pm}^\mu H_{\mu\nu} (e_{\pm}^\nu)^* = -\frac{1}{4} q^2 H_1$$

$$e_L^\mu H_{\mu\nu} (e_L^\nu)^* = \frac{1}{4} q^2 H_1 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{q^2} M^2 H_2$$

Odpowiadające im współczynniki tensora leptonowego:

$$\begin{aligned} A &= e_{\pm}^{\mu} L_{\mu\nu} (e_{\pm}^{\nu})^* = \frac{1}{2}((k^1 + ik^2)(k^1 - ik^2)/2 + (k, k')) = \frac{1}{2}(E_k^2 - (k^3)^2 + (k, k')) = \\ &= \frac{1}{2}(E_k^2 - (\mathbf{k}, \mathbf{q})^2/|\mathbf{q}|^2 - q^2/2) = \frac{-q^2}{8|\mathbf{q}|^2}((2E_k - \omega)^2 + |\mathbf{q}|^2) = \\ &= \frac{-q^2}{8|\mathbf{q}|^2}4E_k E'_k \cos^2(\theta/2) \left(\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= e_L^{\mu} L_{\mu\nu} (e_L^{\nu})^* = \frac{1}{2}(-2(|\mathbf{q}|E_k - \omega k^3)^2/q^2 - (k, k')) = \frac{1}{2}(-2(|\mathbf{q}|E_k - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})/|\mathbf{q}|)^2/q^2 + q^2/2) = \\ &= \frac{-q^2}{4|\mathbf{q}|^2}((2E_k - \omega)^2 - |\mathbf{q}|^2) = \frac{-q^2}{4|\mathbf{q}|^2}4E_k E'_k \cos^2(\theta/2) \end{aligned}$$

Otrzymujemy rozkład zwiężenia tensorów na część poprzeczną i podłużną
 $L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = -2A \frac{1}{4} q^2 H_1 + B \left(\frac{1}{4} q^2 H_1 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{q^2} M^2 H_2 \right)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_T}{d\Omega} + \frac{d\sigma_L}{d\Omega}$$

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2(\theta/2)} \frac{q^2}{4M^2} H_1 \left(\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} - 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2) \right) \quad (1.15)$$

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2(\theta/2)} \left(H_2 - \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \frac{q^2}{4M^2} H_1 \right) \quad (1.16)$$

Przybliżenie dipolowe

Czynniki postaci F_1 i F_2 opisują rozkład ładunku i momentu magnetycznego nukleonu. Muszą być wyznaczone osobno dla protonu i neutronu. Dla $q^2 = 0$:

$$F_1^p(0) = 1$$

$$F_1^p(0) + F_2^p(0) = \mu_p$$

$$F_1^n(0) = 0$$

$$F_1^n(0) + F_2^n(0) = \mu_n$$

Wprowadźmy elektryczne i magnetyczne czynniki postaci G_E i G_M :

$$G_E = F_1 + \frac{q^2}{4M^2} F_2$$

$$G_M = F_1 + F_2$$

$$F_1 = \frac{G_E - G_M \frac{q^2}{4M^2}}{1 - \frac{q^2}{4M^2}}$$

$$F_2 = \frac{G_M - G_E}{1 - \frac{q^2}{4M^2}}$$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} &= E_k E_{k'} M^2 \cos^2(\theta/2) \left(-G_M^2 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + \frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} \right) = \\
&= E_k E_{k'} M^2 \cos^2(\theta/2) \frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2 \left(1 + 2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) \operatorname{tg}^2(\theta/2) \right)}{1 - \frac{q^2}{4M^2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \frac{2E_k}{M} \sin^2(\theta/2)} \frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2 \left(1 + 2 \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) \operatorname{tg}^2(\theta/2) \right)}{1 - \frac{q^2}{4M^2}}$$

W przybliżeniu dipolowym zakładamy, że proton ma rozkład ładunku eksponencjalny

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/r_0}$$

Czynniki postaci G_E i G_M są zadane przez transformatę Fouriera rozkładu ładunku i momentu magnetycznego. Zakładamy w przybliżeniu dipolowym, że magnetyczne czynniki postaci G_M mają taką samą zależność od q^2 jak G_E .

Dla protonu:

$$\begin{aligned}
G_E^p &= \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{0.71(GeV)^2} \right)^2} \\
G_M^p &= \frac{\mu_p}{\left(1 - \frac{q^2}{0.71(GeV)^2} \right)^2}
\end{aligned}$$

Dla neutronu:

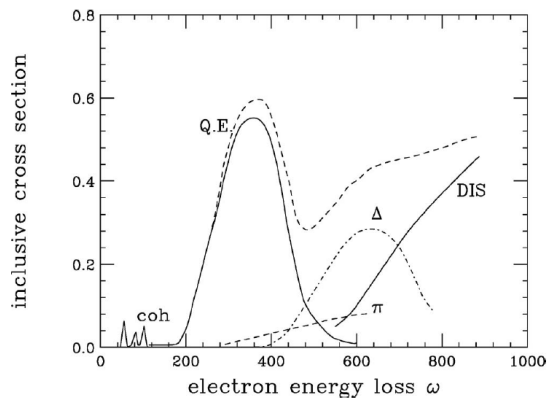
$$\begin{aligned}
G_E^n &= 0 \\
G_M^n &= \frac{\mu_n}{\left(1 - \frac{q^2}{0.71(GeV)^2} \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\mu_p = 2.7928, \mu_n = -1.9130$$

Zależność G_E i G_M od q^2 w przybliżeniu dipolowym zgadza się z pomiarami z dokładnością do 10% dla $-q^2 < 5GeV^2$.

2. Rozpraszanie elektron-jądro

W poprzednim rozdziale analizowaliśmy rozpraszanie elastyczne elektronu na swobodnym nukleonie. W tym rozdziale rozważymy rozpraszanie elektronów na nukleonach związanych w jądrze.



Rysunek 2.1. Schematyczne przedstawienie inkluzyjnego przekroju czynnego jako funkcja transferu energii, źródło: [4]

Rysunek 2.1 pokazuje schemat przekroju czynnego jako funkcji transferu energii. Dla niskich wartości ω pojawiają się ostry pik odpowiadający rozpraszaniu elastycznemu i ostre piki odpowiadające wzbudzeniom dyskretnych stanów jądra. Pomiedzy nimi a pikiem kwazielastycznym mamy obszar występowania gigantycznych rezonansów (*giant resonances*).

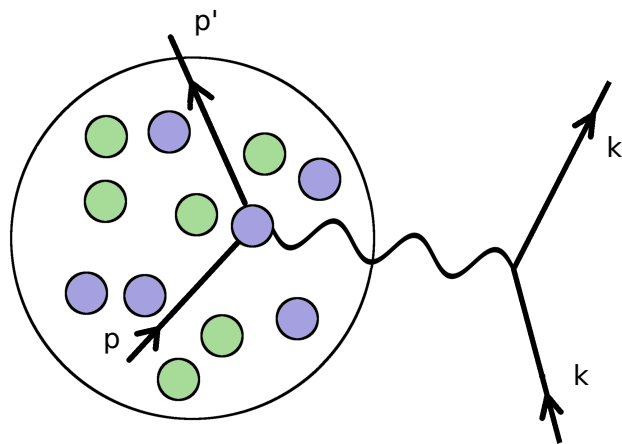
Dla wyższych energii widzimy szeroki pik kwazielastyczny (Q.E.). Elektron rozprasza się na pojedynczym nukleonie, który następnie opuszcza jądro. Pik jest przesunięty względem położenia odpowiadającego rozproszeniu na swobodnym nukleonie - jest to efekt wiązania nukleonu w jądrze. Szerokość piku jest efektem pędu nukleonów w jądrze. Pik kwazielastyczny będzie głównym obszarem zainteresowania w tej pracy.

Dla większych ω obserwujemy wzbudzenia nukleonu do stanu rezonansowego Δ . Dla bardzo dużych wartości ω pojawia się głęboko nieelastyczne rozpraszanie (*DIS*) zawierające wyższe rezonanse i rozpraszanie na kwarkach w nukleonach.

Przybliżenie impulsowe

Elektron oddziałujący z jądrem emituje foton o pędzie q , który sonduje jądro w zakresie $1/|q|$. Jeżeli pęd fotonu jest dostatecznie duży w obszarze tym znajduje się tylko jeden nukleon. Możemy wtedy przyjąć, że elektron oddziałuje tylko z jednym nukleonem jądra, a jądro możemy traktować jako układ cząstek niezależnych - jest to przybliżenie impulsowe (*impulse approximation, IA*). Rozdzielamy stan oddziałującego z elektronem nukleonu N od stanu pozostałych $(A - 1)$ nukleonów:

$$|N(p, s)\rangle \otimes |A - 1\rangle$$



Rysunek 2.2. Schemat procesu w przybliżeniu impulsowym.

Jeżeli pęd q będzie zbyt mały, obszar $1/|q|$ obejmuje więcej niż jeden nukleon i pęd jest przekazywany im wszystkim, co prowadzi do rezonansów gigantycznych. Przyjmuje się, że przybliżenie impulsowe daje dobre rezultaty dla $|q| > 400 \text{ MeV}$.

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\omega^2 + 2E_k(E_k - \omega)(1 - \cos(\theta))}$$

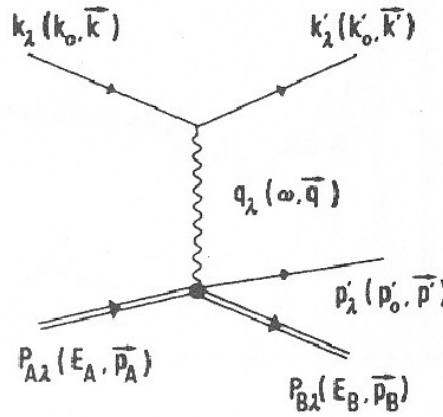
2.1. Kwazielastyczne rozpraszanie elektron-jądro

W procesie rozpraszania kwazielastycznego elektron oddziałuje z pojedynczym nukleonem, w wyniku czego nukleon zostaje one wybity. Elektron oraz jądro A o liczbie masowej A przechodzi do stanu końcowego składającego się z elektronu, jądra B o liczbie masowej $A - 1$ i wyemitowaniu nukleonu N . Dla uproszczenia zakładamy, że jądro nie ulega dalszej dezintegracji.

$$e + A \rightarrow e' + B + N$$

Pęd i spin jądra początkowego oznaczamy jako p_A, s_A , a końcowy p_B, s_B , pęd i spin elektronu w stanie początkowym i końcowym - k, λ i k', λ' , natomiast p', s' dotyczy wyemitowanego nukleonu N .

$$|k, \lambda\rangle \otimes |p_A, s_A\rangle \rightarrow |k', \lambda'\rangle \otimes |p_B, s_B\rangle \otimes |p', s'\rangle$$



Rysunek 2.3. Schemat procesu rozpraszania elektronu na jądrze atomowym z uwolnieniem jednego neutronu z wymianą jednego fotonu, źródło: [1].

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń macierz S ma postać:

$$S = 1 + ie^2 \int d^4x \mathcal{H}_{int} = 1 + ie^2 \int d^4x \int d^4y J_{lept}^\mu(x) D(x-y) J_\mu(y)$$

dla $f \neq i$:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= ie^2 \int d^4x \int d^4y \langle e(k', \lambda') | J_\mu^{lept}(x) | e(k, \lambda) \rangle D(x-y) \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(y) | A(p_A, s_A) \rangle \\
&= ie^2 \int d^4x \int d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} e^{-i(q, x-y)} \\
&\quad \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E'_k}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) e^{-i(k-k', x)} \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(y) | A(p_A, s_A) \rangle
\end{aligned}$$

Wykorzystujemy zależność:

$$\langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(y) | A(p_A, s_A) \rangle = \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(0) | A(p_A, s_A) \rangle e^{-i(y, p_A - p' - p_B)}$$

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= ie^2 \int d^4x \int d^4y \langle e(k', \lambda') | J_\mu^{lept}(x) | e(k, \lambda) \rangle D(x-y) \\
&\quad \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(y) | N(p', s'), B(p_B, s_B) \rangle = \\
&= -ie^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} e^{-i(q, x-y)} \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k E'_k}} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) e^{-i(k-k', x)} \\
&\quad \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(0) | N(p', s'), B(p_B, s_B) \rangle e^{-i(p-p', y)} = \\
&= -2\pi i e^2 \int d^4q \frac{m}{\sqrt{E_k E'_k}} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \\
&\quad \langle N(p', s') | J^\mu(0) | N(p, s) \rangle \delta^4(k - k' - q) \delta^4(p' - p - q) = \\
&= -2\pi i e^2 \frac{m}{\sqrt{E_k E'_k}} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \\
&\quad \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(0) | A(p_A, s_A) \rangle \delta^{(4)}(p_B + p' + k' - p_A - k)
\end{aligned}$$

Stąd znajdujemy macierz \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}_{fi} = e^2 \frac{m}{\sqrt{E_k E'_k}} \frac{1}{q^2 - i\epsilon} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J^\mu(0) | A(p_A, s_A) \rangle$$

Prąd \mathcal{J}_μ jest związany z jądrem i wyemitowanym nukleonem:

$$\mathcal{J}_\mu(0) = \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J_\mu(0) | A(p_A, s_A) \rangle$$

Obliczamy kwadrat modułu macierzy \mathcal{M} wysumowując po spinach końcowych jądra

B , elektronu e' i nukleonu oraz licząc średnią po spinach cząstek początkowych: elektronu e i jądra A .

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \sum_{s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2} &= e^4 m^2 \frac{1}{E_{k'} E_k} \frac{1}{q^4} \\ &\sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \overline{u(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) (\overline{u(k', \lambda') \gamma_\nu u(k, \lambda)})^*} \\ &\sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{s'} \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J_\mu(0) | A(p_A, s_A) \rangle \\ &(\langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J_\nu(0) | A(p_A, s_A) \rangle)^* \end{aligned}$$

gdzie możemy wyodrębnić tensor leptonowy:

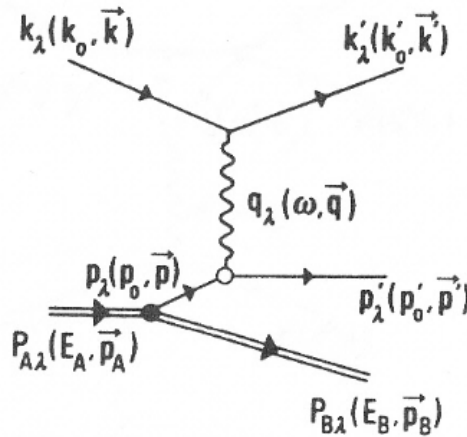
$$L_{\mu\nu} = \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda} \overline{u(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) (\overline{u(k', \lambda') \gamma_\nu u(k, \lambda)})^*}$$

Zapisujemy operator prądu $J_\mu(0)$ w następujący sposób:

$$J_\mu(0) = \sum_{s, \bar{s}} \int d^3p d^3\bar{p} a_s^\dagger(\bar{p}) \langle N(\bar{p}, \bar{s}) | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle a_s(p)$$

gdzie $\langle N(\bar{p}, \bar{s}) | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle$ to element macierzyowy prądu hadronowego związanego z nukleonem, a $a_s^\dagger(p)$ i $a_s(p)$ to operatory kreacji i anihilacji nukleonu spełniające związek antykomutacyjny:

$$\{a_s(p), a_{s'}^\dagger(p')\} = \delta_{s,s'} \delta^3(p' - p)$$



Rysunek 2.4. Schemat procesu rozpraszania elektronu na jądrze atomowym z uwolnieniem jednego neutronu w przybliżeniu PWIA z wymianą jednego fotonu, źródło: [1].

Oprócz wymiany jednofotonowej i przybliżenia impulsowego zakładamy również, że po opuszczeniu jądra nukleon już nie oddziałuje z nim (*plane wave impulse approximation, PWIA*). Operator $J_\mu(0)$ anihiluje nukleon w jądrze A i kreuje nukleon w stanie końcowym.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu(0) &= \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | J_\mu(0) | A(p_A, s_A) \rangle = \\ &= \sum_{s, \bar{s}} \int dp^3 d\bar{p}^3 \langle N(p', s'), B(p_B, s_B) | a_{\bar{s}}^\dagger(\bar{p}) a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle \langle N(\bar{p}, \bar{s}) | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle \end{aligned}$$

Korzystamy z działania operatora anihilacji na stan nukleonu.

$$a_{\bar{s}}(\bar{p}) | N(p', s'), B(p_B, s_B) \rangle = \delta_{s, \bar{s}} \delta^{(3)}(p' - \bar{p}) | B(p_B, s_B) \rangle$$

i otrzymujemy wyrażenie na prąd

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu(0) &= \sum_s \int dp^3 \langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle \langle N(p', s') | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle = \\ &= \sum_s \langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle \langle N(p', s') | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B$. Teraz możemy obliczyć:

$$\begin{aligned} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{s'} \mathcal{J}_\mu(0) (\mathcal{J}_\nu(0))^* &= \sum_{s_A} \sum_{s_B, s'} \sum_s \langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle \langle N(p', s') | J_\mu(0) | N(p, s) \rangle \\ &= \sum_{\bar{s}} [\langle B(p_B, s_B) | a_{\bar{s}}(p) | A(p_A, s_A) \rangle \langle N(p', s') | J_\nu(0) | N(p, \bar{s}) \rangle]^* = \\ &= \sum_{\bar{s}} \sum_{s'} \langle N(p', s') | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle \langle N(p', s') | J_\nu^{hadr}(0) | N(p, \bar{s}) \rangle^* \\ &= \sum_{s_A} \sum_{s_B} \langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle \langle B(p_B, s_B) | a_{\bar{s}}(p) | A(p_A, s_A) \rangle^* \end{aligned}$$

Można pokazać [1], że powyższe wyrażenie faktoryzuje się do postaci:

$$\begin{aligned} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{s'} \mathcal{J}_\mu(0) (\mathcal{J}_\nu(0))^* &= \sum_s \sum_{s'} \langle N(p', s') | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle \langle N(p', s') | J_\nu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle^* \\ &= \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{\bar{s}} | \langle B(p_B, s_B) | a_{\bar{s}}(p) | A(p_A, s_A) \rangle |^2 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6 E_p E_p'} H_{\mu\nu} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{\bar{s}} | \langle B(p_B, s_B) | a_{\bar{s}}(p) | A(p_A, s_A) \rangle |^2 \end{aligned}$$

gdzie

$$H_{\mu\nu} = \sum_s \sum_{s'} \langle N(p', s') | J_\mu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle \langle N(p', s') | J_\nu^{hadr}(0) | N(p, s) \rangle^*$$

to tensor hadronowy związany ze nukleonem. Musimy pamiętać, że tensor ma inną postać niż ta, która wyprowadziliśmy w poprzednim rozdziale analizując swobodny nukleon. Nukleon jest związany i leży poza powłoką masy. Aby rozwiązać ten problem zastosujemy procedurę de Foresta.

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda s_A} \sum_{\lambda' s' s_B} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= e^4 \frac{1}{E_{k'} E_k} L_{\mu\nu} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{s'} \mathcal{J}^\mu(0) (\mathcal{J}^\nu(0))^* \frac{1}{q^4} = \\ &= e^4 \frac{1}{(2\pi)^6 E_p E_p' E_{k'} E_k} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_{\bar{s}} |\langle B(p_B, s_B) | a_{\bar{s}}(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2 \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (1.8) zapisujemy przekrój czynny:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{(2\pi)^4}{v_a} \delta^4(p_B + p' + k' - p_A - k) \sum_{\lambda s_A} \sum_{\lambda' s' s_B} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dk'^3 dp_B^3 dp'^3 = \\ &= 4\alpha^2 \int \frac{1}{v_a E_{k'} E_k E_p E_p'} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2 \\ &\quad \delta^{(4)}(p_B + p' + k' - p_A - k) dk'^3 dp_B^3 dp'^3 \end{aligned}$$

$$q = k - k'; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B$$

Rozważamy układ związany ze spoczywającym jądrem początkowym, wtedy $\mathbf{p} = -\mathbf{p}_B$, przyjmujemy $v_a = 1$

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E_p'} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2 \\ &\quad \delta(E_B + E_{p'} + E_{k'} - M_A - E_k) \delta^{(3)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) dk'^3 dp^3 dp'^3 \end{aligned}$$

Oznaczmy różnicę transferu energii ω i energii kinetycznej emitowanego nukleonu T' jako:

$$E = \omega - T'$$

Pęd jądra w stanie końcowym:

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{p}' = \mathbf{q} - \mathbf{p}'$$

energia jądra w stanie końcowym:

$$E_B = E_k - E_{k'} + M_A - E'_p = \omega + M_A - E'_p$$

a więc:

$$E = \omega - T' = E_B - M_A + E'_p - T' = E_B - M_A + M$$

Zauważmy, że energia oddziałującego nukleonu w jądrze wynosi $E_B - M_A$, co jest równe $E - M$. Energia nukleonu na powłoce masy: $E_p = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$. Stąd możemy wyznaczyć energię wiązania nukleonu

$$\epsilon = E_p - (E - M)$$

Wprowadźmy również oznaczenie:

$$\tilde{\omega} = \omega - \epsilon = E'_p - E_p = \omega - E_p + E - M$$

W odróżnieniu do procesu rozpraszania na swobodnym nukleonie, podczas rozpraszania na związanym nukleonie część transferu energii jest pochłaniana przez jądro.

Skorzystamy z formuły:

$$\delta(E_B + E_{p'} + E_{k'} - M_A - E_k) = \int dE \delta(M + E_B - M_A - E) \delta(E - M + E_{k'} - E_k + E_{p'})$$

$$\sigma = 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A}^- \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2$$

$$\delta(E_B + E_{p'} + E_{k'} - M_A - E_k) \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) dk'^3 dp^3 dp'^3 =$$

$$= 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A}^- \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2$$

$$\delta(M + E_B - M_A - E) \delta(E - M + E_{k'} - E_k + E_{p'}) \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) dE dk'^3 dp^3 dp'^3 =$$

$$= 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A}^- \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2$$

$$\delta(M + E_B - M_A - E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) dE dk'^3 dp^3 dp'^3 =$$

$$= 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \sum_{s_A}^- \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2$$

$$\delta(M + E_B - M_A - E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dE dk'^3 dp^3 =$$

$$= 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} S(\mathbf{p}, E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dE dk'^3 dp^3$$

Gdzie $E'_p = \sqrt{M^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{p})^2} = \sqrt{M^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2}$, a $S(\mathbf{p}, E)$ to funkcja spektralna jądra:

$$S(\mathbf{p}, E) = \delta(M + E_B - M_A - E) \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2$$

Funkcja spektralna nukleonu opisuje rozkład prawdopodobieństwa, że z jądra początkowego A zostanie usunięty nukleon o pędzie \mathbf{p} i powstanie jądro B zawierające $A - 1$ nukleonów, a energia jądra B będzie równa $E_B = M_A - M + E$.

$$dk'^3 = dE'_k E'_k{}^2 d\Omega$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\alpha^2 \int \frac{1}{E_{k'} E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} S(\mathbf{p}, E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dk'^3 dE dp^3 = \\ &= 4\alpha^2 \int \frac{E'_k}{E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} S(\mathbf{p}, E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dE d\Omega dE'_k \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'_k} = 4\alpha^2 \int \frac{E'_k}{E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} S(\mathbf{p}, E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dE dp^3$$

Do tej pory liczyliśmy przekrój czynny dla rozpraszania na protonie lub neutronie w jądrze. Przekrój czynny na rozpraszanie kwazielastyczne elektronów na jądrze będzie sumą wkładów od protonów i neutronów, dodajemy niekoherentnie, zakładamy, że elektron rozróżnia pojedyncze nukleony.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'_k} = \frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} + \frac{d^2\sigma_n}{d\Omega dE'_k}$$

2.2. Model gazu Fermiego

W modelu gazu Fermiego jądro traktujemy jako złożenie dwóch niezależnych układów nukleonów. Nukleony z ograniczeniami narzuconymi przez zasadę Pauliego mogą swobodnie poruszać się po całej objętości jądra.

Nukleony poruszają się w studni potencjału i nie oddziałują ze sobą. Stany są obsadzone od najniższego poziomu odpowiadajacemu pędowi zerowemu do poziomu Fermiego odpowiadajacemu pędowi Fermiego p_F , a energia najwyższego

obsadzonego stanu to energia Fermiego E_F . W modelu globalnego gazu Fermiego (*GFG*) przyjmujemy że jądro ma stałą gęstość. Będziemy rozważali jedynie jądra o takiej samej liczbie protonów i neutronów. Przyjmujemy p_F i energię wiązania ϵ taką samą dla protonów i neutronów.

W rzeczywistości jądro nie ma stałej gęstości, co wykorzystamy przy rozważaniu lokalnego gazu Fermiego (*LFG*). Za pęd Fermiego dla globalnego gazu Fermiego przyjmujemy średnią po rozkładzie gęstości wartości pędu Fermiego.

Funkcja spektralna dla gazu Fermiego

Operator anihilacji nukleonu powoduje usunięcie nukleonu z morza Fermiego:

$$a(\mathbf{p})|\mathbf{p}_A\rangle = \theta(p_F - |\mathbf{p}|)|\mathbf{p}_A - \mathbf{p}\rangle$$

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}, E) &= \delta(M + E_B - M_A - E) \sum_{s_A} \sum_{s_B} \sum_s |\langle B(p_B, s_B) | a_s(p) | A(p_A, s_A) \rangle|^2 = \\ &= \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(M + E_B - M_A - E) \sum_{s_A} \sum_{s_B} |\langle s_B | s_A \rangle|^2 \end{aligned}$$

Przyjmujemy normalizację:

$$\begin{aligned} \int S_p(\mathbf{p}, E) dp^3 dE &= Z \\ \int S_n(\mathbf{p}, E) dp^3 dE &= N \end{aligned}$$

Przy takiej normalizacji funkcja spektralna ma postać:

$$S_p(\mathbf{p}, E) = \theta(p_F^p - |\mathbf{p}|) \delta(M + E_B - M_A - E) \frac{3Z}{4\pi p_F^p{}^3}$$

$$S_n(\mathbf{p}, E) = \theta(p_F^n - |\mathbf{p}|) \delta(M + E_B - M_A - E) \frac{3N}{4\pi p_F^n{}^3}$$

Wykorzystujemy wyrażenie na energię wiązania $\epsilon = E_B - M_A + E_p$.

$$S_p(\mathbf{p}, E) = \theta(p_F^p - |\mathbf{p}|) \delta(\epsilon^p - E_p + M - E) \frac{3Z}{4\pi p_F^p{}^3}$$

$$S_n(\mathbf{p}, E) = \theta(p_F^n - |\mathbf{p}|) \delta(\epsilon^n - E_p + M - E) \frac{3N}{4\pi p_F^n{}^3}$$

Musimy uwzględnić jeszcze, że usunięty nukleon o pędzie końcowym $\mathbf{p}' = \mathbf{q} + \mathbf{p}$ znalazł się poza morzem Fermiego, czyli:

$$S_p(\mathbf{p}, E) \rightarrow \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{p}| - p_F^p) S_p(\mathbf{p}, E)$$

$$S_n(\mathbf{p}, E) \rightarrow \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{p}| - p_F^n) S_n(\mathbf{p}, E)$$

Przekrój czynny na kwazielastyczne rozpraszanie elektronów w modelu gazu Fermiego ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} &= \frac{3Ze^4 E'_k}{16\pi^3 p_F^3 E_k} \int \frac{1}{E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \theta(p_F^p - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{p}| - p_F^p) \\ &\quad \delta(\epsilon - E_p + M - E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dE dp^3 = \\ &= \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4} \int \frac{1}{E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \theta(p_F^p - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{q} + \mathbf{p}| - p_F^p) \delta(\epsilon + E_{p'} - E_p - \omega) dp^3 \\ \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'_k} &= \frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} + \frac{d^2\sigma_n}{d\Omega dE'_k} \end{aligned}$$

2.3. Procedura de Foresta

Podczas rozpraszania elektronów na swobodnym nukleonie, nukleon otrzymuje cały przekaz czteropędu $q = (\omega, \mathbf{q})$. W procesie rozpraszania na związanym nukleonie część energii ϵ zostaje pochłonięta przez jądro końcowe.

Macierz wierzchołka odpowiadająca nukleonowi poza powłoką masy może mieć bardziej złożoną postać niż ta występująca w wyrażeniu na prąd swobodny. Zauważmy, że dla nukleonu on-shell dwie formy macierzy wierzchołka powiązane tożsamością Gordona były równoważne. W przypadku off-shell już tak nie jest. Co więcej czynniki postaci mogą oprócz q^2 zależeć od innych wielkości skalarnych jak masa niezmiennicza początkowego nukleonu p^2 . Zamiast wyprowadzać ogólne wyrażenie powszechnie stosuje się procedurę polegającą na użyciu prądu swobodnego.

Początkowy nukleon związany w jądrze ma energię $E - M$ i pęd \mathbf{p} . Nukleon jest emitowany z jądra, założyliśmy, że po emisji nie oddziałuje już z jądrem (przybliżenie fali płaskiej). Ma wtedy energię $E_p = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$ i pęd \mathbf{p} . Przy tym założeniu możemy używać tensora hadronowego dla swobodnego nukleonu przy czym teraz $E'_p - E_p = \tilde{\omega}$

Utożsamiamy tensor opisujący rozpraszanie na związanym nukleonie $\tilde{H}_{\mu\nu}$ z tensorem opisującym rozpraszanie na swobodnym nukleonie $H_{\mu\nu}$ dla transferu czteropędu $(\tilde{\omega}, \mathbf{q})$, gdzie $\tilde{\omega} = \omega - \epsilon$. Taką procedurę nazywamy procedurą de Foresta.

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \tilde{H}_1 \tilde{q}^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{\tilde{q}_\mu \tilde{q}_\nu}{\tilde{q}^2} \right) + \left(p_\mu - \tilde{q}_\mu \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_\nu - \tilde{q}_\nu \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2$$

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}(\tilde{q})$$

2.4. Problem niezachowania prądu

Zastąpienie $(\omega, \mathbf{q}) \rightarrow (\tilde{\omega}, \mathbf{q})$ prowadzi do problemu, polegającego na tym, że prąd hadronowy nie jest już zachowany, tzn nie jest spełnione:

$$q^\mu \tilde{H}_{\mu\nu} = 0$$

Aby pokonać te przeciwności stosujemy następującą procedurę podaną w [4]:

Składową $\mu = 0$ i $\nu = 0$ pozostawiamy bez zmian:

$$\tilde{H}_{00} \rightarrow \tilde{H}_{00}$$

Składowe podłużne otrzymujemy ze składowych czasowych ($\mu = 0$ lub $\nu = 0$) wymagając zachowania prądu. ($j, k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{j0} &= \tilde{H}_{j0}^L + \tilde{H}_{j0}^T \\ &= -\frac{q_j q^k}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{k0} + \left[\tilde{H}_{j0} + \frac{q_j q^k}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{k0} \right] \rightarrow \\ \tilde{H}_{j0} &= \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{00} + \tilde{H}_{j0}^T \end{aligned}$$

Analogicznie dla drugiej współrzędnej:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0k} &= \tilde{H}_{0k}^L + \tilde{H}_{0k}^T \\ &= -\frac{q_k q^j}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{0j} + \left[\tilde{H}_{0k} + \frac{q_k q^j}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{0j} \right] \rightarrow \\ \tilde{H}_{0k} &= \frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{00} + \tilde{H}_{0k}^T \end{aligned}$$

Dla składowych przestrzennych ($j, k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{jk} &= \tilde{H}_{jk}^L + \tilde{H}_{jk}^T \\
&= -\frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} + \left[\tilde{H}_{jk} + \frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} \right] \\
&= \tilde{H}_{jk}^{LL} + \tilde{H}_{jk}^{LT} + \tilde{H}_{jk}^{TL} + \tilde{H}_{jk}^{TT} \\
&= \frac{q_j q_k q^m q^n}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} - \left[\frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} + \frac{q_j q_k q^m q^n}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} \right] + \\
&\quad - \left[\frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{jn} + \frac{q_k q_j q^n q^m}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} \right] + \left[\tilde{H}_{jk} + \frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} + \frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{jn} + \frac{q_k q_j q^n q^m}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} \right] \rightarrow \\
\tilde{\tilde{H}}_{jk} &= \frac{q_j q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{00} + \left[\frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{0k} + \frac{q_j q_k q^n \omega}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{0n} \right] + \\
&\quad \left[\frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{j0} + \frac{q_k q_j q^m \omega}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{m0} \right] + \left[\tilde{H}_{jk} + \frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} + \frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{jn} + \frac{q_k q_j q^n q^m}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} \right]
\end{aligned}$$

Po dokonaniu tej procedury prąd jest zachowany:

$$\begin{aligned}
q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{\mu 0} &= \omega \tilde{\tilde{H}}_{00} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{j0} \\
&= \omega \tilde{\tilde{H}}_{00} + q^j \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{00} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{j0}^T \\
&= \omega \tilde{\tilde{H}}_{00} - \frac{|\mathbf{q}|^2 \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{00} + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{\mu k} &= \omega \tilde{\tilde{H}}_{0k} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{jk} \\
&= \omega \tilde{\tilde{H}}_{0k} + q^j (\tilde{\tilde{H}}_{jk}^{LL} + \tilde{\tilde{H}}_{jk}^{LT} + \tilde{\tilde{H}}_{jk}^{TL} + \tilde{\tilde{H}}_{jk}^{TT}) \\
&= \omega \tilde{\tilde{H}}_{0k} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{jk}^{LL} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{jk}^{LT} + 0 + 0 \\
&= \omega \left[\frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{00} + \tilde{\tilde{H}}_{0k}^T \right] + q^j \frac{q_j q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{\tilde{H}}_{00} + q^j \left[\frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{0k} + \frac{q_j q_k q^n \omega}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{\tilde{H}}_{0n} \right] \\
&= \frac{q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{00} + \omega \left[\tilde{\tilde{H}}_{0k} + \frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{0n} \right] - \frac{q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{00} + \left[-\omega \tilde{\tilde{H}}_{0k} - \frac{q_k q^n \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\tilde{H}}_{0n} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Podobnie w drugiej współrzędnej ponieważ tensor jest symetryczny.

$$q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{0\mu} = 0$$

$$q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{j\mu} = 0$$

Poprawka do tensora hadronowego

Dla składowej $\mu = 0$ i $\nu = 0$ poprawka do tensora hadronowego wynosi zero.

$$\tilde{\tilde{H}}_{00} = \tilde{H}_{00}$$

$$\Delta H_{00} = 0$$

Dla składowej czasowej ($\mu = 0$ lub $\nu = 0$) obliczamy poprawkę ΔH_{j0} do tensora hadronowego.

$$\tilde{\tilde{H}}_{j0} = \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{00} + \left[\tilde{H}_{j0} + \frac{q_j q^k}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{k0} \right]$$

$$\Delta H_{j0} = \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{00} + \frac{q_j q^k}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{k0} =$$

$$= \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} (-|\mathbf{q}^2|) \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] +$$

$$+ \frac{q_j q^k}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} (-q_k \tilde{\omega}) \tilde{H}_1 + \left(p_k - q_k \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] =$$

(zweźamy po k)

$$= \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} (-|\mathbf{q}^2|) \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] +$$

$$+ \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} (|\mathbf{q}^2| \tilde{\omega}) \tilde{H}_1 - \left((\mathbf{q}, \mathbf{p}) - |\mathbf{q}^2| \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] =$$

(wykorzystujemy wzór (2.1))

$$= \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} (-|\mathbf{q}^2|) \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] +$$

$$+ \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} (|\mathbf{q}^2| \tilde{\omega}) \tilde{H}_1 - \tilde{\omega} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] =$$

(porządkujemy wyrazy)

$$= (\omega - \tilde{\omega}) \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left(-|\mathbf{q}|^2 \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right) =$$

$$= q_j (\omega - \tilde{\omega}) \left(-\frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right)$$

Skorzystaliliśmy z zależności:

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}, \mathbf{p}) - |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} &= (\mathbf{q}, \mathbf{p}) + (\tilde{\omega}^2 - |\mathbf{q}|^2) \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} - \tilde{\omega}^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} = \tilde{\omega} E_p - \tilde{\omega}^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} = \tilde{\omega} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) - |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} &= \tilde{\omega} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dla składowej przestrzennej ($j, k = 1, 2, 3$) obliczamy poprawkę ΔH_{jk} do tensora hadronowego.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{jk} &= \frac{q_j q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{00} + \left[\frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{0k} + \frac{q_j q_k q^n \omega}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{0n} \right] + \\ &\left[\frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{j0} + \frac{q_k q_j q^m \omega}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{m0} \right] + \left[\tilde{H}_{jk} + \frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} + \frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{jn} + \frac{q_k q_j q^n q^m}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{jk} &= \frac{q_j q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{00} + \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{0k} + \frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{0j} + 2 \frac{q_j q_k q^n \omega}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{0n} + \\ &+ \frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{mk} + \frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{H}_{jn} + \frac{q_k q_j q^n q^m}{|\mathbf{q}|^4} \tilde{H}_{mn} \end{aligned}$$

(wstawiamy wyrażenia na składowe tensora hadronowego)

$$\begin{aligned} &= \frac{q_j q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^4} \left[\frac{1}{4} (-|\mathbf{q}^2|) \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] + \\ &+ \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (-q_k \tilde{\omega}) + \left(p_k - q_k \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\ &+ \frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (-q_j \tilde{\omega}) + \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\ &+ 2 \frac{q_j q_k \omega}{|\mathbf{q}|^4} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (|\mathbf{q}|^2 \tilde{\omega}) + \left(-(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\ &+ \frac{q_j q^m}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (g_{mk} \tilde{q}^2 - q_m q_k) + \left(p_m - q_m \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_k - q_k \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\ &+ \frac{q_k q^n}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (g_{nj} \tilde{q}^2 - q_n q_j) + \left(p_n - q_n \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\ &+ \frac{q_k q_j q^n q^m}{|\mathbf{q}|^4} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (g_{mn} \tilde{q}^2 - q_m q_n) + \left(p_m - q_m \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_n - q_n \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] = \end{aligned}$$

(zweźamy po m i n)

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_j q_k \omega^2}{|\mathbf{q}|^4} \left[\frac{1}{4} (-|\mathbf{q}|^2) \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] + \\
&+ \frac{q_j \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (-q_k \tilde{\omega}) + \left(p_k - q_k \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\
&+ \frac{q_k \omega}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (-q_j \tilde{\omega}) + \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\
&+ 2 \frac{q_j q_k \omega}{|\mathbf{q}|^4} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (|\mathbf{q}|^2 \tilde{\omega}) + \left(-(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\
&+ \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (q_k \tilde{\omega}^2) + \left(-(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_k - q_k \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\
&+ \frac{q_k}{|\mathbf{q}|^2} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (q_j \tilde{\omega}^2) + \left(-(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\
&+ \frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^4} \left[\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (-\tilde{\omega}^2 |\mathbf{q}|^2) + \left((\mathbf{q}, \mathbf{p}) - |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] =
\end{aligned}$$

(wykorzystujemy wzór (2.1))

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 (-\omega^2 + \tilde{\omega}^2) + \left[\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^4} (\omega^2 + \tilde{\omega}^2 - 2\omega\tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\
&\left. (\omega - \tilde{\omega}) \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_k - q_k \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) + (\omega - \tilde{\omega}) \frac{q_k}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2 =
\end{aligned}$$

(wykorzystujemy wzór (2.2))

$$\begin{aligned}
&= -\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) + \left[\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^4} (\omega^2 + \tilde{\omega}^2 - 2\omega\tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\
&\left. (\omega - \tilde{\omega}) \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_k - q_k \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) + (\omega - \tilde{\omega}) \frac{q_k}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_j - q_j \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right. \\
&\left. 2(\omega - \tilde{\omega}) \frac{q_j q_k}{|\mathbf{q}|^2 |\mathbf{q}|^2} \tilde{\omega} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \right] \tilde{H}_2 =
\end{aligned}$$

(porządkujemy wyrazy)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) + (\omega - \tilde{\omega}) \left[\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^4} (\omega + \tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\
&\left. \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_k - q_k \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) + \frac{q_k}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_j - q_j \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2
\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z zależności:

$$\begin{aligned} \left(p_k - q_k \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right) &= \left(p_k - q_k \frac{E_p \tilde{\omega} - \tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\tilde{q}^2} \right) = \left(p_k - q_k \frac{E_p \tilde{\omega} |\mathbf{q}|^2 - \tilde{\omega}^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2 \tilde{q}^2} - q_k \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) = \\ &= \left(p_k - q_k \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \frac{E_p |\mathbf{q}|^2 - \tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\tilde{q}^2} - q_k \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) = \left(p_k - q_k \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \frac{E_p (\tilde{\omega}^2 - \tilde{q}^2) - \tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\tilde{q}^2} - q_k \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) = \\ &= p_k + q_k \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right) - q_k \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} = \left(p_k - q_k \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) + q_k \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\left(p_k - q_k \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right) = \left(p_k - q_k \frac{\tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) + q_k \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right) \quad (2.2)$$

Policzmy poprawkę do zwiężenia tensorów.

$$\Delta H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = 2\Delta H_{j0} L^{j0} + \Delta H_{jk} L^{jk}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{j0} L^{j0} &= q_j (\omega - \tilde{\omega}) \left(-\frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right) \frac{1}{2} (E_k k'^j + E'_k k^j) \\ & \quad (\text{zweźamy po } j) \\ &= -(\omega - \tilde{\omega}) \left(-\frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right) \frac{1}{2} (E_k(\mathbf{k}', \mathbf{q}) + E'_k(\mathbf{k}, \mathbf{q})) \\ &= -(\omega - \tilde{\omega}) \left(-\frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right) \frac{1}{2} (E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) = \\ &= \frac{1}{8} (\omega - \tilde{\omega}) \left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) \tilde{H}_1 \\ & \quad - \frac{1}{2|\mathbf{q}|^2} (\omega - \tilde{\omega}) \left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q}, p}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta H_{jk} L^{jk} &= -\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \frac{1}{2} (k^j k'^k + k'^j k^k - (k'k) g^{jk}) + \\ &+ (\omega - \tilde{\omega}) \left[\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^4} (\omega + \tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. 2 \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_k - q_k \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2 \frac{1}{2} (k^j k'^k + k'^j k^k - (k'k) g^{jk}) =\end{aligned}$$

(podstawiamy $k' = k - q$)

$$\begin{aligned}&= -\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \frac{1}{2} (2k^j k^k - k^j q^k - k^k q^j - (k', k) g^{jk}) + \\ &+ (\omega - \tilde{\omega}) \left[\frac{q_k q_j}{|\mathbf{q}|^4} (\omega + \tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. 2 \frac{q_j}{|\mathbf{q}|^2} \left(p_k - q_k \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2 \frac{1}{2} (2k^j k^k - k^j q^k - k^k q^j - (k'k) g^{jk}) =\end{aligned}$$

(zwięzamy po j i k)

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} H_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \frac{1}{2} (2(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2 - 2(\mathbf{k}, \mathbf{q})|\mathbf{q}|^2 + (k'k)|\mathbf{q}|^2) \\ &+ (\omega - \tilde{\omega}) \left[\frac{1}{2} (2(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2 - 2(\mathbf{k}, \mathbf{q})|\mathbf{q}|^2 + (k'k)|\mathbf{q}|^2) \frac{1}{|\mathbf{q}|^4} (\omega + \tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\ &\frac{2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^4} \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) + \\ &\left. + \frac{(k', k) - 2(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{2|\mathbf{q}|^2} \left((\mathbf{q}, \mathbf{p}) - |\mathbf{q}|^2 \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2 =\end{aligned}$$

(ostatni człon wynosi 0)

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \frac{1}{2} (2(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2 - 2(\mathbf{k}, \mathbf{q})|\mathbf{q}|^2 - q^2|\mathbf{q}|^2/2) \\ &+ (\omega - \tilde{\omega}) \left[((\mathbf{k}, \mathbf{q})^2 - (\mathbf{k}, \mathbf{q})|\mathbf{q}|^2 - q^2|\mathbf{q}|^2/4) \frac{1}{|\mathbf{q}|^4} (\omega + \tilde{\omega}) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 + \right. \\ &\frac{2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2} \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left. \right] \tilde{H}_2 \\ &= -\frac{1}{4} \tilde{H}_1 (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) + \\ &+ \tilde{H}_2 \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) \\ &+ \tilde{H}_2 \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} (\omega - \tilde{\omega}) \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) (2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2)\end{aligned}$$

Całkowita poprawka do zwiężenia tensorów:

$$\begin{aligned}
\Delta H^{\mu\nu} L_{\mu\nu} &= 2\Delta H^{j0} L_{j0} + \Delta H^{jk} L_{jk} = \\
&= 2\frac{1}{8}(\omega - \tilde{\omega}) \left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) \tilde{H}_1 \\
&\quad - 2\frac{1}{2|\mathbf{q}|^2}(\omega - \tilde{\omega}) \left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 + \\
&\quad - \frac{1}{4} \tilde{H}_1 \left(\omega^2 - \tilde{\omega}^2 \right) \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) + \\
&\quad + \tilde{H}_2 \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} (\omega - \tilde{\omega}) \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) (2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) \\
&\quad + \tilde{H}_2 \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) = \\
&= \frac{1}{4}(\omega - \tilde{\omega}) \left[\left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) - (\omega + \tilde{\omega}) \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) \right] \tilde{H}_1 \\
&\quad - (\omega - \tilde{\omega}) \left[\left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) - (\omega + \tilde{\omega}) \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) \right] \\
&\quad \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 + \\
&\quad + (\omega - \tilde{\omega}) \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) (2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) \tilde{H}_2 = \\
&= -C_1 \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + C_2 \tilde{H}_2
\end{aligned}$$

$$\Delta H^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = -C_1 \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + C_2 \tilde{H}_2$$

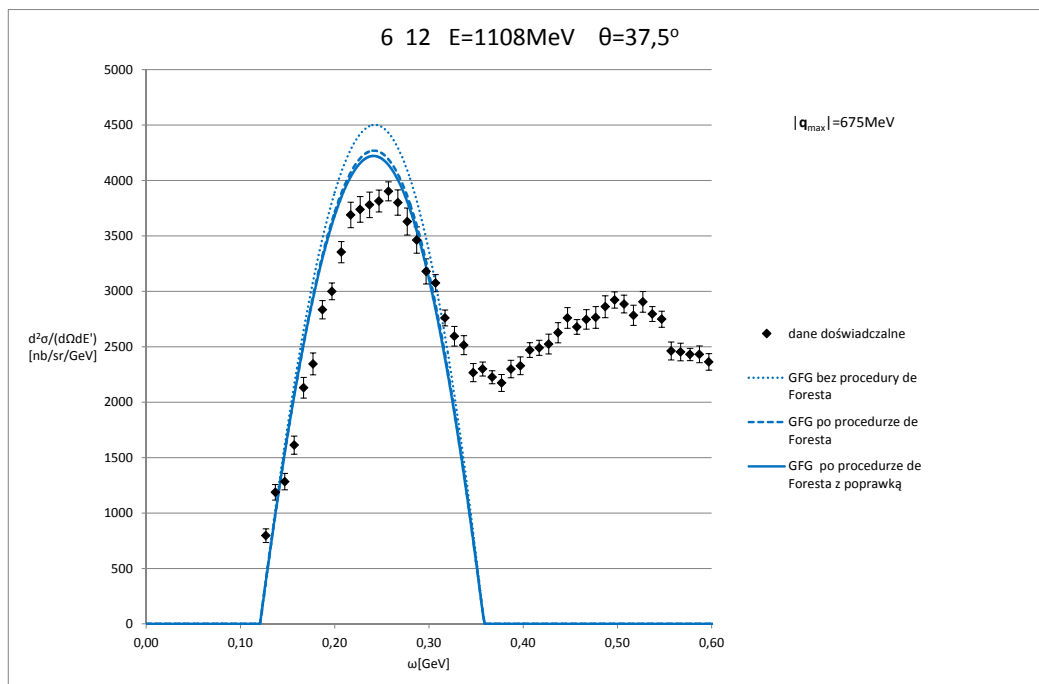
Współczynniki C_1 i C_2 wynoszą

$$\begin{aligned}
C_1 &= -(\omega - \tilde{\omega}) \left[\left(E_k(2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2) - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right) - (\omega + \tilde{\omega}) \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) - q^2/4 \right) \right] = \\
&= (\omega - \tilde{\omega}) \left[(\omega + \tilde{\omega}) \left(\frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})^2}{|\mathbf{q}|^2} - (\mathbf{k}, \mathbf{q}) + |\mathbf{q}|^2/4 - \omega^2/4 \right) - \left(|\mathbf{q}| E_k \left(\frac{2(\mathbf{q}, \mathbf{k})}{|\mathbf{q}|} - |\mathbf{q}| \right) - \omega(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \right) \right] = \\
&= (\omega - \tilde{\omega}) \left[\frac{1}{4} (Q^2 - \omega^2) (\omega + \tilde{\omega}) - (|\mathbf{q}| E_k Q - \omega(\mathbf{q}, \mathbf{k})) \right]
\end{aligned}$$

$$C_2 = C_1 P^2 + (\omega - \tilde{\omega}) P Q \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{k})(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right)$$

$$Q = \frac{2(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|} - |\mathbf{q}|$$

$$P = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)$$



Rysunek 2.5. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG, $E_k = 1108MeV$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]

Na rysunku 2.5 pokazano jak zmienia się wykres przekroju czynnego po zastosowaniu procedury de Foresta, a następnie po dodaniu poprawki. Wykresy sporządzono dla węgla w modelu *GFG* dla energii elektronów $E_k = 1108MeV$ i kąta rozproszenia $\theta = 37,5^\circ$. Wykres kropkowy przedstawia przekrój czynny przed procedurą de Foresta, wykres narysowany linią przerywaną przedstawia przekrój czynny po procedurze de Foresta, wykres ciągły przedstawia przekrój czynny po procedurze de Foresta i po dodaniu poprawki.

Drugi sposób wyliczania poprawki

Inna procedura podana w [4] polega na pozostawieniu składowych podłużnych bez zmian i modyfikacji składowych czasowych tak aby prąd był zachowany:

$$\tilde{H}_{00} \rightarrow \frac{q^m q^n}{\omega^2} \tilde{H}_{mn}$$

$$\tilde{H}_{0k} \rightarrow \tilde{H}_{0k} = -\frac{q^m}{\omega} \tilde{H}_{mk}$$

$$\tilde{H}_{j0} \rightarrow \tilde{H}_{j0} = -\frac{q^n}{\omega} \tilde{H}_{jn}$$

$$\tilde{H}_{jk} \rightarrow \tilde{H}_{jk} = \tilde{H}_{jk}$$

Szczegółowe obliczenia znajdują się w dodatku D. Końcowa postać poprawki do zwięzienia tensorów ma postać:

$$\Delta H^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = -D_1 \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + D_2 \tilde{H}_2$$

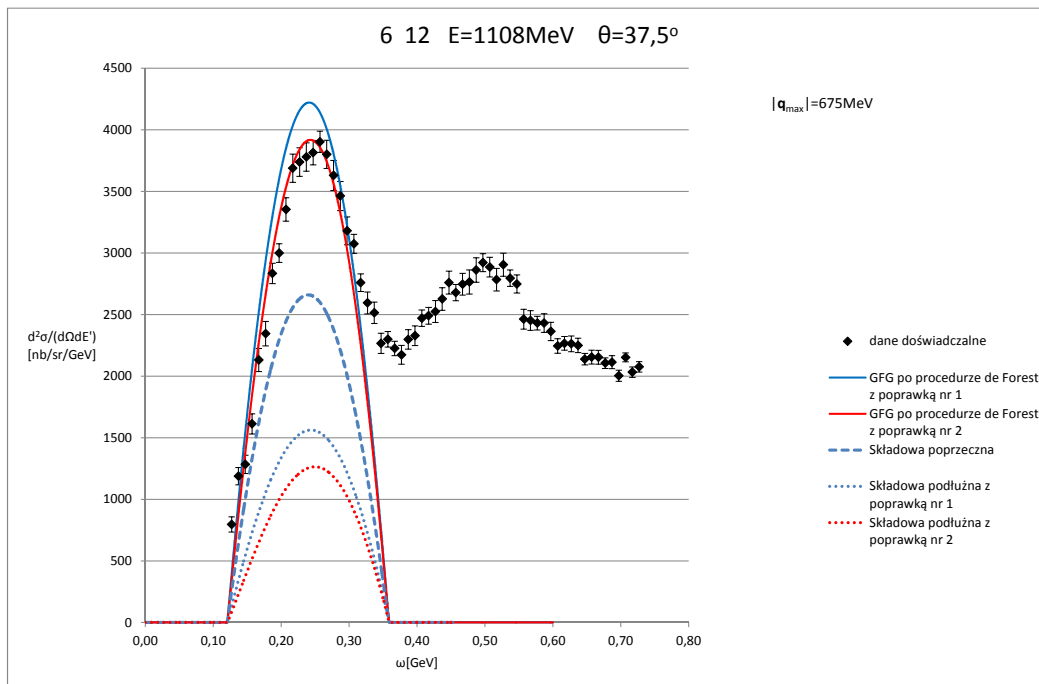
$$D_1 = (\omega - \tilde{\omega}) \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} (E_k |\mathbf{q}| Q - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - \frac{1}{4} (\omega - \tilde{\omega}) (Q^2 - \omega^2) \frac{|\mathbf{q}|^4}{\omega^4} \right)$$

$$D_2 = \left[\frac{|\mathbf{q}|^2}{\omega^2} P (\omega - \tilde{\omega}) Q \left((\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) + D_1 P^2 \right]$$

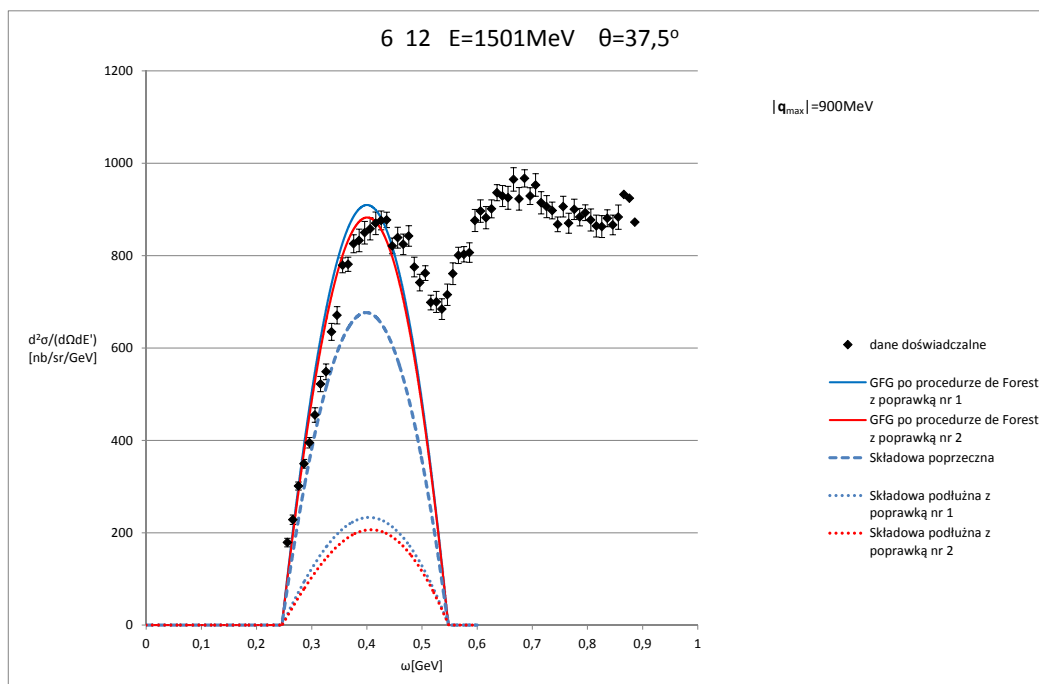
$$Q = \frac{2(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|} - |\mathbf{q}|$$

$$P = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{q^2} \right)$$

Na wykresach na rys 2.6 i 2.7 przedstawiono przekrój czynny dla węgla w modelu *GFG*. Linia przerywaną przedstawiono składową poprzeczną przekroju czynnego, a składowe podłużne liniami kropkowymi.



Rysunek 2.6. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG, $E_k = 1108\text{MeV}$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]



Rysunek 2.7. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG, $E_k = 1501\text{MeV}$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]

Procedura druga różni się od poprzedniej jedynie w składowej podłużnej przekroju czynnego, składowa ta maleje wraz ze wzrostem wartości przekazu pędu $|\mathbf{q}|$, a zatem wraz ze wzrostem $|\mathbf{q}|$ maleje różnica między dwiema powyższymi procedurami. W dalszej części pracy będziemy stosować procedurę pierwszą.

Obliczenie całki

Przekształcimy formułę na różniczkowy przekrój czynny do formy użytej w programie generującym wykres.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} &= \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4} \int \frac{1}{E_p E'_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(\epsilon + E_{p'} - E_p - \omega) dp^3 = \\
&= \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4} \int \frac{1}{E_p E'_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \\
&\delta(\epsilon + \sqrt{M^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} - \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2} - \omega) d\phi d \cos(\zeta) |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| = \\
&= \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4} \int \frac{1}{E_p E'_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \\
&\delta(\epsilon + \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos(\zeta)} - \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2} - \omega) d\phi d \cos(\zeta) |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| = \\
&= \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4} \int \frac{1}{E_p E'_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \frac{E'_p}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \theta(1 - (\cos(\zeta)_o)^2) \\
&\delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_o) d\phi d \cos(\zeta) |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\epsilon + \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos(\zeta)_o} - \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2} - \omega &= 0 \\
|\mathbf{q}|^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos(\zeta)_o &= (\omega - \epsilon)(\omega - \epsilon + 2\sqrt{M^2 + |\mathbf{p}|^2}) \\
\cos(\zeta)_o &= \frac{(\omega - \epsilon)(\omega - \epsilon + 2E_p) - |\mathbf{q}|^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} &= \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4 |\mathbf{q}|} \int \frac{1}{E_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \theta(1 - (\cos(\zeta)_o)^2) \\
&\delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_o) d\phi d \cos(\zeta) |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}\tilde{H}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(k^\mu k'^\nu + k'^\nu k'^\mu - (k, k')g^{\mu\nu}) \left[\frac{1}{4}\tilde{H}_1\tilde{q}^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{\tilde{q}_\mu\tilde{q}_\nu}{\tilde{q}^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left(p_\mu - \tilde{q}_\mu \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(p_\nu - \tilde{q}_\nu \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] = \\
&= \frac{1}{8}\tilde{H}_1\tilde{q}^2 \left((k, k') + 2(k, k') - 2\frac{(k, \tilde{q})(k', \tilde{q})}{\tilde{q}^2} - 4(k, k') \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[2 \left((p, k) - \frac{(\tilde{q}, k)(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left((pk') - \frac{(\tilde{q}, k')(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) - (k, k') \left(p^2 - \frac{(\tilde{q}, p)^2}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2 = \\
&= \frac{1}{8}\tilde{H}_1\tilde{q}^2 \left(-(k, k') - 2\frac{(k, \tilde{q})(k', \tilde{q})}{\tilde{q}^2} \right) + \\
&\quad \left[\left((p, k) - \frac{(\tilde{q}, k)(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left((p, k') - \frac{(\tilde{q}, k')(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) - \frac{1}{2}(k, k') \left(M^2 - \frac{(\tilde{q}, p)^2}{\tilde{q}^2} \right) \right] \tilde{H}_2 =
\end{aligned}$$

$$\Delta H^{\mu\nu}L_{\mu\nu} = -C_1\frac{1}{4}\tilde{H}_1 + C_2\tilde{H}_2$$

$$C_1 = (\omega - \tilde{\omega}) \left[\frac{1}{4}(Q^2 - \omega^2)(\omega + \tilde{\omega}) - (|\mathbf{q}|E_kQ - \omega(\mathbf{q}, \mathbf{k})) \right]$$

$$C_2 = C_1P^2 + (\omega - \tilde{\omega})PQ \left((\mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{k})(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}|^2} \right)$$

$$Q = \frac{2(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|} - |\mathbf{q}|$$

$$P = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)$$

Przyjmujemy oznaczenia kątów jak na rysunku 2.8

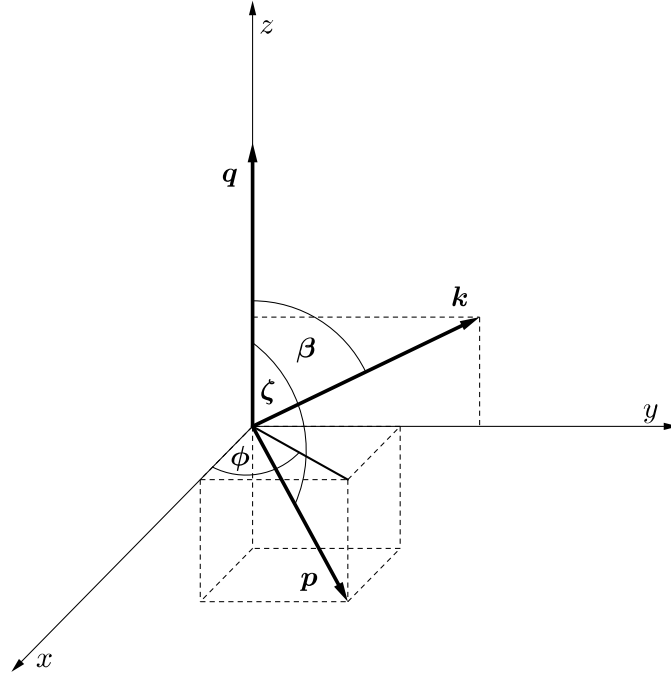
$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}|(0, 0, 1)$$

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}|(\cos(\phi)\sin(\zeta), \sin(\phi)\sin(\zeta), \cos(\zeta))$$

$$\zeta = \angle(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|(0, \sin(\beta), \cos(\beta))$$

$$\beta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{q})$$



Rysunek 2.8.

$$(k, k') = E_k E_k' (1 - \cos(\theta))$$

$$(k, \tilde{q}) = (k, q) - E_k \epsilon = -(k, k') - E_k \epsilon$$

$$(k', \tilde{q}) = (k', q) - E_k' \epsilon = (k, k') - E_k' \epsilon$$

$$(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = E_k |\mathbf{q}| \cos(\beta)$$

$$(p, k') = (p, k) - (p, q) = E_p E_k' - |\mathbf{p}| E_k (\sin(\phi) \sin(\zeta) \sin(\beta) + \cos(\zeta) \cos(\beta)) + |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos(\zeta)$$

$$(p, k) = E_p E_k - |\mathbf{p}| E_k (\sin(\phi) \sin(\zeta) \sin(\beta) + \cos(\zeta) \cos(\beta))$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = |\mathbf{p}| E_k (\sin(\phi) \sin(\zeta) \sin(\beta) + \cos(\zeta) \cos(\beta))$$

$$(p, q) = E_p \omega - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos(\zeta)$$

$$(p, \tilde{q}) = E_p (\omega - \epsilon) - |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos(\zeta)$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos(\zeta)$$

$$0 = k'^2 = (k - q)^2 = q^2 - 2(kq) = q^2 - 2E_k (\omega - |\mathbf{q}| \cos(\beta))$$

$$\cos(\beta) = \frac{2E_k \omega - q^2}{2|\mathbf{q}| E_k}$$

$$\tilde{q}^2 = q^2 - 2\epsilon \omega + \epsilon^2$$

$$\frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} = \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4 |\mathbf{q}|} \int \frac{1}{E_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \theta(1 - (\cos(\zeta)_o)^2) \delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_o) d\phi d\cos(\zeta) |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|$$

po wycalkowaniu po ϕ znikną wyrazy proporcjonalne do $\sin(\phi)$ w pierwszej potędze.

$$\frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} = \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4 |\mathbf{q}|} \int \frac{1}{E_p} \left(2\pi L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} |_{\phi=0} + \pi |\mathbf{p}|^2 E_k^2 \sin(\zeta)^2 \sin(\beta)^2 \tilde{H}_2 \right) \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \theta(1 - (\cos(\zeta)_o)^2) \delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_o) d\cos(\zeta) |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|$$

2.5. Lokalny gaz Fermiego

W poprzednim podrozdziale znaleźliśmy wyrażenie na różniczkowy przekrój czynny na rozproszenie elektronu na nukleonie w modelu globalnego gazu Fermiego:

$$\frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} = \frac{3Z\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4 |\mathbf{q}|} \int \frac{1}{E_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F) \theta(1 - (\cos(\zeta)_o)^2) \delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_o) d\phi d\cos(\zeta) |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|$$

Model globalnego gazu Fermiego zakłada, że gęstość materii jądrowej jest stałą wewnątrz jądra. Jądro w postaci jednorodnej kuli należy traktować jako przybliżenie. Kształt wielu jąder odbiega od kulistego, a gęstość materii jądrowej zmniejsza się w obszarze peryferyjnym.

Rozkład gęstości ładunku w jądrze $\rho(r)$ będzie unormowany w następujący sposób:

$$Z = \int dr^3 \rho(r)$$

Do wyrażenia rozkładu gęstości użyjemy funkcji analitycznej (model 3-paramerowy):

$$\rho(r) = \frac{\rho_0(1 + \frac{wr^2}{c^2})}{1 + e^{(r-c)/z}} \quad (2.3)$$

gdzie wartości parametrów w, z, c dla wybranych jąder znajdują się w tabeli 2.1.

jądro	c [fm]	z [fm]	w
12 C	2.355(4)	0.5224(20)	-0.149(5)
16 O	2.608(36)	0.513(5)	-0.051(20)
40 Ca	3.6685	0.5839	-0.1017

Tablica 2.1. Parametry rozkładu ładunku w wybranych jądrach, źródło: [7]

Rozważamy tylko jądra o równej liczbie protonów i neutronów, zakładamy, że rozkład gęstości neutronów jest taki sam jak protonów. Znajdujemy pęd Fermiego w funkcji odległości od centrum jądra:

$$\rho(r) = 2 \frac{4\pi p_F^3(r)}{3(2\pi)^3}$$

$$p_F(r) = (3\pi^2 \rho(r))^{1/3}$$

Obsadzenie stanów w morzu Fermiego:

$$n(\mathbf{p}, r) = \theta(p_F(r) - |\mathbf{p}|)$$

oraz blokowanie Pauliego:

$$1 - n(\mathbf{p} + \mathbf{q}, r) = \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F(r))$$

jest teraz funkcją odległości od centrum jądra.

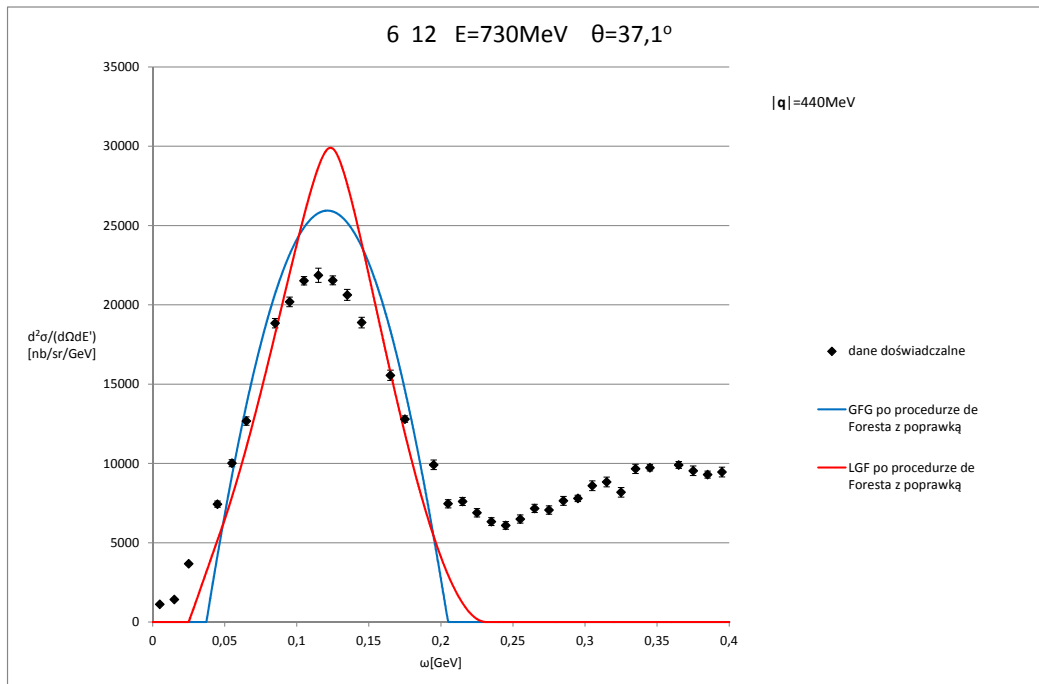
Prawdopodobieństwo interakcji zależy od położenia w jądrze, jest proporcjonalnie do koncentracji nukleonów. Przekrój czynny dla protonów w modelu lokalnego gazu Fermiego *LFG*:

$$\frac{d^2\sigma_p}{d\Omega dE'_k} = \frac{3\alpha^2 E'_k}{\pi p_F^3 E_k q^4 |\mathbf{q}|} \int dr^3 \rho(r) \int \frac{1}{E_p} L_{\mu\nu} \tilde{H}^{\mu\nu} \theta(p_F(r) - |\mathbf{p}|) \theta(|\mathbf{p} + \mathbf{q}| - p_F(r)) \theta(1 - (\cos(\zeta)_o)^2) \delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_o) d\phi d\cos(\zeta) |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|$$

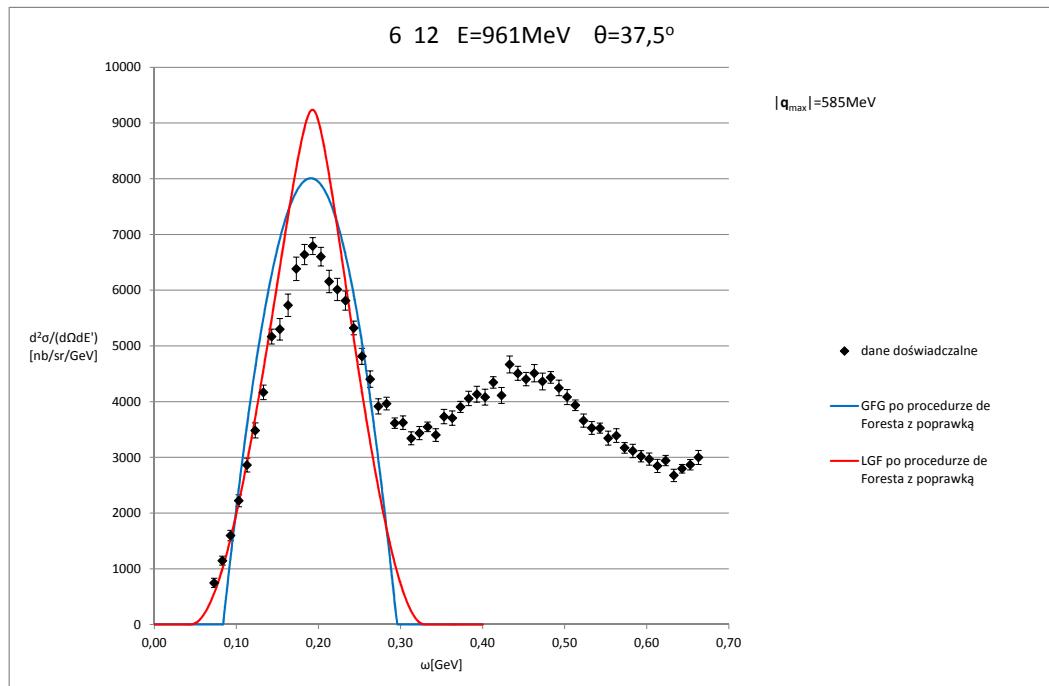
Przy generowaniu wykresów korzystamy z dipolowych elektromagnetycznych czynników postaci. Można posłużyć się czynnikami otrzymanymi z danych eksperymentalnych, które lepiej oddają rzeczywistość. Ale skupiałyśmy się na części teoretycznej i wyniki numeryczne mają znaczenie tylko ilustracyjne.

2.6. Wykresy

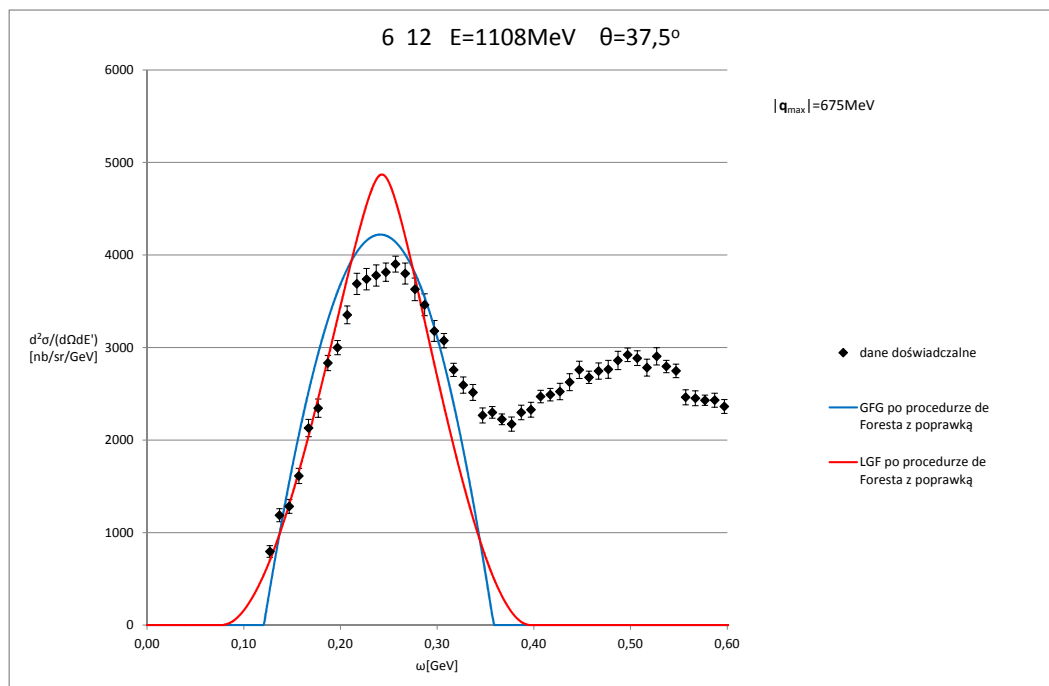
Węgiel



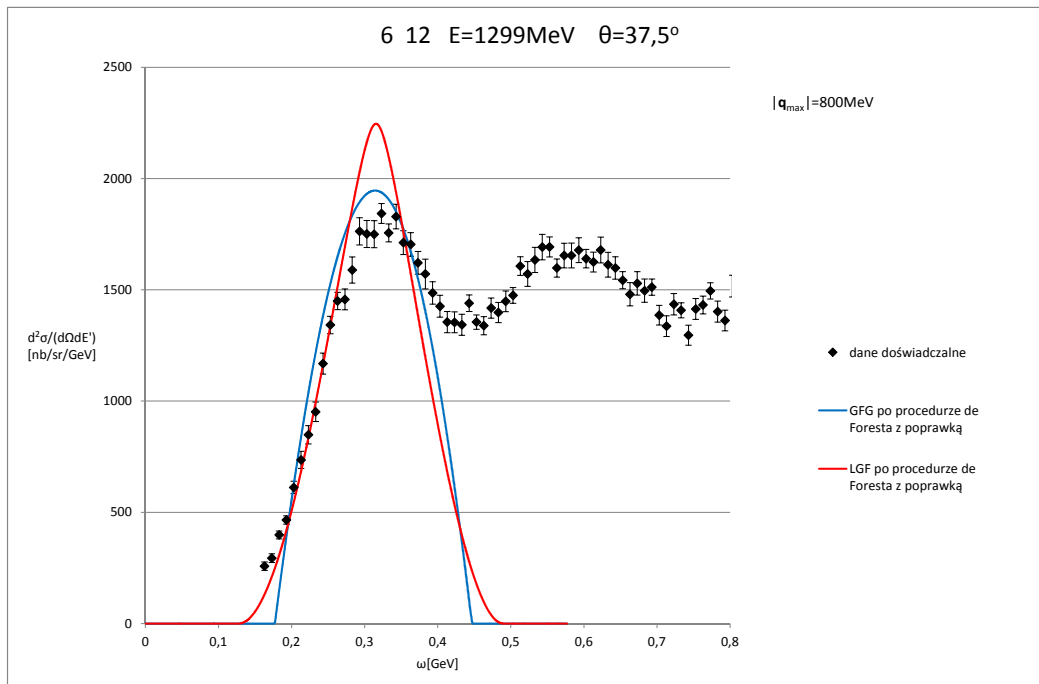
Rysunek 2.9. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG i LFG, $E_k = 730\text{MeV}$, $\theta = 37,1^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [11]



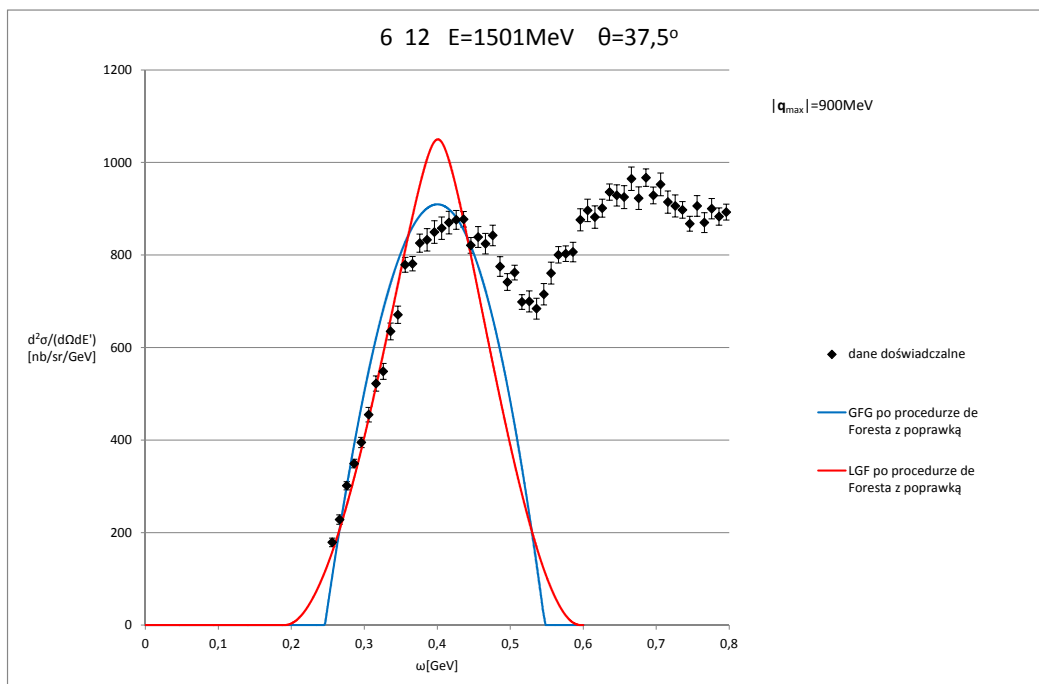
Rysunek 2.10. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG i LFG, $E_k = 961\text{MeV}$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]



Rysunek 2.11. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG i LFG, $E_k = 1108\text{MeV}$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]



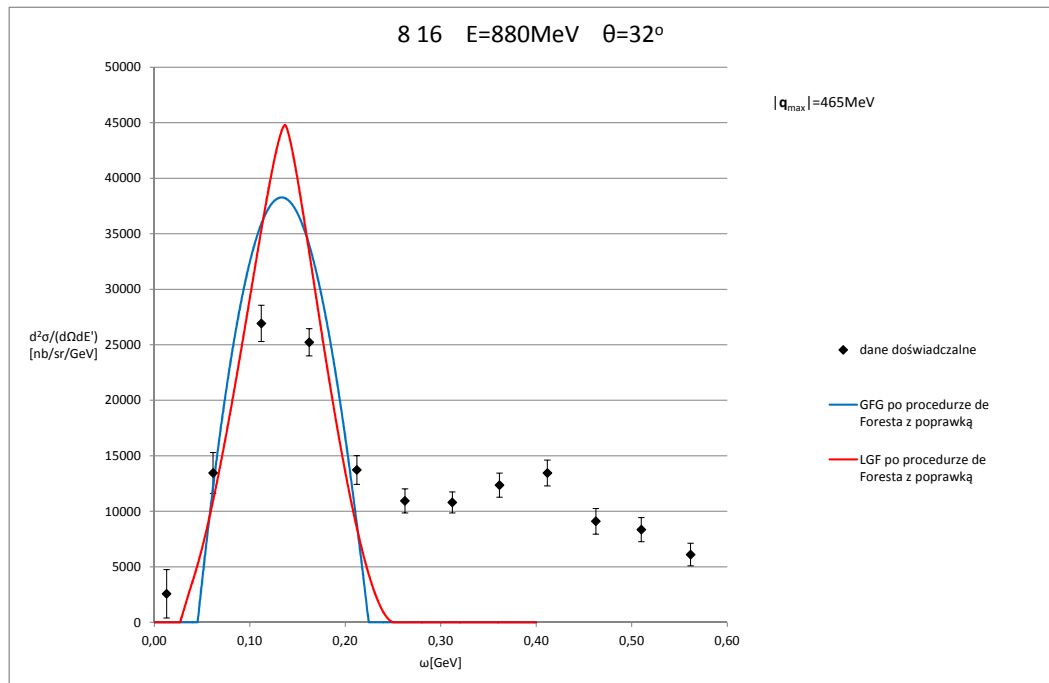
Rysunek 2.12. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG i LGF, $E_k = 1299\text{ MeV}$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]



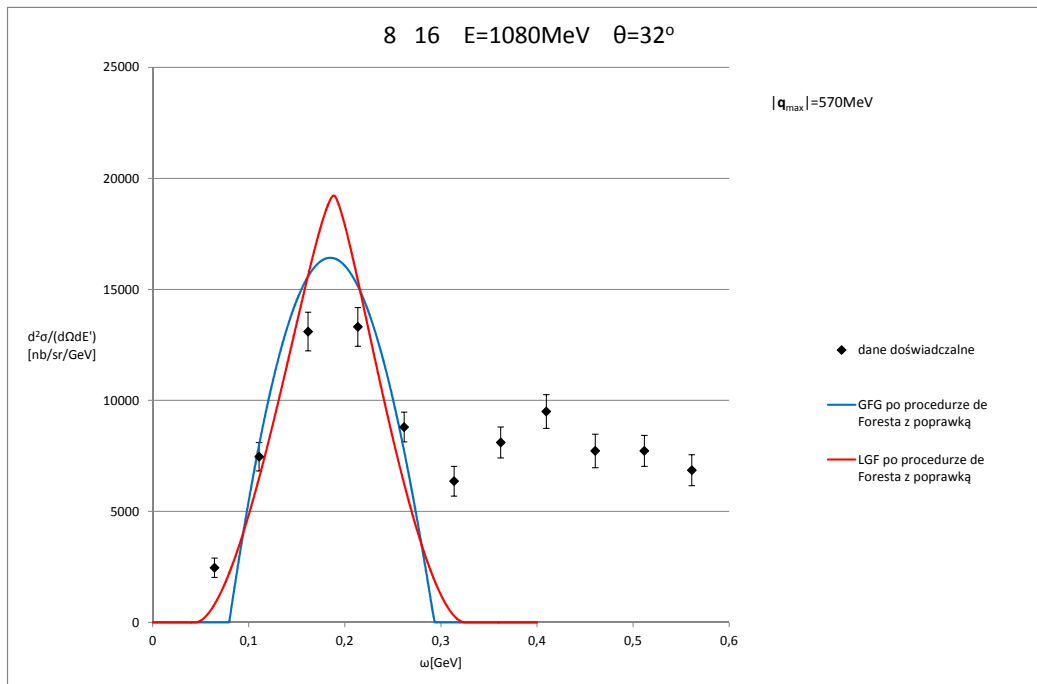
Rysunek 2.13. Różniczkowy przekrój czynny dla węgla w modelu GFG i LGF, $E_k = 1501\text{ MeV}$, $\theta = 37,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [10]

Wykresy na rys. 2.9-2.13 przedstawiają przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze węgla w modelach globalnego gazu Fermiego (*GFG*) i lokalnego gazu Fermiego (*LGF*). Całkowanie wykonano numerycznie. Za energię wiązania przyjęto wartość $\epsilon = 25\text{MeV}$, dla *GFG* a za pęd Fermiego przyjęto średnią wartość pędu Fermiego po rozkładzie gęstości, $p_F = 201\text{MeV}$.

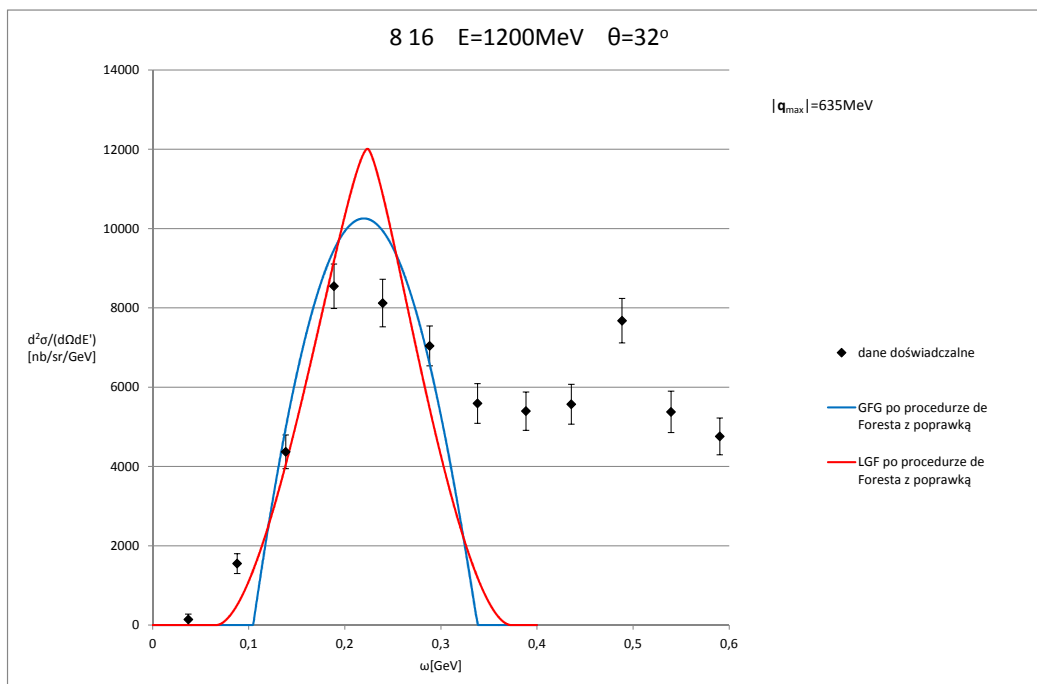
Tlen



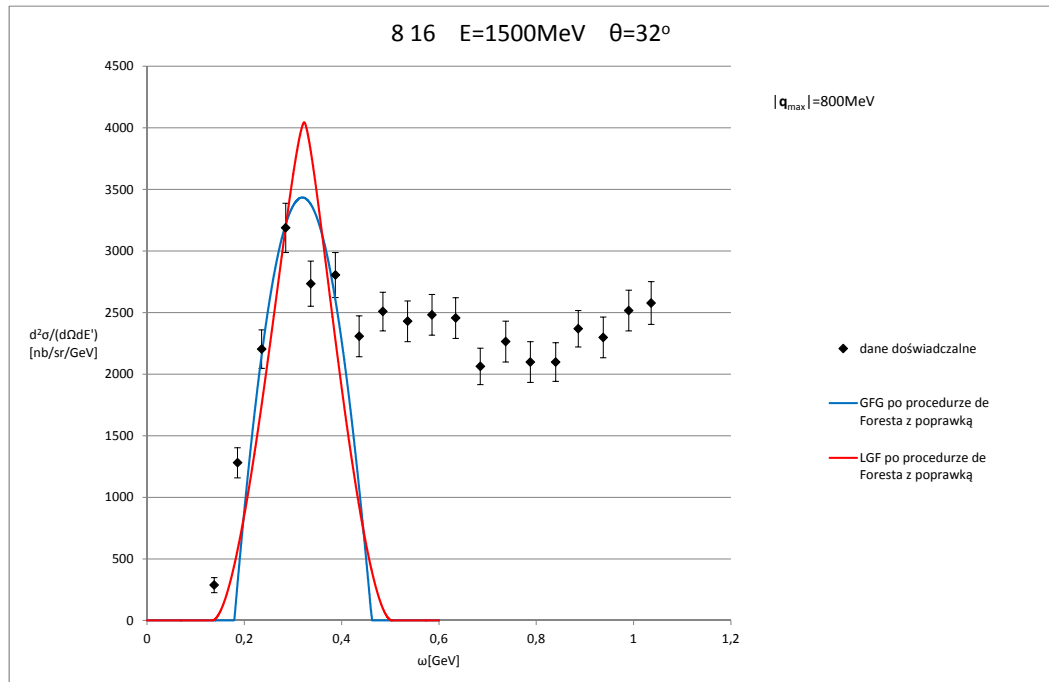
Rysunek 2.14. Różniczkowy przekrój czynny dla tlenu w modelu GFG i LFG, $E_k = 880\text{MeV}$, $\theta = 32^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [9]



Rysunek 2.15. Różniczkowy przekrój czynny dla tlenu w modelu GFG i LFG, $E_k = 1080\text{MeV}$, $\theta = 32^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [9]



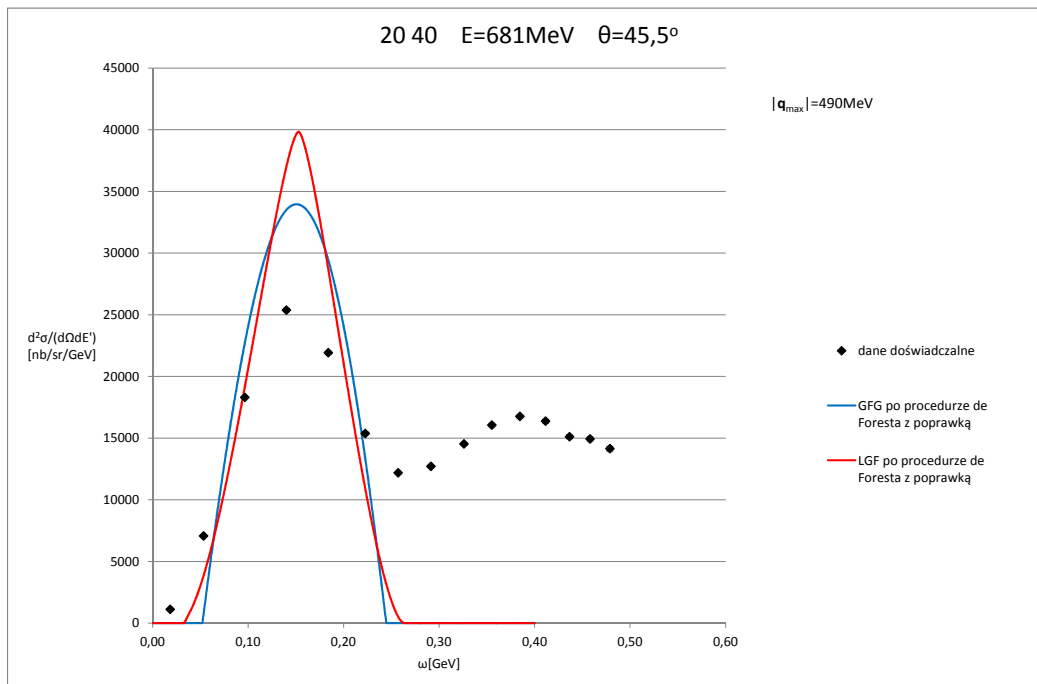
Rysunek 2.16. Różniczkowy przekrój czynny dla tlenu w modelu GFG i LFG, $E_k = 1200\text{MeV}$, $\theta = 32^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [9]



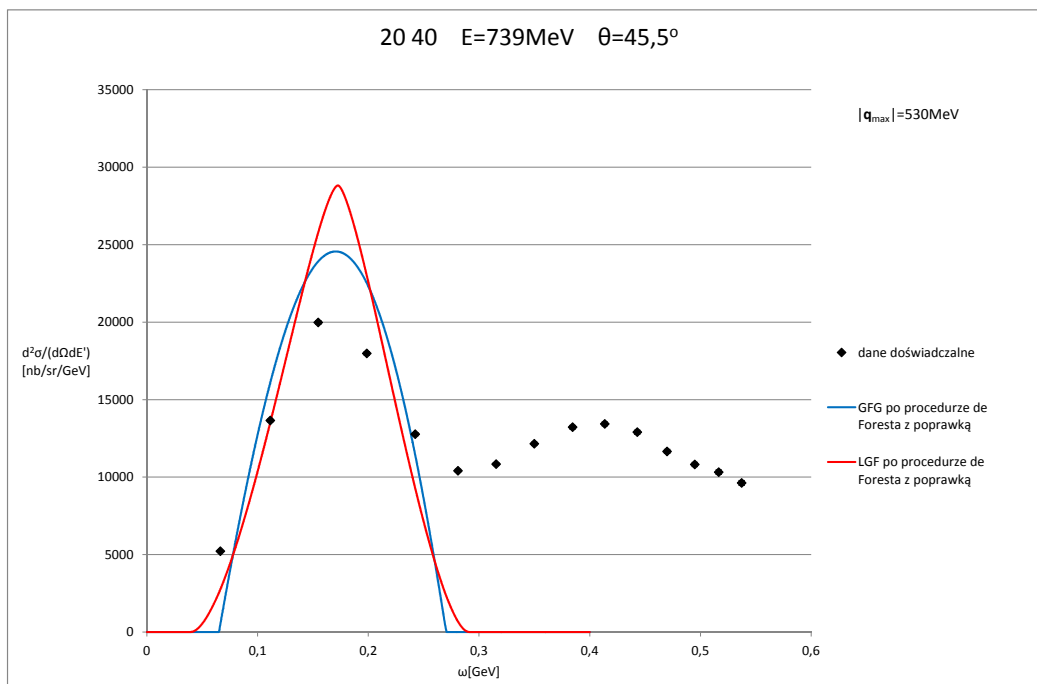
Rysunek 2.17. Różniczkowy przekrój czynny dla tlenu w modelu GFG i LFG, $E_k = 1500MeV$, $\theta = 32^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [9]

Wykresy na rys. 2.14-2.17 przedstawiają przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze tlenu w modelach globalnego gazu Fermiego (*GFG*) i lokalnego gazu Fermiego (*LGF*). Całkowanie wykonano numerycznie. Za energię wiązania przyjęto wartość $\epsilon = 27MeV$, dla *GFG*, a za pęd Fermiego przyjęto średnią wartość pędu Fermiego po rozkładzie gęstości, $p_F = 200MeV$.

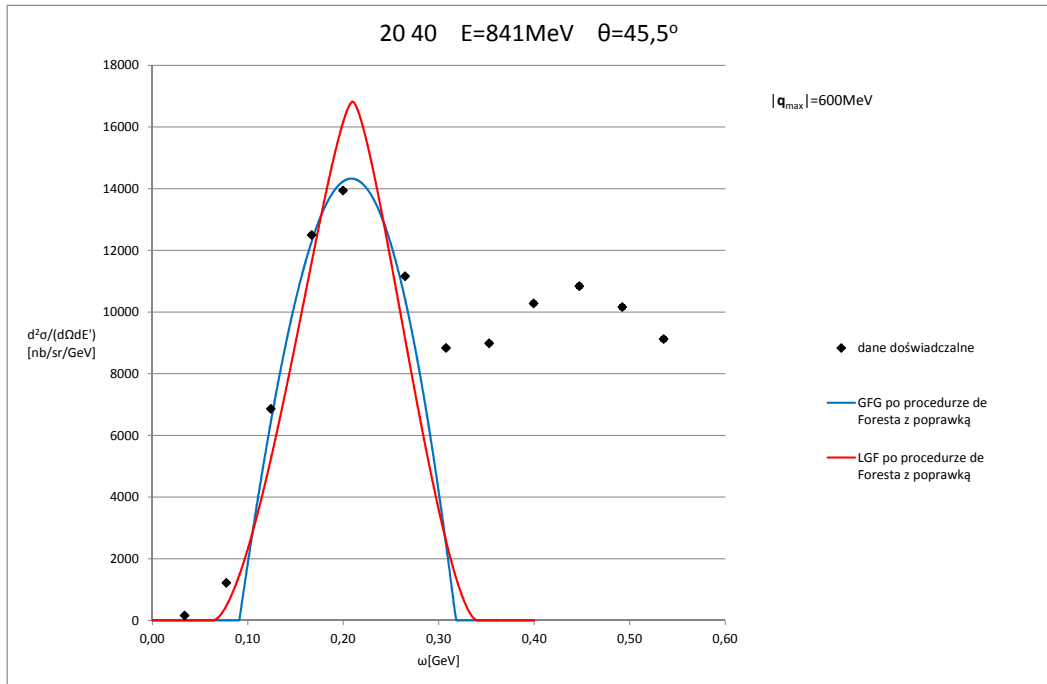
Wapń



Rysunek 2.18. Różniczkowy przekrój czynny dla wapnia w modelu GFG i LFG, $E_k = 681\text{MeV}$, $\theta = 45,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [8]



Rysunek 2.19. Różniczkowy przekrój czynny dla wapnia w modelu GFG i LFG, $E_k = 739\text{MeV}$, $\theta = 45,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [8]



Rysunek 2.20. Różniczkowy przekrój czynny dla wapnia w modelu GFG i LFG, $E_k = 841 \text{ MeV}$, $\theta = 45,5^\circ$, źródło danych doświadczalnych: [8]

Wykresy na rys. 2.18-2.20 przedstawiają przekrój czynny dla rozpraszania elektronu na jądrze wapnia w modelach globalnego gazu Fermiego (*GFG*) i lokalnego gazu Fermiego (*LGF*). Całkowanie wykonano numerycznie. Za energię wiązania przyjęto wartość $\epsilon = 33 \text{ MeV}$, dla *GFG* a za pęd Fermiego przyjęto średnią wartość pędu Fermiego po rozkładzie gęstości, $p_F = 218 \text{ MeV}$.

Widać, że pik nie jest ostry jak w przypadku rozpraszania na swobodnym nukleonie, tylko poszerzony, co odzwierciedla rozkład pędów nukleonów w jądrze.

Wykres *LFG* daje gorsze rezultaty w centrum piku niż *GFG*. Widzimy że wykresy modelu *LGF* są szersze u podstawy w porównaniu z wykresami w modelu *GFG*. Jest to spowodowane wkładem od nukleonów o wyższej wartości pędu niż średnia wartość pędu Fermiego, którą użyliśmy w modelu *GFG*.

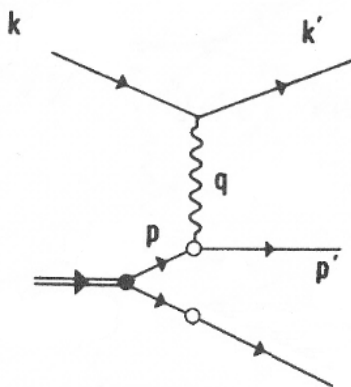
Ze wzrostem energii, przy zbliżonych wartościach kąta rozproszenia, obserwujemy wzrost dopasowania wykresów do danych doświadczalnych, zwłaszcza dla modelu

GFG. Jednocześnie rośnie wartość przekazu pędu w okolicach maksimum piku $|\mathbf{q}_{max}|$. Przybliżenie impulsowe staje się bardziej uzasadnione i daje lepsze wyniki. Na prawo od piku kwazielastycznego widzimy piki rezonansowe, których model nie odtwarza.

3. Skalowanie

Skalowanie jest cechą rozpraszania kwazielastycznego. Inkluzyjny przekrój czynny jest funkcją niezależnych zmiennych $|q|$ i ω . Mierzony eksperymentalnie przekrój czynny może zostać zapisany jako iloczyn przekroju czynnego na rozpraszanie elektron-nukleon i funkcji F związanej z rozkładem pędu nukleonów w jądrze, która jest funkcją przekazu pędu $|q|$ i przekazu energii ω . W przypadku dużych transferów pędu F będzie zależeć od pojedynczej zmiennej $y(|q|, \omega)$.

Zacznijmy od procesu rozpraszania elektronu na jądrze deuteru składającego się z jednego protonu i jednego neutronu. Stosujemy przybliżenie *PWIA*. W układzie związanym ze spoczywającym jądrem deuteru, elektron rozprasza się na nukleonie N o pędzie p , drugi nukleon N' ma pęd $-p$.



Rysunek 3.1. Schemat rozpraszania elektronu na jądrze deuteru w przybliżeniu *PWIA*

$$E_p + E_{p+q} = M_D + \omega$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$$

Niech $n(\mathbf{p})$ będzie funkcją rozkładu pędu. Oznaczmy σ_{eN} przekrój czynny na rozpraszanie elektron-nukleon. Przekrój czynny na rozpraszanie elektron na jądrze deuteru jest równy całce:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'_k} &= \sum_{N=p,n} \int dp^3 n(\mathbf{p}) \sigma_{eN} \delta(\omega + M_D - E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) = \\ &= 2\pi \sum_{N=p,n} \int_{p_{min}}^{p_{max}} d|\mathbf{p}||\mathbf{p}|^2 \int d\cos(\zeta) n(\mathbf{p}) \sigma_{eN} \delta(\omega + M_D - E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) = \\ &= 2\pi \sum_{N=p,n} \int_{p_{min}}^{p_{max}} d|\mathbf{p}||\mathbf{p}|^2 \int d\cos(\zeta) n(\mathbf{p}) \sigma_{eN} \frac{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_0) \\ &= 2\pi \sum_{N=p,n} \int_{p_{min}}^{p_{max}} n(\mathbf{p}) d|\mathbf{p}||\mathbf{p}| \int d\cos(\zeta) \tilde{\sigma}_{eN} \delta(\cos(\zeta) - \cos(\zeta)_0) \end{aligned}$$

Oznaczyliśmy $\tilde{\sigma}_{eN} = \sigma_{eN} \frac{E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|}$

Zakres zmiennej $|\mathbf{p}| \in (p_{min}, p_{max})$ wyznaczamy z warunku $\cos(\zeta)_0^2 \leq 1$.

$$\omega + M_D - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + 2\cos(\zeta)_0|\mathbf{q}||\mathbf{p}| + \mathbf{q}^2 + M^2} = 0$$

Procedura polega na ustaleniu wartości $|\mathbf{p}| = p_{min}$ w wyrażeniu $\tilde{\sigma}_{eN}$. Funkcja skalowania ma postać:

$$F(p_{min}) = \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'_k} \frac{1}{\left(\sum_{N=p,n} \tilde{\sigma}_{eN}\right)_{|\mathbf{p}|=p_{min}}}$$

w ogólności jest funkcją p_{min} i $|\mathbf{q}|$, ale dla dostatecznie dużych wartości przekazu pędu zależność od $|\mathbf{q}|$ znika i staje się funkcją jednej zmiennej p_{min} . Dla odpowiednio dużych wartości przekazu pędu przekrój czynny na deuterze faktoruje się do iloczynu dwóch czynników: przekroju czynnego na nukleonie oraz funkcji skalowania, która jest funkcją tylko jednej, odpowiednio dobranej zmiennej.

Analogicznie można postąpić w przypadku cięższych jąder. Postępujemy jak w [14]. Rozważmy rozproszenie kwazielastyczne elektronu na jądrze A . W stanie końcowym mamy jądro B , nukleon i elektron. Wzbudzenie jądra końcowego możemy

scharakteryzować przez wielkość:

$$\mathcal{E}(p) = \sqrt{M_B^2 + \mathbf{p}^2} - \sqrt{M_B^{02} + \mathbf{p}^2}$$

gdzie M_B to masa jądra po procesie, przeważnie w stanie wzbudzonym, podczas gdy M_B^0 to masa jądra w stanie podstawowym. Zachodzi nierówność $\mathcal{E}(p) \geq 0$

Najmniejszą wartość pędu $|\mathbf{p}|$, która odpowiada najmniejszej wartości energii wzbudzenia $\mathcal{E} = 0$, oznaczmy y ($-y$) dla ω większych (mniejszych) od wartości odpowiadającej pikowi kwazielastycznemu.

Znajdźmy wartość y :

$$\begin{aligned} E_B + E'_p &= M_A + \omega \\ \sqrt{M_B^2 + \mathbf{p}^2} + \sqrt{M^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} &= M_A + \omega \\ M^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 &= (M_A + \omega)^2 + M_B^2 + \mathbf{p}^2 - 2\sqrt{M_B^2 + \mathbf{p}^2}(M_A + \omega) \\ M^2 - M_B^2 - W + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos(\zeta) &= -2\sqrt{M_B^2 + \mathbf{p}^2}(M_A + \omega) \end{aligned}$$

gdzie: $W = (M_A + \omega)^2 - |\mathbf{q}|^2$

$$(M^2 - M_B^2 - W)^2 - 4M_B^2(M_A + \omega)^2 + 4|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos(\zeta)(M^2 - M_B^2 - W) + 4\mathbf{p}^2(|\mathbf{q}|^2 \cos^2(\zeta) - (M_A + \omega)^2) = 0$$

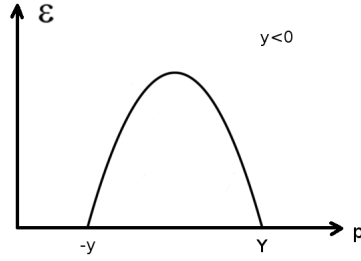
Pierwiastki równania wynoszą

$$|\mathbf{p}|_{\pm} = \frac{|\mathbf{q}|\cos(\zeta)(M^2 - M_B^2 - W) \pm (M_A + \omega)\sqrt{(M^2 - M_B^2 - W)^2 - 4M_B^2((M_A + \omega)^2 - |\mathbf{q}|^2 \cos^2(\zeta))}}{2((M_A + \omega)^2 - |\mathbf{q}|^2 \cos^2(\zeta))}$$

Przyjmujemy $M_B = M_B^0$. Dla obszaru za pikiem wartość minimalna pędu odpowiada rozwiązaniu $\cos(\zeta) = 1$ i +, tzn:

$$\begin{aligned} y &= \frac{|\mathbf{q}|(M^2 - M_B^{02} - W) + (M_A + \omega)\sqrt{(M^2 - M_B^{02} - W)^2 - 4M_B^{02}W}}{2W} = \\ &= \frac{|\mathbf{q}|(M^2 - M_B^{02} - W) + (M_A + \omega)\sqrt{(W - (M_B^0 + M)^2)(W - (M_B^0 - M)^2)}}{2W} \end{aligned}$$

a dla obszaru przed pikiem wybieramy $\cos(\zeta) = -1$ i -, czyli $-y$.



Rysunek 3.2.

Skupimy się na obszarze $y < 0$. Na rys 3.2 obszar pomiędzy wykresem a osią poziomą to obszar kinematycznie dozwolony dla ustalonych $|\mathbf{q}|$ i ω . Procedura skalowania (*y-scaling*) polega na ustaleniu najmniejszych wartości zmiennych ($|\mathbf{p}|$, \mathcal{E}) w przekroju czynnym dla pojedynczego nukleonu σ_{eN} . Dla obszaru na lewo od piku kwazielastycznego $p = -y$ oraz $\mathcal{E} = 0$. Następnie dzielimy inkluzyjny przekrój czynny przez $A\tilde{\sigma}_{eN}(|\mathbf{p}| = -y; \mathcal{E} = 0)$ i otrzymujemy funkcję skalowania:

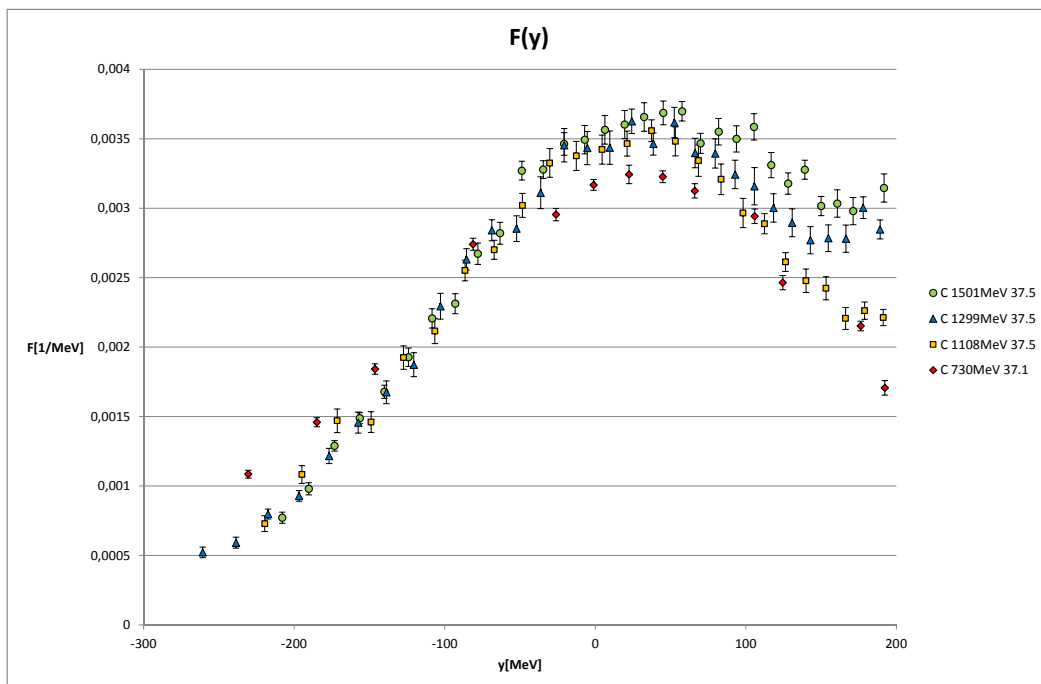
$$F(q, y) = \frac{1}{A\tilde{\sigma}_{eN}^{eff}(|\mathbf{p}| = -y; \mathcal{E} = 0)} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$$

Za $\tilde{\sigma}_{eN}^{eff}$ przyjmujemy efektywną wartość wkładów od protonów i neutronów $\tilde{\sigma}_{eN}^{eff} = \frac{1}{A}(Z\tilde{\sigma}_{ep} + N\tilde{\sigma}_{en})$.

Dla wystarczająco dużych wartości przekazu pędu funkcja skalowania F zależy tylko od zmiennej y .

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'_k} &= \frac{e^4}{(2\pi)^2} \int \frac{E'_k}{E_k E_p E'_p} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} S(\mathbf{p}, E) \delta(E - M + E_{p'} - \omega) dE dp^3 \\ &\rightarrow \left(\frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{E'_k}{E_k E_p |\mathbf{q}|} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \right)_{|\mathbf{p}|=-y} 2\pi \int_{-y}^Y |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| n(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_{eN} = \left(\frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{E'_k}{E_k E_p |\mathbf{q}|} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \frac{1}{q^4} \right)$$



Rysunek 3.3. Funkcja $F(y)$ otrzymana na podstawie danych doświadczalnych przekroju czynnego dla węgla

Na wykresie na rysunku 3.3 przedstawiono wartości funkcji $F(y)$ uzyskane dla węgla ($E_k = 1108 \text{ MeV}$, 1299 MeV i 1501 MeV i $\theta = 37,5^\circ$ oraz $E_k = 730 \text{ MeV}$ $\theta = 37,1^\circ$). Do stworzenia wykresu użyto formuły $\tilde{\sigma}_{eN}$ dla związanego nukleonu, korzystając z rozważań poprzedniego rozdziału.

Na lewo od wartości $y = 0$ odpowiadającej maksimum piku obserwujemy wyraźny pas, na którym znajduje się większość punktów. Można dostrzec, że punkty serii o najniższej energii najbardziej odstają od pozostałych, co może być spowodowane tym, iż przyjęte założenia sprawdzają się tylko dla dostatecznie wysokich wartości przekazu pędu.

Po prawej stronie od punktu $y = 0$ punkty są mniej skupione niż po lewej. Jest to spowodowane wkładami od innych mechanizmów dynamicznych (np. wzbudzenie rezonansu Δ) po prawej stronie piku.

Dodatki

Dodatek A - Obliczenie tensora leptonowego $L_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} m^2 \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) (\bar{u}(k', \lambda') \gamma_\nu u(k, \lambda))^* = \\ &= \frac{1}{2} m^2 \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \bar{u}(k, \lambda) \gamma_0 \gamma_\nu^\dagger \gamma_0 u(k', \lambda') \\ &= \frac{1}{2} m^2 \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}(k', \lambda') \gamma_\mu u(k, \lambda) \bar{u}(k, \lambda) \gamma_\nu u(k', \lambda') \end{aligned}$$

Korzystamy z tożsamości:

$$\sum_{\lambda} u_a(k, \lambda) \bar{u}_b(k, \lambda) = \left(\frac{k + m}{2m} \right)_{ab}$$

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} m^2 \sum_{a,b,c,d} \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}_a(k', \lambda') \gamma_{\mu(ab)} u_b(k, \lambda) \bar{u}_c(k, \lambda) \gamma_{\nu(cd)} u_d(k', \lambda') = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{a,b,c,d} \gamma_{\mu(ab)} (k + m)_{bd} \gamma_{\nu(cd)} (k' + m)_{da} = \\ &= \frac{1}{8} \text{Tr}((k + m) \gamma_\mu (k' + m) \gamma_\nu) = \\ &= \frac{1}{8} \left(\text{Tr}(k \gamma_\mu k' \gamma_\nu) + m \text{Tr}(\gamma_\mu k' \gamma_\nu) + m \text{Tr}(k \gamma_\mu \gamma_\nu) + m^2 \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(k^\alpha k'^\beta \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) + m k'^\alpha \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu) + m k'^\alpha \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu) + m^2 4g_{\mu\nu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(k^\alpha k'^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) + 0 + 0 + m^2 g_{\mu\nu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - (k, k') g_{\mu\nu} + m^2 g_{\mu\nu}) \approx \frac{1}{2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - (k, k') g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z własności macierzy gamma:

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}$$

$$\text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$$

Dodatek B - Obliczenie tensora hadronowego $H_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} M^2 \sum_{s,s'} \bar{u}(p', s') \Gamma_\mu u(p, s) (\bar{u}(p', s') \Gamma_\nu u(p, s))^* = \\
&= \frac{1}{2} M^2 \sum_{s,s'} \bar{u}(p', s') \Gamma_\mu u(p, s) \bar{u}(p, s) \gamma_0 \Gamma_\nu^\dagger \gamma_0 u(p', s') = \\
&= \frac{1}{2} M^2 \sum_{a,b,c,d} \sum_{s,s'} \bar{u}_a(p', s') \Gamma_{\mu(ab)} u_b(p, s) \bar{u}_c(p, s) (\gamma_0 \Gamma_\nu^\dagger \gamma_0)_{(cd)} u_d(p', s') = \\
&= \frac{1}{8} \sum_{a,b,c,d} (p' - M)_{da} \Gamma_{\mu(ab)} (p - M)_{bc} (\gamma_0 \Gamma_\nu^\dagger \gamma_0)_{(cd)} = \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr}((p' + M) \Gamma_\mu (p + M) \gamma_0 \Gamma_\nu^\dagger \gamma_0) \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} \left[(p' + M) \left((F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{p_\mu + p'_\mu}{2M} F_2 \right) (p + M) \gamma_0 \left((F_1 + F_2) \gamma_\nu^\dagger - \frac{(p_\nu + p'_\nu)^\dagger}{2M} F_2 \right) \gamma_0 \right] = \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} \left[(p' + M) \left((F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{p_\mu + p'_\mu}{2M} F_2 \right) (p + M) \left((F_1 + F_2) \gamma_\nu - \frac{(p_\nu + p'_\nu)}{2M} F_2 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{8} (F_1 + F_2)^2 \text{Tr} [(p' + M) \gamma_\mu (p + M) \gamma_\nu] + \\
&+ \frac{1}{8} \frac{F_2^2}{(2M)^2} (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) \text{Tr} [(p' + M) (p + M)] \\
&- \frac{1}{8} (F_1 + F_2) \frac{F_2}{2M} (p_\nu + p'_\nu) \text{Tr} [(p' + M) \gamma_\mu (p + M)] \\
&- \frac{1}{8} (F_1 + F_2) \frac{F_2}{2M} (p_\mu + p'_\mu) \text{Tr} [(p + M) \gamma_\nu (p' + M)] = \\
&= \frac{1}{8} (F_1 + F_2)^2 4 (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (p, p') g_{\mu\nu} + M^2 g_{\mu\nu}) + \\
&+ \frac{1}{8} \frac{F_2^2}{(2M)^2} (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) (4M^2 + 4pp') \\
&- \frac{1}{8} (F_1 + F_2) \frac{F_2}{2M} (p_\nu + p'_\nu) (4Mp'_\mu + 4Mp_\mu) \\
&- \frac{1}{8} (F_1 + F_2) \frac{F_2}{2M} (p_\mu + p'_\mu) (4Mp'_\nu + 4Mp_\nu) = \\
&= \frac{1}{2} (F_1 + F_2)^2 (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (p, p') g_{\mu\nu} + M^2 g_{\mu\nu}) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{F_2^2}{(2M)^2} (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) (M^2 + (p, p')) \\
&- \frac{1}{2} (F_1 + F_2) F_2 (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) = \\
&= \frac{1}{2} (F_1 + F_2)^2 (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (p, p') g_{\mu\nu} + M^2 g_{\mu\nu}) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{F_2^2}{(2M)^2} (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) (M^2 + (p, p')) \\
&- \frac{1}{2} (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) F_2^2 - \frac{1}{2} F_1 F_2 (p_\mu + p'_\mu) (p_\nu + p'_\nu) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2 \left(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - (p, p') g_{\mu\nu} + M^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{F_2^2}{(2M)^2} (p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu)(M^2 + (p, p')) + \frac{1}{4}(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu)(F_1^2 - F_2^2) = \\
&= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2 \left(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu + \frac{1}{2}q^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{F_2^2}{(2M)^2} (-M^2 + (p, p'))(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) + \frac{1}{4}F_1^2(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) = \\
&= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2 \left(-\frac{1}{2}(p_\mu - p'_\mu)(p_\nu - p'_\nu) + \frac{1}{2}q^2 g_{\mu\nu} \right) + \\
&+ \frac{1}{2}(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) \left(F_1^2 \frac{1}{2} + \frac{F_2^2}{(2M)^2} (-M^2 + (p, p')) \right) = \\
&= \frac{1}{4}(F_1 + F_2)^2 \left(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu \right) + \frac{1}{2}(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) \left(F_1^2 \frac{1}{2} - \frac{F_2^2}{(2M)^2} \frac{1}{2}q^2 \right) = \\
&= \frac{1}{4}(F_1 + F_2)^2 q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{1}{4}(p_\mu + p'_\mu)(p_\nu + p'_\nu) \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) = \\
&= \frac{1}{4}(F_1 + F_2)^2 q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2} \right) \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) = \\
&= \frac{1}{4}(F_1 + F_2)^2 q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \left(p_\mu - q_\mu \frac{(p, q)}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{(p, q)}{q^2} \right) \left(F_1^2 - \frac{F_2^2}{4M^2} q^2 \right) \\
&= \frac{1}{4}q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) H_1 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{(p, q)}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{(p, q)}{q^2} \right) H_2
\end{aligned}$$

Dodatek C - Obliczenie $L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - (k, k')g^{\mu\nu}) \left[\frac{1}{4}q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) H_1 + \right. \\
&\quad \left. \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2} \right) H_2 \right] = \\
&= \frac{1}{8}q^2 \left(2(k, k') - 4(k, k') - 2\frac{(k', q)(k, q)}{q^2} + (k, k') \right) H_1 + \\
&\frac{1}{2} \left[2 \left(pk + \frac{(k, q)}{2} \right) \left((p, k') + \frac{(k', q)}{2} \right) - (k, k') \left(p^2 + (p, q) + \frac{q^2}{4} \right) \right] H_2 = \\
&= \frac{1}{8}q^2 \left(-(k, k') - 2\frac{(k'q)(kq)}{q^2} \right) H_1 + \\
&+ \frac{1}{2} \left[2 \left((p, k) - \frac{(k, k')}{2} \right) \left((p, k') + \frac{(k', k)}{2} \right) + \frac{q^2}{2} \left(M^2 + (p, q) + \frac{q^2}{4} \right) \right] H_2 = \\
&= \frac{1}{8}q^2 \left(-(k, k') + 2\frac{(k, k')^2}{q^2} \right) H_1 + \\
&+ \left[\left((p, k) + \frac{q^2}{4} \right) \left((p, k') - \frac{q^2}{4} \right) + \frac{q^2}{4} \left(M^2 + (p, q) + \frac{q^2}{4} \right) \right] H_2 = \\
&= \frac{1}{8}q^2 H_1 q^2 + \left((p, k)(p, k') + M^2 q^2 / 4 \right) H_2 = \\
&= \frac{1}{8}q^2 \left(-4E_k E'_k \sin^2(\theta/2) \right) H_1 + \left((p, k)(p, k') - M^2 E_k E'_k \sin^2(\theta/2) \right) H_2 = \\
&= E_k E'_k M^2 \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right) H_1 + \left((p, k)(p, k') - M^2 E_k E'_k \sin^2(\theta/2) \right) H_2 =
\end{aligned}$$

W układzie związanym z początkowym nukleonem $p = (M, 0, 0, 0)$:

$$(p, k) = ME_k$$

$$(p, k') = ME'_k$$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} &= E_k E'_k M^2 \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) \right) + \left(E_k E'_k M^2 - E_k E'_k M^2 \sin^2(\theta/2) \right) H_2 = \\
&= E_k E'_k M^2 \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\theta/2) + (1 - \sin^2(\theta/2)) H_2 \right) = \\
&= E_k E'_k M^2 \cos^2(\theta/2) \left(-H_1 \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2(\theta/2) + H_2 \right)
\end{aligned}$$

Dodatek D - Drugi sposób wyliczania poprawki

$$\tilde{H}_{00} \rightarrow \frac{q^m q^n}{\omega^2} \tilde{H}_{mn}$$

$$\tilde{H}_{0k} \rightarrow \tilde{\tilde{H}}_{0k} = -\frac{q^m}{\omega} \tilde{H}_{mk}$$

$$\tilde{H}_{j0} \rightarrow \tilde{\tilde{H}}_{j0} = -\frac{q^n}{\omega} \tilde{H}_{jn}$$

$$\tilde{H}_{jk} \rightarrow \tilde{\tilde{H}}_{jk} = \tilde{H}_{jk}$$

Po dokonaniu tej procedury prąd jest zachowany:

$$\begin{aligned} q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{\mu 0} &= \omega \tilde{\tilde{H}}_{00} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{j0} \\ &= \omega \frac{q^m q^n}{\omega^2} \tilde{H}_{mn} + q^j \left(-\frac{q^n}{\omega} \tilde{H}_{jn} \right) \\ &= \frac{q^m q^n}{\omega} \tilde{H}_{mn} - \frac{q^m q^n}{\omega} \tilde{H}_{mn} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{\mu k} &= \omega \tilde{\tilde{H}}_{0k} + q^j \tilde{\tilde{H}}_{jk} \\ &= \omega \left(-\frac{q^m}{\omega} \tilde{H}_{mk} \right) + q^j \tilde{H}_{jk} \\ &= -q^j \tilde{H}_{jk} + q^j \tilde{H}_{jk} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podobnie w drugiej współrzędnej ponieważ tensor jest symetryczny.

$$q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{0\mu} = 0$$

$$q^\mu \tilde{\tilde{H}}_{j\mu} = 0$$

Obliczymy poprawkę do tensora hadronowego po zastosowaniu drugiej procedury. Poprawka do składowej $\mu = 0$ i $\nu = 0$ jest tym razem różna od zera.

$$\tilde{H}_{00} = \frac{q^m q^n}{\omega^2} \tilde{H}_{mn}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{00} &= \frac{q^m q^n}{\omega^2} \tilde{H}_{mn} - \tilde{H}_{00} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2} (-|\mathbf{q}|^2) \tilde{H}_1 + \frac{1}{\omega^2} \left((\mathbf{p}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 - \frac{1}{4} (-|\mathbf{q}|^2) \tilde{H}_1 - \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2} (-|\mathbf{q}|^2) \tilde{H}_1 + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 - \frac{1}{4} (-|\mathbf{q}|^2) \tilde{H}_1 - \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 = \\ &= \frac{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}{\omega^2} \left[-\frac{1}{4} |\mathbf{q}|^2 \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] \end{aligned}$$

Dla składowej czasowej $\mu = 0$ lub $\nu = 0$ obliczamy poprawkę ΔH_{j0} do tensora hadronowego.

$$\tilde{H}_{j0} = -\frac{q^n}{\omega} \tilde{H}_{jn}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{j0} &= -\frac{q^n}{\omega} \tilde{H}_{jn} - \tilde{H}_{j0} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{4} (-q_j \tilde{\omega}^2) \tilde{H}_1 + \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left((\mathbf{p}, \mathbf{q}) - |\mathbf{q}|^2 \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] + \\ &\quad - \left[\frac{1}{4} (-q_j \tilde{\omega}) \tilde{H}_1 + \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] = \\ &= \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \left[-q_j \tilde{\omega} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] \end{aligned}$$

Dla składowej przestrzennej ($j, k = 1, 2, 3$) poprawka wynosi zero.

$$\Delta H_{jk} = 0$$

Policzmy całkowitą poprawkę do zwiężenia tensorów.

$$\Delta H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = 2\Delta H_{j0} L^{j0} + \Delta H_{00} L^{00}$$

$$\Delta H_{j0} L^{j0} = \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \left[-q_j \tilde{\omega} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + \left(p_j - q_j \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \right] \frac{1}{2} (E_k k'^j + E'_k k^j) =$$

(wykorzystujemy wzór (2.2))

$$\begin{aligned} &= \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \tilde{\omega} \frac{1}{8} (-q_j) \tilde{H}_1 ((2E_k - \omega) k^j - E_k q^j) + \\ &+ \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \left[\left(p_j - q_j \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) + q_j \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \right] \\ &\left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \frac{1}{2} ((2E_k - \omega) k^j - E_k q^j) = \end{aligned}$$

(zwiężamy po j)

$$\begin{aligned} &= \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \tilde{\omega} \frac{1}{8} \tilde{H}_1 ((2E_k - \omega)(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - E_k |\mathbf{q}|^2) \\ &- \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} (2E_k - \omega) \left((\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \frac{1}{2} + \\ &- \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} ((2E_k - \omega)(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - E_k |\mathbf{q}|^2) \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{00} L^{00} &= \frac{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}{\omega^2} \left[-\frac{1}{4} |\mathbf{q}|^2 \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] \frac{1}{2} (2E_k E'_k - (k, k')) \\ &= \frac{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}{\omega^2} \left[-\frac{1}{4} |\mathbf{q}|^2 \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] (E_k^2 - E_k \omega + q^2/4) \end{aligned}$$

Całkowita poprawka do zwiężenia tensorów:

$$\begin{aligned}
\Delta H^{\mu\nu} L_{\mu\nu} &= 2 * \Delta H^{j0} L_{j0} + \Delta H^{00} L_{00} = \\
&= \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \tilde{\omega} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 ((2E_k - \omega)(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - E_k |\mathbf{q}|^2) \\
&\quad - \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} (2E_k - \omega) \left((\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{H}_2 \\
&\quad - \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} ((2E_k - \omega)(\mathbf{k}, \mathbf{q}) - E_k |\mathbf{q}|^2) \frac{\tilde{\omega}}{|\mathbf{q}|^2} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 + \\
&\quad + \frac{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}{\omega^2} \left[-\frac{1}{4} |\mathbf{q}|^2 \tilde{H}_1 + \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)^2 \tilde{H}_2 \right] (E_k^2 - E_k \omega + q^2/4) = \\
&= \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \frac{1}{4} \tilde{H}_1 \left(\tilde{\omega} (E_k |\mathbf{q}| Q - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - (E_k^2 - E_k \omega + q^2/4) |\mathbf{q}|^2 \frac{\tilde{\omega} + \omega}{\omega} \right) \\
&\quad + \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} ((E_k^2 - E_k \omega + q^2/4) \frac{\tilde{\omega} + \omega}{\omega} |\mathbf{q}|^2 P^2 - (E_k |\mathbf{q}| Q - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) \tilde{\omega} P^2 \\
&\quad - (2E_k - \omega) \left((\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) P) \tilde{H}_2 = \\
&= -\frac{1}{4} \tilde{H}_1 D_1 + D_2 \tilde{H}_2
\end{aligned}$$

$$\Delta H^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = -D_1 \frac{1}{4} \tilde{H}_1 + D_2 \tilde{H}_2$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\omega - \tilde{\omega}}{\omega} \left(\tilde{\omega} (E_k |\mathbf{q}| Q - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - (E_k^2 - E_k \omega + q^2/4) |\mathbf{q}|^2 \frac{\tilde{\omega} + \omega}{\omega} \right) = \\
&= \frac{\omega - \tilde{\omega}}{\omega} \left(\tilde{\omega} (E_k |\mathbf{q}| Q - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - \frac{1}{4} ((2E_k - \omega)^2 - |\mathbf{q}|^2) |\mathbf{q}|^2 \frac{\tilde{\omega} + \omega}{\omega} \right) = \\
&= (\omega - \tilde{\omega}) \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} (E_k |\mathbf{q}| Q - \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - \frac{1}{4} (\omega - \tilde{\omega}) (Q^2 - \omega^2) \frac{|\mathbf{q}|^4}{\omega^4} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \left[P |\mathbf{q}| \frac{\omega - \tilde{\omega}}{\omega} (2E_k - \omega) \left((\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) + D_1 P^2 \right] \\
&= \left[\frac{|\mathbf{q}|^2}{\omega^2} P (\omega - \tilde{\omega}) Q \left((\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{q})(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2} \right) + D_1 P^2 \right]
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{2(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{|\mathbf{q}|} - |\mathbf{q}|$$

$$P = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(E_p - \tilde{\omega} \frac{(\tilde{q}, p)}{\tilde{q}^2} \right)$$

Bibliografia

- [1] S. Frullani, J. Mougey, *Single-particle properties of nuclei through (e, e'p) reactions*, Adv. in Nucl. Phys. 14 (1984).
- [2] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1964)
- [3] B. Povh, K. Rith, Ch. Scholz, F. Zetsche, *Particles and Nuclei An Introduction to the Physical Concepts*. Springer (2006)
- [4] O. Benhar, D. Day, I. Sick, *Inclusive quasielastic electron-nucleus scattering*. RevMod-Phys., vol 80 (2008)
- [5] S. Pollock, H.W.L. Naus, J.H. Koch *The electron-nucleon cross section in (e, e'p) reactions*, Phys. Rev. C53 (1996)
- [6] B. Frois, I. Sick, *Modern Topics in Electron Scattering*. World Scientific (1992)
- [7] C.W. De Jager, H. De Vries, C. De Vries, *Nuclear charge- and magnetization-density-distribution parameters from elastic electron scattering*. Atomic Data and Nuclear Data Tables 14, 479-508 (1974) 14, 479-508 (1974)
- [8] C.F. Williamson, et al., *Quasielastic electron scattering from Ca-40*. Phys.Rev. C56 , 3152-3172, (1997)
- [9] M. Anghinolfi et al., *Quasielastic and inelastic inclusive electron scattering from an oxygen jet target*. Nucl.Phys. A602 , 405-422, (1996)
- [10] R. Sealock et al., *Electroexcitation of the delta (1232) in nuclei*. Phys. Rev. Lett., 62, 1350-1353, (1989)
- [11] J. S. O'Connell et al., *Electromagnetic excitation of the delta resonance in nuclei*. Phys. Rev., C35:1063, (1987)
- [12] E. Leader, E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Vol. 1*. Cambridge University Press (2004)
- [13] J. Tran Thanh Van, J.F. Mathiot, *The Heart of the Matter, from Nuclear Interactions to Quark Gluon Dynamics*. Editions Frontieres (1995)
- [14] T. W. Donnelly, I. Sick *Superscaling of Inclusive Electron Scattering from Nuclei*. Phys.Rev. C60 (1999)