

UNIwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii

**Rozpraszanie elektronów na jądrach
atomowych**
Opis wzbudzeń kolektywnych w ujęciu CRPA

Jakub Żmuda

PRACA MAGISTERSKA

wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jana Sobczyka

23 lipca 2008

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	9
2. Kinematyka procesów rozpraszania elektronów na jądrach atomowych	13
2.1 Podstawy obliczania przekrojów czynnych w rozpraszaniu na obiektach złożonych- przekrój elastyczny	13
2.2 Przekrój inkluzywny	17
2.3 Analiza multipolowa	21
3. Dynamika procesów jądrowych. Modele TDA i RPA	25
3.1 Uproszczony model rozpraszania do kontinuum według Blocha	26
3.2 Hamiltonian w reprezentacji drugiego kwantowania i równania Hartreego- Focka	29
3.3 Wyprowadzenie równań TDA w ramach formalizmu mechaniki kwantowej	33
3.4 Wyprowadzenie równań CRPA	39
3.4.1 Równania CRPA w zapisie multipolowym	43
3.5 Zachowanie asymptotyczne rozwiązań CRPA. Kanały rozpraszania i osobli- wości	45
4. Model prądu jądrowego	49
4.1 Dopasowanie wektorowych operatorów gęstości do struktury multipolowych operatorów elektrycznych i magnetycznych	50
4.2 Poprawki relatywistyczne. Redukcja nierelatywistyczna wierzchołka oddziaływania i reprezentacja drugiego kwantowania	51
5. Podsumowanie	55
<i>Dodatek</i>	60
A. Jednostki i konwencje	61
A.1 Układ jednostek	61
A.2 Przestrzeń Minkowskiego	61
A.3 Algebra i spinory Diraca	61
A.4 Kwantowanie w pudle	63
B. Reguly Feynmana w elektrodynamice kwantowej	64

C.	Moment pędu	65
C.1	Podstawowe definicje	65
C.2	Dodawanie dwóch momentów pędu. Współczynniki Clebscha- Gordana	65
C.3	Dodawanie trzech momentów pędu. Symbole $6 - j$	67
C.4	Nieprzywiedlne operatory tensorowe i twierdzenie Wignera-Eckarta	68
D.	Funkcje specjalne	70
D.1	Wielomiany Legendre'a i harmoniki sferyczne	70
D.2	Spinorowe harmoniki sferyczne	71
D.3	Sferyczne funkcje Bessela	72
E.	Obliczenia pomocnicze dotyczące kinematyki rozpraszania	73
E.1	Tensor jądrowy i funkcje struktury	73
E.2	Przekrój czynny- ogólna postać	74
E.3	Dyskusja tensora jądrowego dla rozpraszania kwazielastycznego	75
E.4	Rozpraszanie do stanów wzbudzonych- współczynnik odrzutu	77
E.5	Rozwinięcie operatorów \hat{J}_{\pm} w bazie NOT.	79
E.6	Rozwinięcie multipolowe elementów macierzowych operatora gęstości $\hat{\rho}(\mathbf{x})$	80
E.7	Całka po kącie emisji nukleonu. Moment pędu a obroty przestrzenne	81
F.	Obliczenia pomocnicze dotyczące CRPA	85
F.1	Przekształcenie hamiltonianu do bazy operatorów cząstek i dziur	85
F.2	Komutator $[\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^{\dagger}]$	88
F.3	Redukcja bazy równań CRPA	90
F.4	Redukcja nierelatywistyczna	92
F.4.1	Składowe czasowe wektorowego prądu jądrowego.	94
F.4.2	Składowe przestrzenne wektorowego prądu jądrowego	94

STRESZCZENIE

Niniejsza praca skupia się na dynamice procesów jądrowych w ujęciu CRPA (*Continuum Random Phase Approximation*- przybliżenie faz przypadkowych z uwzględnieniem stanów kontinuum) oraz jej wykorzystaniu przy opisie rozpraszania inkluzywnego elektronów w reżimie kwazielastycznym. CRPA polega na uwzględnianiu ograniczonej przestrzeni stanów końcowych układu. Oddziałujące jądro może przejść w stan wzbudzony, przy czym co najwyżej jeden z nukleonów może zostać wybity z jądra do kontinuum. Ten typ procesów zachodzi przy przekazach energii rzędu kilkudziesięciu MeV .

W rozdziale 2 zajmiemy się zagadnieniami kinematyki. Wyprowadzimy tam ogólny wzór na inkluzywny przekrój czynny w dwóch bazach: pędu i momentu pędu a także pojęcia tensorów leptonowych i hadronowych (dla prostoty rozważymy najpierw przypadek procesów elastycznych). Pominie zagadnienie oddziaływania stanów końcowych (*final state interaction*). Najważniejszym rezultatem będzie wzór (2.3.13), opisujący inkluzywny przekrój czynny z bazy funkcji własnych momentu pędu oraz operatorów multipolowych.

W rozdziale 3 opiszemy dynamikę jądra atomowego w ujęciu CRPA, startując od prostszego, kwantomechanicznego modelu kwazielastycznych procesów jądrowych, wprowadzonego po raz pierwszy przez Blocha. Zwrócimy tam uwagę na istnienie rezonansów związanych z rozpraszaniem do kontinuum przy niewielkich przekazach pędu i energii, a także na sposób traktowania związanych z nimi osobliwości pojawiających się w amplitudach funkcji falowych. Jest to ważny wynik, gdyż tłumaczy pojawienie się serii "pików" w rejonie piku kwazielastycznego. W ramach tego modelu wyprowadzimy także przybliżenie Tama- Dancoffa (TDA), które jest blisko spokrewnione z RPA. Wynik ten jest ciekawy, gdyż przy jego wyprowadzaniu zazwyczaj używa się języka drugiej kwantyzacji. Równania CRPA zapiszemy w bazy funkcji własnych momentu pędu (3.4.25), w celu połączenia ze wcześniejszymi rozważaniami kinematycznymi. Zwrócimy również uwagę na ogólne własności stanu podstawowego teorii oraz oddziaływań resztkowych par cząstka- dziura.

Kolejny rozdział pracy poświęcimy na konstrukcję jednociąłowych prądów jądrowych w języku multipolowym, które są ostatnim elementem potrzebnym do obliczenia przekroju czynnego. Obliczymy wiodące poprawki relatywistyczne do prądu.

Electron scattering off atomic nuclei

Description of the collective excitations within the CRPA framework

Abstract

In this work we shall concentrate on the description of nuclear dynamics in the CRPA (Continuum Random Phase Approximation) model and its application in the inclusive electron scattering off atomic nuclei in quasielastic regime. CRPA requires consideration of restricted final state phase- space. The target nuclei may undergo a transition to an excited state or/and one of the nucleons may get separated to the continuum. This type of processes occurs, when energy transfer is of the order of tenths of MeV.

We shall consider the kinematic problem in chapter 2. A general formula for inclusive cross-section will be developed in two types of bases: the momentum and the angular momentum eigenstate basis. We shall also introduce the concepts of nuclear and leptonic tensors (the elastic scattering example will be introduced for simplicity). The final state interaction problem will be neglected.

In the chapter 3 we shall describe the dynamics of atomic nuclei in the CRPA picture, starting with a more simple, quantum-mechanical model of quasielastic nuclear processes, originally introduced by Bloch. An attention is going to be paid for the existence of resonances related to the scattering into continuum states in the small momentum transfer regime. We shall also discuss the treatment of singularities in amplitudes, which appear for every resonance channel. This result is interesting, because it explains the existence of multiple peaks in the quasielastic peak region in this regime. We will develop Tamm-Dancoff Approximation (which is closely related to RPA) in the framework of this model. This result is interesting due to the fact, that in most of the cases the second quantization formalism is used in order to obtain it. The CRPA equations are going to be transformed to the angular momentum basis, in order to make them consistent with the previous kinematic considerations. Some general remarks about the properties of RPA ground states and the form of residual particle- hole interactions will be made.

The next chapter will be devoted to the construction of one-body nuclear currents in the multipole language, which are the last element needed to calculate the cross- section. We shall also calculate the leading relativistic corrections to the nuclear current.

1. WSTĘP

Dlaczego elektrony?

Zagadnienie rozpraszania cząstek elementarnych na jądrach atomowych jest nadal otwartym problemem. Ilość i złożoność możliwych procesów i modeli samego jądra atomowego jest ogromna. Efektywnym narzędziem do badania struktury jądra atomowego jest proces rozpraszania elektronów. Pozwala on na oszacowanie energii separacji, zmiany zachowania nukleonów w materii jądrowej, funkcji odpowiedzi jądra i wielu innych własności. Główną zaletą użycia elektronów, z punktu doświadczalnego, jest duży przekrój czynny na oddziaływanie z jądrem atomowym (łatwo w cel trafić), łatwość pozyskania "pocisków" oraz precyzyjne sterowanie energią, rozrzutem i innymi parametrami wiązki dzięki posiadaniu przez nie ładunku elektrycznego, a także dobrze opanowane techniki detekcji odbitych elektronów. To prowadzi do dużej ilości bardzo dokładnych wyników eksperymentalnych, które pozwalają weryfikować różne teorie dotyczące modelowania procesów zachodzących w jądrach atomowych.

Z punktu widzenia teoretyka niewielka stała sprzężenia oddziaływania elektromagnetycznego ($\alpha \approx \frac{1}{137}$) pozwala na użycie rozwinięcia perturbacyjnego macierzy S (dla lekkich jąder o niewielkim ładunku dobrym przybliżeniem jest już najniższy rząd). To pozwala z kolei na przewidzenie zachowania jądra atomowego w bardziej zawiłych procesach, jak np. przy oddziaływaniu z neutrinami. Model wzbudzeń atomowych, który dobrze się sprawdza dla elektronów, powinien dawać dobre wyniki także dla neutrin.

Dlaczego proces inkluzywny?

Jeżeli obserwujemy jedynie rozproszone leptony, w pierwszym rzędzie rozwinięcia macierzy S , wyrażenie na przekrój czynny dzieli się na 2 człony (2.1.18), zależne od przekazu energii, pędu i kąta rozpraszania. Przy czym najbardziej skomplikowane funkcje, odzwierciedlające strukturę jądra, zależą jedynie od przekazu pędu i energii. Przekaz energii i kąt łatwo ustawić w eksperymencie, a zmienną jest wtedy przekaz pędu. W ten sposób możemy zyskać mnóstwo informacji, odwołując się do względnie prostego formalizmu teoretycznego.

Modele jądra atomowego

Obliczenie jakiegokolwiek obserwabli fizycznej w teorii kwantowej wymaga znajomości funkcji falowej układu. Jądro atomowe jest układem kwantowym złożonym z wielu ciał (nukleonów), które oddziałują ze sobą za pomocą wszystkich znanych oddziaływań fundamentalnych. Wiodącą rolę mają tutaj oddziaływania silne i elektromagnetyczne. To prowadzi do olbrzymiej złożoności zagadnienia i braku ścisłych rozwiązań w ramach dokładnej teorii. Dla dużych przekazów pędu (kilkaset MeV i więcej) zachowanie jądra dobrze opisują modele pola uśrednionego (gaz Fermiego z różnymi modyfikacjami). Prze-

kroje czynne i funkcje postaci są dla ustalonego kąta rozpraszania i energii wiązki gładkimi funkcjami przekazu pędu. Problemy zaczynają się, kiedy zmniejszamy przekaz energii i pędu do jądra. Pojawia się wtedy cała seria "pików" rezonansowych, które związane są z przechodzeniem tarczy jądrowej do różnych stanów wzbudzonych. Jest to zachowanie analogiczne do fotoabsorpcji przez powłokę elektronową np. w atomie wodoru. Elektron absorbuje fotony, których energia odpowiada różnicy energii różnych poziomów energetycznych, prowadząc do powstania pewnego dyskretnego widma absorpcyjnego. Piki te mogą być "rozmyte" z powodu efektu Dopplera związanego z ruchem atomów.

Podczas rozpraszania elektronu na jądrze w najniższym rzędzie rachunku zaburzeń następuje wymiana pojedynczego wirtualnego fotonu. Jeżeli energia ta "utrafi" w energię wzbudzenia widzimy "pik" na wykresie. Analogicznie nukleony w jądrze znajdują się w ciągłym ruchu, co powoduje poszerzenie rezonansów. Przy procesach kwazielastycznych mamy do czynienia z innym typem rezonansu. Tam dodatkowym stopniem swobody jest energia wybitego nukleonu. Ustalamy, że mierzymy energię wybitych nukleonów. Dla danego przekazu energii i energii nukleonu przekrój czynny ma maksimum w pewnym obszarze przekazu pędu. Jest to tak zwany "pik kwazielastyczny". Biorąc pod uwagę fakt, że dany nukleon może pochodzić z różnych powłok jądrowych, spodziewamy się, że w pewnych specyficznych warunkach zobaczymy całą serię podobnych rezonansów zależnych od energii jądra końcowego.

Najprostszy model pozwalający na odtworzenie przybliżonej struktury to tzw. model średniego pola. Zakłada on, że nukleony w jądrze możemy traktować niezależnie, zaś wszystkie typy oddziaływań dają się efektywnie zapisać, jako jeden zewnętrzny, uśredniony potencjał jednociałowy (np. potencjał Woodsa-Saxona). Metoda ta pozwala na znalezienie dość dokładnego stanu podstawowego jądra, ale zawodzi przy próbie obliczenia wzbudzeń jądrowych. Obliczone poziomy energetyczne różnią się znacznie od rzeczywistych. Problem tkwi w silnej korelacji nukleonów we wszystkich typach wzbudzeń. Nawet przy usunięciu jednego nukleonu z powłoki i przeniesieniu go do stanu wzbudzonego musimy wziąć pod uwagę zmianę konfiguracji jądra atomowego, z którego znikł nukleon. W efektywnym opisie prowadzi to do powstania wirtualnej cząstki-dziury, która oddziałuje z nukleonem. Tworzy się tzw. para cząstka-dziura, która może oddziaływać z innymi parami. Daje to najprostszy opis wzbudzeń kolektywnych, w których bierzemy pod uwagę korelację par. Z tej idei narodziło się tzw. przybliżenie Tama-Dancoffa (TDA), które daje się wyprowadzić w ramach standardowej mechaniki kwantowej, co zaprezentujemy w rozdziale 3. Jest to interesujący rezultat, gdyż zazwyczaj stosuje się w tym celu język drugiej kwantyzacji. Przybliżenie to przyjmuje stan liczony teorią pola średniego za stan podstawowy, ta teoria służy również do konstrukcji bazy jednocząstkowych funkcji własnych. Jego uogólnieniem jest przybliżenie faz przypadkowych (RPA), w którym stan podstawowy może zawierać pewną ilość wzbudzeń kolektywnych. Zakładamy w nim, że stany wzbudzone mogą powstawać nie tylko poprzez reakcję par, ale również poprzez anihilację pary istniejącej w stanie podstawowym. Na tym właśnie modelu skupimy najwięcej uwagi. Osobną kwestią jest wybór bazy funkcji falowych dla naszych rozwiązań. Najczęściej stosowane potencjały są sferycznie symetryczne, tak więc za bazę funkcji jednocząstkowych, analogicznie do powłok elektronowych atomu wodoru, najwygodniej jest wybrać bazę funkcji własnych momentu pędu. Dobrymi liczbami kwantowymi stają się wtedy $\{n, l, j, m\}$, gdzie $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$. Opis przejść w jądrze również sprowadzi się do opisu multipolowego, jak w atomie wodoru. Oznacza to, że używane przez nas operatory muszą przenosić pewien moment pędu, a więc podlegają odpowiednim regułom wyboru. Dlatego

też, niestety, trzeba wszystko zapisywać w bazie funkcji własnych momentu pędu, co jest skomplikowaną i czasochłonną procedurą, zarówno dla rozważań dotyczących kinematyki rozpraszania, jak i dynamiki procesów jądrowych. Sferyczna symetria oznacza zerowy moment pędu stanu podstawowego jądra, dlatego też typowe obliczenia dotyczyć będą jąder o $J = 0$.

2. KINEMATYKA PROCESÓW ROZPRASZANIA ELEKTRONÓW NA JĄDRACH ATOMOWYCH

2.1 Podstawy obliczania przekrojów czynnych w rozpraszaniu na obiektach złożonych- przekrój elastyczny

Jako podstawę do rachunków związanych z przekrojami czynnymi rozpatrzmy najpierw proces elastyczny. W tym procesie zarówno stan początkowy oraz końcowy układu składa się z elektronu i jądra atomowego. Pomimo swojej prostoty, proces elastyczny pozwala na sformułowanie ogólnych pojęć przydatnych przy późniejszych rozważaniach procesów inkluzywnych w sposób bardziej przejrzysty i zrozumiały. Przedstawione w tym rozdziale obliczenia oraz tok rozumowania bazują w większości na [11]. W opisie fizycznym możemy powiedzieć, że obserwujemy rozpraszanie elektronu (opisanego w tej pracy przez prąd Diraca) na zewnętrznym potencjale elektromagnetycznym generowanym przez prąd jądrowy związany z przejściem jądra pomiędzy stanem początkowym $|i\rangle$ i końcowym $|f\rangle$. Potencjał ten spełnia równania Maxwella w postaci:

$$\square A_\mu(\mathbf{x}, t) = J_\mu = -e \frac{(2\pi)^3}{V} \langle f | \hat{J}_\mu(\mathbf{x}, t) | i \rangle. \quad (2.1.1)$$

Czynniki $\frac{(2\pi)^3}{V}$ pochodzą z kwantowania systemu w skończonym pudle, omówionego w dodatku A.4. Stany jądra $|i\rangle$, $|f\rangle$ są zdefiniowane w obrazie Heisenberga. Są one stanami własnymi dowolnych operatorów tworzących kompletną bazę przestrzeni Hilberta. Na razie zakładamy, że są stanami własnymi czteropędu p_μ i spinu h_s . Co do elektronów zakładamy, że ich początkowe i końcowe stany opisane są przez fale płaskie (A.4.2) o czteropędach k i k' odpowiednio. Założenie to jest dobre dla jąder o niewielkiej liczbie atomowej, gdyż pozwala nam na zaniechanie wpływu ładunku jądra na końcową postać funkcji falowej elektronu. Zakładając konwencje normalizacyjne dla kwantowania układu w skończonym pudle (dodatek A.4) możemy przystąpić do obliczenia przekroju czynnego na rozpraszanie.

Prawdopodobieństwo, że nasz układ przejdzie ze stanu początkowego do pewnej infi-

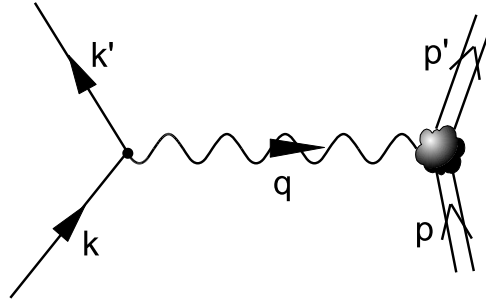


Fig. 2.1: Diagram ilustrujący elastyczne rozpraszanie elektronu na atomie w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

nitezymalnej objętości przestrzeni fazowej stanów końcowych wynosi:

$$\begin{aligned}
 dP^{\text{pudło}}(i \rightarrow f) &= |S_{fi}^{\text{pudło}}|^2 \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3 p' d^3 k' = \\
 &= \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{m^2}{(2\pi)^6 E_k E_{k'}} \frac{(2\pi)^{12}}{V^4} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot \langle f | \int d^4 x e^{-iqx} \hat{J}_\mu(x) | i \rangle \langle i | \int d^4 x e^{iqx} \hat{J}_\nu(x) | f \rangle \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3 p' d^3 k' = \\
 &= \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{m^2}{E_k E_{k'}} \frac{1}{V^2} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot \langle f | \int d^4 x e^{-iqx} \hat{J}_\mu(x) | i \rangle \langle i | \int d^4 x e^{iqx} \hat{J}_\nu(x) | f \rangle d^3 p' d^3 k'
 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

gdzie przez $q = (\nu, \mathbf{q}) = k - k'$ oznaczono przekaz czteropędu¹. Diagram 2.1 ilustruje elastyczne rozpraszanie elektronu na jądrze atomowym poprzez wymianę pojedynczego wirtualnego fotonu. W elementach macierzywych prądu jądrowego możemy w jawnej postaci zapisać zależność od czasu i położenia²:

$$\square A_\mu(\mathbf{x}, t) = J_\mu = -e \frac{(2\pi)^3}{V} \langle f | \hat{J}_\mu(0) | i \rangle e^{i(p-p')x}. \tag{2.1.4}$$

W tym miejscu należy powiedzieć o jeszcze jednej ważnej cesze prądów jądrowych, a mianowicie o równaniu ciągłości (zasada zachowania prądu):

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu J_\mu &= 0 \\
 q^\mu J_\mu &= 0 \\
 \text{lub:} \\
 \mathbf{qJ} &= \nu J_0.
 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

¹ Zakładamy, że elektron oddaje energię jądru atomowemu, tzn. $E_k > E_{k'}$, $\nu > 0$.

² W tym celu korzystamy z równań Heisenberga:

$$\partial_\mu J_{em}^\mu = -i [\hat{P}_\mu, J_{em}^\mu] \quad ; \quad \hat{P}_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle. \tag{2.1.3}$$

Użytecznym jest zapisać to przekształcenie w dwóch krokach. Najpierw "wyjmiemy" zależność czasową (można tak zrobić bez względu na rodzaj stanów początkowych i końcowych), a następnie przestrzenną (możliwe tylko w przypadku stanów własnych operatora pędu). Wtedy prawdopodobieństwo, że system ewoluuje z pewnego stanu początkowego do końcowego wyniesie ([12]):

$$\begin{aligned}
 dP(i \rightarrow f) &= \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{m^2}{E_k E_{k'}} \frac{1}{V^2} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot (2\pi) T \delta(p'_0 - p_0 - \nu) \langle f | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\mu(x) | i \rangle \cdot \\
 &\cdot \langle i | \int d^3 x e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\nu(x) | f \rangle d^3 p' d^3 k' = \\
 &= \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{m^2}{E_k E_{k'}} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot \frac{(2\pi)^4}{V^2} \cdot TV \delta^{(4)}(p' - p - q) \langle f | \hat{J}_\mu(0) | i \rangle \langle i | \hat{J}_\nu(0) | f \rangle d^3 p' d^3 k'.
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Otrzymanie postaci końcowej z deltami Diraca możemy wyjaśnić korzystając ze wzorów (A.4.6). Teraz możemy zdefiniować różniczkowy przekrój czynny, jako prawdopodobieństwo ewolucji systemu pomiędzy dwoma stanami na jednostkę czasu i podzielone przez strumień padających cząstek Φ . Zakładamy również, że nie obserwujemy spinów elektronów ani jądra (stąd $\overline{\sum}_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \sum_{\text{jądrowe}}^{\text{spiny}}$). Przekrój czynny przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{aligned}
 d\sigma^{\text{pudło}} &= \frac{dP(i \rightarrow f)}{T\Phi} = \frac{V d\Gamma}{u} = \\
 &= \overline{\sum}_i u^{-1} \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{2\pi}{V} \frac{m^2}{E_k E_{k'}} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot \frac{E_p}{M} \delta(p_0 - p'_0 - \nu) \langle f | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\mu(x) | i \rangle \langle i | \int d^3 x e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\nu(x) | f \rangle d^3 k' d^3 p' = \\
 &= \overline{\sum}_i u^{-1} \frac{e^4}{q^{\mu 4}} (2\pi)^4 \frac{m^2}{E_k E_{k'}} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot \frac{E_p}{M} \delta^{(4)}(p - p' - q) \langle f | \hat{J}_\mu(0) | i \rangle \langle i | \hat{J}_\nu(0) | f \rangle d^3 k' d^3 p'.
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Względną prędkość cząstek i jądra możemy zapisać, jako:

$$u = \frac{\sqrt{(k \cdot p)^2 - m^2 M_T^2}}{E_k E_p}. \tag{2.1.8}$$

Tak zdefiniowany przekrój czynny jest Lorentzowskim niezmiennikiem (skalarem). W wypadku np. pomiaru spinów/skrętności cząstek przekrój czynny zależałby od układu odniesienia.

W niniejszych rozważaniach interesuje nas rozpraszanie elektronów o wysokich energiach. Innymi słowy $E_k \gg m$. Dlatego też we wszystkich obliczeniach konsekwentnie pomijane będą człony proporcjonalne do m^2 a energie elektronów przybliżać będziemy modułami

ich pędów. To umożliwia nam przepisanie wzoru na przekrój elastyczny w bardziej uporządkowanej postaci:

$$d\sigma = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\sqrt{(k \cdot p)^2}} \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \sum_{s,s'} m^2 (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \int \frac{d^3 p'}{E_p'} \sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{jądrowe}}} (2\pi)^6 E_p E_p' \langle p' | \hat{J}_\mu(0) | p \rangle \langle p' | \hat{J}_\nu(0) | p \rangle^* \delta^4(k + p - k' - p') \cdot \frac{d^3 k'}{E_k'}. \quad (2.1.9)$$

Dla wygody wprowadzimy następujące struktury:

- Tensor jądrowy:

$$\sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{jądrowe}}} \int d^3 p' \delta^4(p' - p - q) (2\pi)^6 \langle p' | \hat{J}_\mu(0) | p \rangle \langle p' | \hat{J}_\nu(0) | p \rangle^* E_p \equiv W_{\mu\nu}. \quad (2.1.10)$$

- Tensor leptonowy:

$$L^{\mu\nu} \equiv m^2 \sum_{s,s'} (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u_s(\mathbf{k})) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^\nu u_s(\mathbf{k}))^*. \quad (2.1.11)$$

Korzystając z prostych przekształceń a także ze wzorów sumacyjnych dla spinorów Diraca (A.3.10) oraz śladów macierzy γ (A.3.5) z dodatku A.3 tensor leptonowy możemy zapisać, jako:

$$L^{\mu\nu} = \frac{m^2}{8m^2} 4 (k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k \cdot k' + g^{\mu\nu} m^2) \approx \frac{1}{2} (k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k \cdot k'). \quad (2.1.12)$$

Z powyższej formuły widać, że tensor leptonowy rzeczywiście transformuje się jak tensor pod działaniem grupy Lorentza. Analiza wielkości w równaniu (2.1.9) prowadzi do wniosku, że $W^{\mu\nu}$ jest również dobrym lorentzowskim tensorem. Tensor leptonowy także spełnia zasadę zachowania prądu:

$$L^{\mu\nu} q_\mu = q_\nu L^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.13)$$

co możemy pokazać np. stosując równanie Diraca:

$$\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \not{k}' u_s(\mathbf{k}) = \bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') (\not{k}' - \not{k}') u_s(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.1.14)$$

lub jego jawną postać (2.1.12). Nasze rozważania pomijają efekty związane z modyfikacją funkcji falowej elektronu związaną z potencjałem kulombowskim jądra³. W dalszym ciągu skupimy się na dyskusowaniu własności tensora jądrowego, który zawiera całą informację o

³ Ostatnie badania i obliczenia wykazały, że lepsze wyniki otrzymuje się uwzględniając wymianę wielofotonową, która prowadzi do innej bazy funkcji falowych elektronów. Ta praca ma na celu przedstawienie podstaw niezbędnego formalizmu, dlatego też problem tzw. *final state interaction* został w niej pominięty.

szczegółowej dynamice procesu. Z równania ciągłości (2.1.5) możemy otrzymać zależność analogiczną do tej, którą spełnia tensor leptonowy:

$$W^{\mu\nu}q_\mu = q_\nu W^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.15)$$

Używając definicji $L^{\mu\nu}$ i $W_{\mu\nu}$ postać wzoru na przekrój czynny ulega znacznemu uproszczeniu:

$$d\sigma = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\sqrt{(k \cdot p)^2}} \frac{e^4}{q^{\mu 4}} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \frac{d^3k'}{E_{k'}}. \quad (2.1.16)$$

Forma tensora jądrowego (2.1.10) oraz jego własności transformacyjne sugerują, że powinien on być kombinacją liniową pewnych funkcji skalarnych opisanych przez lorentzowskie niezmienniki układu przemnożonych przez czterowektory p^μ , p'^μ , q^μ , q'^μ . Te funkcje skalarnie nazywamy *funkcjami struktury*. Okazuje się, że dla opisu elastycznego rozpraszania elektromagnetycznego wystarczą tylko dwie takie funkcje (dodatek E.1):

$$W_{\mu\nu} = W_1 \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{W_2}{M_T^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right). \quad (2.1.17)$$

Analiza kinematyczna równania na przekrój czynny (dodatek E.2) pozwala nam na wyrażenie tej wielkości w układzie laboratoryjnym (jądro spoczywa), jako:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{\sigma_M}{M_T} \left(W_2 + 2W_1 \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right) \quad (2.1.18)$$

gdzie przekrój czynny Motta wyraża się przez:

$$\sigma_M = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}{4E_k^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \quad (2.1.19)$$

To jest najbardziej ogólny wzór na przekrój czynny dla rozpraszania elektronów na jądrze atomowym ([11]). Okazuje się, że jest on również poprawny dla rozpraszania inkluzywnego.

2.2 Przekrój inkluzywny

Wzór (2.1.18) wyraża różniczkowy przekrój czynny dla procesów typu $2 \rightarrow 2$. Celem tej pracy jest obliczenie *przekroju inkluzywnego* dla procesów kwazielastycznych. Oznacza to, że musimy uwzględnić sytuację, gdy z jądra zostaje wybity nukleon. Termin "inkluzywny" oznacza, że interesują nas tylko stany rozpraszane leptonu. Rozważmy najpierw proces $e, \text{jądro} \rightarrow e', X$, gdzie X oznacza dowolny stan końcowy. Ta sytuacja została zobrazowana na rys. 2.2. Okazuje się, że wkład od wszystkich kanałów się faktoryzuje i wzór na

inkluzywny przekrój czynny jest podobny do przekroju elastycznego:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{inkluzywny}} &= \sum_{\alpha} \int \prod_{j=1}^{\alpha} d^3 p'_{\alpha,j} \int d^3 k' \overline{\sum_{\text{spiny}}} (M_{fi})^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{u} = \\
 &= \int d^3 k' (2\pi)^{-2} \frac{1}{M} \sum_{s,s'} \bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma^{\mu} u_s(\mathbf{k}) (\bar{u}_{s'}(\mathbf{k}') \gamma_{\mu} u_s(\mathbf{k}))^* \cdot \\
 &\cdot \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{m^2}{E_k E_{k'}} \sum_X \delta(E_X - E_i - \nu) \overline{\sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{jądrowe}}} (2\pi)^3} \cdot \\
 &\cdot \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_{\mu}(\mathbf{x}) | i \rangle \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_{\nu}(\mathbf{x}) | i \rangle^* E_i.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Założyliśmy, jak uprzednio: $\mathbf{p} = 0$, co pociąga za sobą $\sqrt{(k \cdot p)^2} = E_k M_T$, przekaz

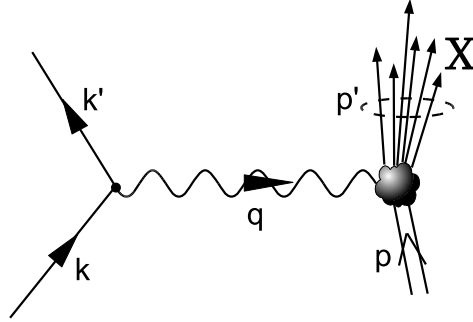


Fig. 2.2: Diagram ilustrujący nieelastyczne rozpraszanie elektronu na atomie w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. Sumaryczny czteropęd wszystkich składników stanu końcowego wynosi p' .

energii oznaczyliśmy jako ν , oraz przywróciliśmy zależność przestrzenną operatora prądu \hat{J}_{μ} . Wynika to z faktu, że w ogólności nie zakładamy, że mamy do czynienia ze stanami własnymi pędu. Możemy użyć dowolnej bazy zupełnej. Jedynie zachowanie energii daje się zawsze jawnie zapisać. Energię stanu X oznaczyliśmy jako sumę po energiach wszystkich cząstek w X :

$$E_X = \sum_{n=1}^{N_X} E_n. \tag{2.2.2}$$

Sumowanie po X oznacza sumowanie po wszystkich stopniach swobody stanu X . Wtedy wzór ogólny na przekrój czynny (2.1.18) pozostaje w mocy, tylko tensor jądrowy ulega przedefiniowaniu:

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} &= \sum_X \delta(E_X - E_i - \nu) \overline{\sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{jądrowe}}} (2\pi)^3} \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_{\mu}(\mathbf{x}) | i \rangle \cdot \\
 &\cdot \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_{\nu}(\mathbf{x}) | i \rangle^* E_i.
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Ta postać tensora jest niezbyt czytelna. Dyskusja w dodatku E.3 umożliwi nam zapisanie go w bardziej użytecznej postaci (E.3.5):

$$W_{\mu\nu} = R \overline{\sum_i} \sum_f \int p_f^2 d\Omega_{p_f} J_\mu(\mathbf{q}) J_\nu(\mathbf{q})^* \quad (2.2.4)$$

z prądem jądrowym w postaci:

$$J_\mu(\mathbf{q}) = \langle f | \int d^3x e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\mu(\mathbf{x}) | i \rangle. \quad (2.2.5)$$

W wybranej, interesującej nas, sytuacji (rozpraszanie kwazielastyczne) stan końcowy $|f\rangle$

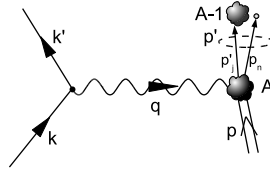


Fig. 2.3: Diagram ilustrujący kwazielastyczne rozpraszanie elektronu na atomie w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. Musimy uwzględnić wkład od dwóch kanałów: jądro wzbudzone oraz jądro'+nukleon.

jest kolektywnym stanem składającym się ze swobodnego nukleonu o ustalonym z zasad zachowania module pędu p_f i jądro (jak na rysunku 2.2). Jądro można opisać w wielu bazach, ale od tego miejsca zakładamy, że wybraliśmy bazę stanów własnych całkowitego momentu pędu. W równaniu (2.2.4) jedynym stopniem swobody jest kąt bryłowy emisji nukleonu oraz spiny i momenty pędu, po których sumujemy. Reszta jest ustalona z zasad zachowania.

Kolejnym krokiem jest skojarzenie składowych tensora jądrowego z funkcjami struktury. Jądro zmienia swój stan na skutek absorpcji/emisji wirtualnego fotonu. Możemy wybrać układ współrzędnych, w którym foton ten porusza się w kierunku osi \hat{z} :

$$q^\mu = (\nu, 0, 0, q). \quad (2.2.6)$$

Wprowadźmy układ ortonormalnych czterowektorów:

$$\begin{aligned} e_S^\mu &= \frac{1}{q^{\mu 2}}(q, 0, 0, \nu) \\ e_L^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \\ e_R^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Korzystając z równania (2.1.5) $W_{\mu\nu}q^\mu = 0$ możemy pomnożyć wyrażenie na tensor jądrowy z obu stron przez $e_i^{\dagger\mu}$ i e_i^μ i zrzutować część dającą wkład do przekroju czynnego. W

poprzednich rozdziałach wykazaliśmy, że:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(q^{\mu 2}, p \cdot q, p^{\mu 2}) &= W_1(q^{\mu 2}, p \cdot q, p^{\mu 2}) \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^{\mu 2}} - g_{\mu\nu} \right) + \\ &+ W_2(q^{\mu 2}, p \cdot q, p^{\mu 2}) \frac{1}{M_T^2} \left(p_\mu - \frac{pq}{q^{\mu 2}} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{pq}{q^{\mu 2}} q_\nu \right). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Pracujemy w układzie, w którym jądro spoczywa ($p^\mu = (M_T, \mathbf{0})$). Rzuty na wektory polaryzacji dają nam⁴:

$$\begin{aligned} e_S^{\dagger\mu} W_{\mu\nu} e_S^\nu &\equiv W_{SS} = \frac{q^2}{q^{\mu 2}} W_{00} + \frac{\nu^2}{q^{\mu 2}} W_{33} + \frac{q\nu}{q^{\mu 2}} (W_{30} + W_{03}) = W_1 + \frac{q^2}{q^{\mu 2}} W_2 \\ e_L^{\dagger\mu} W_{\mu\nu} e_L^\nu &\equiv W_{LL} = \frac{1}{2} (W_{11} + W_{22}) = W_1 \\ e_R^{\dagger\mu} W_{\mu\nu} e_R^\nu &\equiv W_{RR} = \frac{1}{2} (W_{11} + W_{22}) = W_1. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Z równania (2.2.8) i zachowania prądu wynika:

$$W_{33} = \frac{\nu^2}{q^2} W_{00}, \quad W_{30} = W_{03} = -\frac{\nu}{q} W_{00}. \quad (2.2.10)$$

Używając tych relacji możemy zidentyfikować funkcje struktury z elementami macierzowymi prądu ([11])⁵:

$$\begin{aligned} 2W_1 &= R \sum_{\lambda=\pm 1} \int p_f^2 d\Omega_p \left| \langle f | \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \mathbf{e}_\lambda^\dagger \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) d^3x | i \rangle \right|^2 \\ W_2 &= \left(\frac{q^{\mu 2}}{q^2} \right)^2 W_{00} - \frac{q^{\mu 2}}{q^2} W_1 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

gdzie:

$$W_{00} = R \int p_f^2 d\Omega_p \left| \langle f | \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{\rho}(\mathbf{x}) d^3x | i \rangle \right|^2. \quad (2.2.12)$$

Tutaj wprowadziliśmy ortogonalne poprzeczne wektory polaryzacji:

$$\mathbf{e}_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2). \quad (2.2.13)$$

Stanowią one po prostu przestrzenną część e_L^μ i e_R^μ z relacją $L \equiv +$ i $R \equiv -$:

$$\begin{aligned} e_L^\mu &= (0, \mathbf{e}_+) \\ e_R^\mu &= (0, \mathbf{e}_-). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Dla celów dalszej analizy można wprowadzić też rzuty operatorów prądu na wektory polaryzacji:

$$\hat{J}_0(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_0, \quad \hat{J}_\pm(\mathbf{q}) \equiv \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} e_{L/R}^\mu \hat{J}_\mu(\mathbf{x}). \quad (2.2.15)$$

⁴ Przy procesach koincydencyjnych (obserwacja wyemitowanego nukleonu) sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Opisano to m.in. w [11] i w [5].

⁵ W tym miejscu często spotyka się różnice w znaku. Wynikają one z definicji metryki bo to od niej zależy, czy $q^{\mu 2} > 0$ czy też $q^{\mu 2} < 0$ tak jak u nas.

2.3 Analiza multipolowa

W poprzednim rozdziale wyprowadziliśmy ogólny wzór na inkluzywny przekrój czynny. Połączenie funkcji postaci z elementami macierzowymi tensora jądrowego poprzez wektory polaryzacji wirtualnego fotonu sugeruje, że mamy tu do czynienia z przejściami multipolowymi. Dlatego też zakładamy, że następuje tu przejście pomiędzy stanem podstawowym jądra $|J_i M_i\rangle$ a stanem końcowym jądro+nukleon $|J_f M_f\rangle$. To pociąga za sobą konieczność rozwinięcia operatorów prądu jądrowego \hat{J}_μ (a konkretnie ich składowych związanych z podłużną i dwiema poprzecznymi polaryzacjami \hat{J}_0 , \hat{J}_+ i \hat{J}_-) na zbiór nieprzywiedlnych operatorów tensorowych (definicja i własności NOT znajdują się w dodatku C.4). Obliczenia tego typu są skomplikowane technicznie ([11]), ale otrzymuje się zwarty wzór na przekrój czynny w postaci gotowej do "włożenia" konkretnego modelu jądra.

Najbardziej złożonym fragmentem tej analizy jest zapisanie w języku NOT operatorów \hat{J}_\pm . Ten fragment obliczeń umieszczono w dodatku E.5. Wynikiem tych rozważań są poniższe formuły:

$$\hat{J}_\lambda(\mathbf{q}) = \int \mathbf{e}_{q,\lambda} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \mathbf{J}(x) d^3x = \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \left[-\hat{T}_{J,-\lambda}^{el}(q) + \lambda \hat{T}_{J,-\lambda}^{mag}(q) \right]. \quad (2.3.1)$$

Operatory multipolowe elektryczne i magnetyczne zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{J,\lambda}^{el}(q) &= \frac{1}{q} \int [\nabla \times j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda(\Omega)] \hat{\mathbf{J}}(x) d^3x \\ \hat{T}_{J,\lambda}^{mag}(q) &= \int j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda(\Omega) \hat{\mathbf{J}}(x) d^3x. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Natomiast operator związany z gęstością ładunku daje się zapisać jako (dodatek E.6):

$$\hat{J}_0(\mathbf{q}) = \int d^3x \sum_{JM} (i)^J (2J+1) j_J(qx) \frac{4\pi}{2M+1} Y_{JM}(\Omega) \hat{\rho}(x). \quad (2.3.3)$$

Kolejnym fragmentem potrzebnym do obliczenia postaci multipolowej wzoru na przekrój inkluzywny jest wyeksponowanie jawnej zależności funkcji falowych stanu początkowego jądra oraz stanu końcowego układu jądro+nukleon. Asymptotycznie wybity nukleon daje się opisać za pomocą fali płaskiej o pędzie \mathbf{p}_f i spinie $\frac{1}{2}$, s . Nie znamy kierunku emisji (jest stopniem swobody w (2.2.4)), ale energię (czyli $|\mathbf{p}_f|$) potrafimy ustalić dla danego kanału rozpraszania (tj. dla danego stanu jądra resztkowego, mającego masę M_T^*). Jądro resztkowe natomiast będzie miało moment pędu opisany przez liczby kwantowe J_j, M_j . Jeżeli zapiszemy ten stan w naszej normalizacji, to (w przybliżeniu nierelatywistycznym) otrzymamy:

$$\psi_f(\mathbf{r}_1 \rightarrow \infty, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)(\Omega_n) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \mathbf{r}_1} \chi_{1/2}^s \psi_{J_j M_j}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A). \quad (2.3.4)$$

Przyjęta notacja pochodzi z [5]. Chcielibyśmy, by stan układu dał się zapisać jako stan własny momentu pędu. Zgodnie ze wzorem:

$$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qr) Y_{l0}(\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{p}_f)).$$

możemy rozwinąć falę płaską nukleonu na funkcje sferyczne.

Harmonika sferyczna $Y_{l0}(\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{p}_f))$ wyznacza zależność funkcji falowej stanu końcowego układu od kąta emisji nukleonu w sposób pośredni (kąąt względny pomiędzy \mathbf{x}_1 oraz \mathbf{p}_f). Dlatego też użyjemy wzoru (D.1.6) w celu wyciągnięcia bezpośredniej zależności od kąta emisji nukleonu:

$$Y_{l0}(\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{p}_f)) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega_n) Y_{lm}(\Omega_x). \quad (2.3.5)$$

Potem łączymy funkcje własne orbitalnego momentu pędu $Y_{lm}(\Omega_x)$ ze spinem nukleonu s w moment pędu J_n za pomocą współczynników Clebsha-Gordana. Stosując tę samą metodę dodajemy moment pędu jądra i otrzymujemy rozwinięcie stanu końcowego w bazie funkcji własnych całkowitego momentu pędu J_f, M_f ([5]):

$$\begin{aligned} \psi_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)(\Omega_n) &= \sum_{l,m,s} \sum_{J_j M_j} \sum_{J_f M_f} i^l \langle lm; 1/2s | 1/2J_n M_n \rangle \langle J_n M_n; J_j M_j | J_n J_j J_f M_f \rangle \cdot \\ &\cdot 4\pi j_l(p_f r_1) Y_{l,m}^*(\Omega_n) [Y_{lm}(\Omega_x) \chi_{1/2}^s \psi_{J_j}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)]_{M_f}^J \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

lub też w nieco bardziej zwartej postaci (bardziej przydatnej dopóki nie trzeba wykonywać żadnych obliczeń numerycznych):

$$\begin{aligned} |f_{J_f M_f}(\Omega_n)\rangle &= \sum_{J_n, M_n} \sum_{J_j, M_j} \langle J_n M_n; J_j M_j | J_n J_j J_f M_f \rangle \cdot \\ &\cdot |J_n M_n(\Omega_n)\rangle \otimes |J_j M_j\rangle \equiv \sum_{J_f, M_f} |J_f M_f(\Omega_n)\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

W nawiasie wyodrębniono zależność kątową funkcji falowej nukleonu, gdyż nadal musimy po nim całkować w celu otrzymania inkluzywnego przekroju czynnego. Nukleon jest skwantowany wzdłuż innej osi- kierunku emisji, niż operator prądu jądrowego- osie układu laboratoryjnego. Od tego miejsca jawna zależność od kąta zostanie opuszczona ze względu na zwartość notacji.

Cały układ jest teraz opisywany poprzez nieprzywiedlne operatory tensorowe o określonej multipolowości. Zgodnie z twierdzeniem Wignera- Eckarta (C.4.2) możemy zredukować elementy macierzowe NOT $\hat{T}_{JM}(q)$ względem M :

$$\langle J_f M_f | \hat{T}_{JM}(q) | J_i M_i \rangle = \frac{(-1)^{J_i - M_i}}{\sqrt{2J+1}} \langle J_f M_f J_i - M_i | J_f J_i J M \rangle \langle J_f || \hat{T}_J(q) || J_i \rangle. \quad (2.3.8)$$

Ten wzór oddaje treść twierdzenia. Więcej szczegółów podano w [10] a także w [6]. Cała zależność od M zostaje "ukryta" we współczynnikach Clebsha- Gordana. Elementy $\langle J_f || \hat{T}_J(q) || J_i \rangle$ nazywamy *zredukowanymi elementami macierzowymi*. Liczby kwantowe związane z momentem pędu w tych elementach muszą spełniać reguły wyboru, jak chociażby nierówność trójkąta: $|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f$. Teraz chcielibyśmy obliczyć sumy po stanach początkowych i końcowych. Zakładamy, że jądro ma pewien określony początkowy moment pędu J_i a przekaz pędu $\mathbf{k} \parallel \hat{z}$. W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_i} &\equiv \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \\ \sum_f &\equiv \sum_{M_F}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Używając twierdzenia Wignera- Eckarta i relację ortogonalności współczynników Clebscha-Gordana ($\sum_{M_i} \sum_{M_f} |\langle J_f M_f J_i - M_i | J_f J_i J M \rangle|^2 = 1$) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left| \sum_J (-i)^J \sqrt{2J + 1} \langle J_f M_f | \hat{T}_{JM}(q) | J_i M_i \rangle \right|^2 = \quad (2.3.10) \\ & = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left| \sum_J \langle J_f M_f J_i - M_i | J_f J_i J M \rangle \langle J_f | \hat{T}_J(q) | J_i \rangle \right|^2 = \\ & = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_J \left| \langle J_f | \hat{T}_J(q) | J_i \rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Pewną trudność może sprawić nam wykonanie całki po kącie emisji nukleonu. Formalne rozwiązanie problemu wymaga rozważenia transformacji stanów własnych momentu pędu i NOT pod wpływem grupy obrotów (szczegółowa dyskusja w dodatku E.7). W wyniku dostaje się stały czynnik 4π .

Składając w całość wyniki wszystkich dotychczasowych rozważań otrzymujemy następujące wzory na funkcje postaci ([11], [5]):

$$\begin{aligned} 2W_1(q^2) &= \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_{J \geq 1} \left\{ \left| \langle J_f | \hat{T}^{el}(q) | J_i \rangle \right|^2 + \left| \langle J_f | \hat{T}^{mag}(q) | J_i \rangle \right|^2 \right\} R \quad (2.3.11) \\ W_2(q^2) &= -\frac{q^2}{q^2} W_1(q^2) + \frac{q^4}{q^4} \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_{J \geq 0} \left| \langle J_f | \hat{M}_J(q) | J_i \rangle \right|^2 R \end{aligned}$$

gdzie przez $\hat{M}_J(q)$ oznaczono transformatę multipolową J_0 :

$$\hat{M}_{JM} = \int d^3x \hat{\rho}(x) j_J(qx) Y_{JM}(\Omega). \quad (2.3.12)$$

To pozwala nam na zapisanie ostatecznej formy wzoru na różniczkowy przekrój czynny w rozpraszaniu inkluzywnym:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} &= \sigma_M \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_K^{\text{kanały}} \left\{ \frac{q^4}{q^4} \sum_{J \geq 0} \left| \langle J_f^k | \hat{M}_J(q) | J_i \rangle \right|^2 + \right. \quad (2.3.13) \\ &+ \left. \left(-\frac{q^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right) \sum_{J \geq 1} \left[\left| \langle J_f^k | \hat{T}^{el}(q) | J_i \rangle \right|^2 + \left| \langle J_f^k | \hat{T}^{mag}(q) | J_i \rangle \right|^2 \right] \right\} R^k. \end{aligned}$$

Uwzględniliśmy konieczność sumowania po wszystkich kanałach k , włączając w to kanały ekskluzywne (procesy bez emisji nukleonu). Dalsze obliczenia wymagają wprowadzenia konkretnego modelu jądra atomowego, a więc zrobienia pewnych założeń o fizyce tarczy, na której następuje rozpraszanie. Należy też pamiętać, że stany końcowe $|J_f\rangle$ powstają ze złożenia momentu pędu jądra końcowego i rozkładu fali płaskiej wybitego nukleonu na funkcje sferyczne.

3. DYNAMIKA PROCESÓW JĄDROWYCH. MODELE TDA I RPA

Po skonstruowaniu modelu kinematycznego rozpraszania elektronu na jądrze atomowym nadszedł czas na przedstawienie metody opisu procesów zachodzących wewnątrz jądra. Zakładamy, że hamiltonian układu nukleonów tworzących jądro daje się zapisać w postaci poniższego szeregu:

$$H = \sum_i T_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{i,j} + \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k} V_{i,j,k} + \dots \quad (3.0.1)$$

Kolejne wyrazy związane są z energią kinetyczną T pojedynczych nukleonów, oddziaływaniem 2- i 3- ciałowym. Zazwyczaj zakłada się, że człony wyższych rzędów są pomijalnie małe. Ze względu na złożoność zagadnienia wprowadza się wiele opisów przybliżonych. Przybliżenia te umożliwiają nam na numeryczne obliczenie takich obserwacji, jak spektrum wzbudzeń, czy też spin jądra atomowego. Dokładność, z jaką to robią jest wyznacznikiem użyteczności teorii.

W modelu powłokowym zastępuje się dwuciałowe oddziaływania międynukleonowe pewnym uśrednionym potencjałem pochodzącym od wszystkich nukleonów tworzących stan podstawowy jądra. Oddziaływanie trójciałowe nie jest brane pod uwagę. Tak więc hamiltonian przyjmuje postać:

$$H^{SM} = \sum_{i=1}^A (T_i + V_i). \quad (3.0.2)$$

Procedura ta pozwala, przy użyciu tzw. potencjałów efektywnych, na odtworzenie potencjału jednociąłowego podobnego do często używanych potencjałów empirycznych (np. potencjału Woods- Saxona). Obliczone za jej pomocą poziomy energetyczne, spin oraz jednociąłowe funkcje falowe (z których można np. rekonstruować gęstość rozkładu ładunku, a więc i szacować momenty elektromagnetyczne jądra) sprawdzają się dobrze w przypadku stanów podstawowych jąder "magicznych" oraz posiadających niewielką liczbę nukleonów walencyjnych. W obrębie modelu powłokowego udało się również wyjaśnić wyjątkowo silną energię wiązania jąder "magicznych".

Dokładniejsze modele bazują na powyższej metodzie pola średniego, ale biorą pod uwagę pełny hamiltonian dwuciałowy:

$$H = \sum_i (T_i + V_i) + \sum_i \left(\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_{ij} - V_i \right) = H^{(0)} + V. \quad (3.0.3)$$

Oddziaływanie jednociąłowe nie występuje w pełnym hamiltonianie (3.0.1) i jest "włożone ręką", dlatego je odejmujemy w V . Zmiana hamiltonianu powoduje zmianę jego stanów własnych. Problemem jest brak metod obliczeniowych na znalezienie rozwiązania pełnego hamiltonianu dwuciałowego. Dlatego też ogranicza się pełną przestrzeń Hilberta generowaną przez H w nadziei na znalezienie rozwiązań przybliżonych, które zadowalająco

odtworzą wyniki eksperymentów. Dwie metody są szczególnie popularne. Zarówno przybliżenie Tamma -Dancoffa (TDA) jak i przybliżenie faz przypadkowych (RPA od *random phase approximation*) opierają się na analizie stanów własnych wzbudzeń cząstka- dziura. Różnica pomiędzy nimi tkwi w stanie podstawowym. TDA bazuje na próżni hamiltonianu jednociąłowego, ze wszystkimi orbitalami obsadzonymi aż do pewnego, ustalonego, poziomu. W RPA stan podstawowy zawiera niewielką domieszkę nisko leżących kolektywnych wzbudzeń, co znacznie poszerza przestrzeń rozwiązań. W tym rozdziale omówimy oba te podejścia (poświęcając więcej uwagi modelowi RPA). Ich wyprowadzenia opierać się będą na dwóch różnych formalizmach: mechaniki kwantowej i kwantowej teorii wielu ciał.

Wcześniej jednak, w celu lepszego zrozumienia natury problemu, zajmiemy się pewnym kwantowomechanicznym modelem. Został on zaproponowany przez Blocha w latach 60' i opisany m.in. w [2] i [8]. W porównaniu do TDA i RPA uwzględnia o wiele większą przestrzeń rozwiązań. Wyprowadzenie równań TDA z wąskiej podklasy stanów własnych jednociąłowej bazy przestrzeni uwzględnianej przez Blocha, które zaprezentujemy w 3.3, potwierdzi tę tezę.

3.1 Uproszczony model rozpraszania do kontinuum według Blocha

Rozważania w tym podrozdziale są opisem fragmentu części teoretycznej dwóch prac¹ [8], [2]. Z poniższych rozważań rozwinęła się idea modeli typu TDA². Bazujemy jedynie na zasadach mechaniki kwantowej.

Zakładamy, że jądro atomowe jest układem A cząstek opisywanych hamiltonianem:

$$H = H_0 + V. \quad (3.1.1)$$

Tutaj $H_0 = T + \sum_{i=1}^A V_i$ jest hamiltonianem opisującym cząstki niezależne w zewnętrznym potencjale $\sum_i V_i$. W pewnym przybliżeniu cząstki możemy traktować jako niezależne obiekty, poruszające się w efektywnym potencjale otrzymywanym z uśrednienia oddziaływania dwuciąłowego po wszystkich nukleonach³. Stany własne H_0 zdefiniują nam bazę funkcji jednociąłowych. Potencjał $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{i,j} - \sum_i V_i$ jest resztkowym oddziaływaniem dwuciąłowym. Będziemy je traktować jako małe zaburzenie układu. Odjęliśmy w nim jednociąłowy potencjał średni, gdyż ten został uwzględniony w H_0 . Hamiltonian H_0 generuje jednocząstkowe stany związane $|\phi_m\rangle$ o energiach $\epsilon_m < 0$ dla każdej wartości l i j . Dla każdej dodatniej wartości energii $\epsilon > 0$ istnieją też stany kontinuum $|\phi_{lj\epsilon}\rangle$, znormalizowane w następujący sposób:

$$\langle \phi_{lj\epsilon} | \phi_{l'j'\epsilon'} \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{j,j'} \delta(\epsilon - \epsilon'). \quad (3.1.2)$$

Energia nukleonu będzie kryterium pozwalającym na zaklasyfikowanie stanu do grupy stanów związanych lub kontinuum. Niezaburzone funkcje własne układu A nukleonów konstruujemy z wyznaczników Slatera złożonych ze stanów $|\phi_m\rangle$ i $|\phi_{lj\epsilon}\rangle$. Ograniczymy się przy tym do funkcji zawierających co najwyżej 1 stan w kontinuum. Wtedy przestrzeń

¹ Niedostępnych w formie e-printu, ale ciekawych ze względu na kwantowomechaniczną próbę opisu rezonansów jądrowych przy rozpraszaniu inkluzywnym.

² W dalszej części pracy wyprowadzimy tą teorię korzystając tylko z zasad mechaniki kwantowej.

³ Jedną z metod na znalezienie takiego potencjału (Hartree-Fock) opiszemy przy okazji wyprowadzenia równań CRPA.

konfiguracyjna podzieli się na 2 ortogonalne podprzestrzenie **1** (tylko stany związane) i **2** (1 stan w kontinuum). Wektory stanów z tych przestrzeni będziemy oznaczać poprzez:

$$\begin{aligned} |m_1, m_2 \cdots, m_A\rangle &\equiv |\alpha\rangle \in \mathbf{1} \\ |m_1 \cdots, m_{A-1}; l_j \epsilon\rangle &\equiv |\gamma; l_j \epsilon\rangle \equiv |\beta \epsilon\rangle \in \mathbf{2}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Niezaburzone energie tych stanów oznaczamy poprzez E_α i $E_\gamma + \epsilon$, gdzie $E_\gamma \equiv E_\beta$ to energia $N - 1$ związanych cząstek. Najogólniejsza funkcja falowa w tej przestrzeni konfiguracyjnej może być rozłożona na składowe $|1\rangle \in \mathbf{1}$ oraz $|2\rangle \in \mathbf{2}$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |1\rangle + |2\rangle \\ |1\rangle &= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle a_{\alpha} \\ |2\rangle &= \sum_{\beta} \int d\epsilon |\beta \epsilon\rangle a_{\beta}(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

gdzie a_{α} i $a_{\beta}(\epsilon)$ to dowolne amplitudy.

Dwuciałowe oddziaływanie resztkowe V możemy rozłożyć na 4 części odpowiadające przestrzeniom **1** i **2**:

$$V = \begin{vmatrix} V^{11} & V^{12} \\ V^{21} & V^{22} \end{vmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Elementy macierzowe $\langle \alpha | V | \alpha' \rangle$ budowane z V^{11} są stałymi zależnymi od dyskretnych liczb α i α' (stany związane). Elementy V^{12} i V^{21} , $\langle \alpha | V | \beta \epsilon \rangle$ i $\langle \beta \epsilon | V | \alpha \rangle$, są ciągłymi funkcjami ϵ i równocześnie zależą od α i β . Według Blocha [2] człon V^{22} separuje się na 2 części:

$$\langle \beta \epsilon | V | \beta' \epsilon' \rangle = \langle \gamma l_j \epsilon | V | \gamma' l'_j \epsilon' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{jj'} \delta(\epsilon - \epsilon') \langle \gamma | V_r | \gamma' \rangle + \langle \beta \epsilon | V_d | \beta' \epsilon' \rangle. \quad (3.1.6)$$

Pierwszy człon V_r odpowiada oddziaływaniu pomiędzy $A - 1$ cząstkami w stanie związanym z pominięciem cząstki w kontinuum, drugi zaś odpowiada oddziaływaniu/ możliwości wymiany cząstki w kontinuum z pozostałymi nukleonami. Możliwość takiej separacji można wykazać z jawnej postaci elementu macierzowego:

$$\begin{aligned} \langle \beta \epsilon | V | \beta' \epsilon' \rangle &= \int d^3 x_1 \cdots d^3 x_A \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \phi_{m_1}^*(x_1) \cdots \phi_{m_{A-1}}^*(x_{A-1}) \phi_{n, \epsilon}^*(x_A) \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{i, j} v_{i, j} - \sum_i v_i \right) \phi_{m'_1}(x_{\mathcal{P}(1)}) \cdots \phi_{m'_A}(x_{\mathcal{P}(A-1)}) \phi_{n', \epsilon'}(x_{\mathcal{P}(A)}). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Tutaj $\mathcal{P}(i)$ oznacza permutację elementów zbioru A elementowego (liczymy wyznaczniki Slatera). Za każdym razem, kiedy $\mathcal{P}(A) = A$ oraz $i, j \neq A$ dostaniemy oddzielny człon zawierający $\langle \phi_{n, \epsilon} | \phi_{n', \epsilon'} \rangle = \delta_{n, n'} \delta(\epsilon - \epsilon')$. Elementy macierzowe kontinuum liczy się tak samo, jak dla stanów związanych, tj. na antysymetryzowanych funkcjach falowych. W ten sposób bierzemy pod uwagę statystykę fermionową i zakaz Pauliego.

Zakładamy, że rozwiązanie równania Schrödingera dla pełnego hamiltonianu daje się zapisać w tej bazie (oczywiście jest to przybliżenie). Tak więc bierzemy funkcję falową postaci (3.1.4) i rozwiązujemy układ równań na współczynniki a :

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \cdot | H | \Psi \rangle &= E | \Psi \rangle \\ \langle \beta \epsilon | \cdot | H | \Psi \rangle &= E | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

W jawnej postaci układ ten wygląda następująco:

$$\begin{aligned} (E_\alpha - E)a_\alpha + \sum_{\alpha'} \langle \alpha | V | \alpha' \rangle a_{\alpha'} + \sum_{\beta'} \int d\epsilon' \langle \alpha | V | \beta' \epsilon' \rangle a_{\beta'}(\epsilon') &= 0 \quad (3.1.9) \\ (E_\beta + \epsilon - E)a_\beta(\epsilon) + \sum_{\alpha'} \langle \beta \epsilon | V | \alpha' \rangle a_{\alpha'} + \sum_{\gamma'} \langle \gamma | V_r | \gamma' \rangle a_{\beta'}(\epsilon) + \\ + \sum_{\beta'} \int d\epsilon' \langle \beta \epsilon | V_d | \beta' \epsilon' \rangle a_{\beta'}(\epsilon') &= 0. \end{aligned}$$

Spodziewamy się, że układ równań związanych z kontinuum będzie wybierał stany o energii nukleonu spełniającej zasadę zachowania energii. W praktyce oznacza to, że amplitudy $a_{\beta'}(\epsilon')$ będą posiadać bieguny w ϵ' całkowalne względem ϵ' . Gwarantuje to nam, że rozwiązania posiadać będą skończoną normę.

Według Blocha, amplitudy $a_\beta(\epsilon)$ zawierają osobliwości związane z asymptotycznym zachowaniem się rozwiązań (3.1.4) (na dużym dystansie nukleon nie "widzi" już jądra resztkowego). Zakładamy, że te osobliwości są całkowalne. Redukujemy drugie z równań (3.1.9) poprzez usunięcie członów skończonych. To prowadzi do:

$$(E_\beta + \epsilon - E)a_\beta(\epsilon) + \sum_{\gamma'} \langle \gamma | V_r | \gamma' \rangle a_{\beta'}(\epsilon) = 0. \quad (3.1.10)$$

Tak więc osobliwości pojawiają się dla $\epsilon = E - E_\delta$, które związane są z wartościami własnymi równania:

$$(E_\gamma - E_\delta)u_\gamma^\delta + \sum_{\gamma'} \langle \gamma | V_r | \gamma' \rangle u_{\gamma'}^\delta = 0. \quad (3.1.11)$$

To równanie opisuje $A - 1$ nukleonów jądra resztkowego o liczbach kwantowych δ w przestrzeni stanów związanych. Jest to poprawka do energii własnej jądra resztkowego związana z dokładnym oddziaływaniem dwuciałowym i z tego równania możemy szacować M_{A-1}^* . Współczynniki u_γ^δ opisują jądro resztkowe w tym przybliżeniu. Z tych równań wynika, że osobliwości związane są ściśle z zasadą zachowania energii: energia E układu jest asymptotycznie sumą energii nukleonu w kontinuum oraz jądra resztkowego.

Liczby kwantowe δ oraz l, j dla nukleonu w kontinuum definiują kanał reakcji, związany z rozwiązaniem równania. Przejście do bazy kanałów reakcji z bazy wyznaczników Słatera odbywa się następująco:

$$|\lambda \epsilon\rangle = |\delta l j \epsilon\rangle = \sum_{\gamma} u_\gamma^\delta |\gamma l j \epsilon\rangle \quad (3.1.12)$$

a układ równań (3.1.9) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} (E_\alpha - E)a_\alpha + \sum_{\alpha'} \langle \alpha | V | \alpha' \rangle a_{\alpha'} + \sum_{\beta'} \int d\epsilon' \langle \alpha | V | \beta' \epsilon' \rangle a_{\beta'}(\epsilon') &= 0 \quad (3.1.13) \\ (E_\lambda + \epsilon - E)a_\lambda(\epsilon) + \sum_{\lambda'} \int d\epsilon' \langle \lambda \epsilon | V | \lambda' \epsilon' \rangle a_{\lambda'}(\epsilon') + \\ + \sum_{\alpha'} \langle \lambda \epsilon | V | \alpha' \rangle a_{\alpha'} &= 0. \end{aligned}$$

Zamiana E_δ na E_λ możliwa jest ze względu na niezależność tej wielkości od energii nukleonu w kontinuum. Istnienie osobliwości w tych równaniach jest bardziej uwidocznione, niż w (3.1.9). Oczywiście rozwiązania muszą być całkowalne (inaczej mielibyśmy nieokreśloną, nieskończoną funkcję falową), co pozostawia nam do wyboru:

$$\begin{aligned} a_\lambda(\epsilon) &= A_\lambda \delta(\epsilon + E_\lambda - E) + b_\lambda(\epsilon) \\ b_\lambda(\epsilon) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow E - E_\lambda} \frac{B_\lambda}{\epsilon + E_\lambda - E} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

lub ze względu na wygodę

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ A_\lambda \delta(\epsilon + E_\lambda - E) + \frac{B_\lambda}{\epsilon + E_\lambda - E \pm i\eta} \right\} &= \\ = (A_\lambda \mp i\pi B_\lambda) \delta(\epsilon + E_\lambda - E) + Vp \frac{B_\lambda}{\epsilon + E_\lambda - E}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Poprzez Vp oznaczyliśmy wartość główną Cauchy'ego. Te bieguny pojawiają się w miejscu, gdzie różnica energii jądra z dziurą i wybitego nukleonu wynosi E . Część zawierająca wartość główną Cauchy'ego zawiera informacje o stanach, w których $\epsilon \neq E - E_\delta$ a więc i poprawkę na to, że nasz model jest przybliżony. Ponieważ $a_\lambda(\epsilon)$ jest uniwersalna amplitudą w tego typu modelach, możemy wywnioskować, że analogiczne podstawienie będzie słuszne także w CTDA oraz CRPA.

Osobną kwestią jest regularyzacja funkcji falowych. Nietrudno sprawdzić, że w przypadku istnienia bieguna typu delty Diraca, wyznaczającego pewien kanał rozpraszania opisany przez β_0 , norma funkcji falowej będzie nieskończona:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \sum_{\alpha, \alpha'} a_{\alpha'}^* a_\alpha \langle \alpha' | \alpha \rangle + \\ &+ \sum_{\beta, \beta'} \int d\epsilon d\epsilon' A^* \delta_{\beta', \beta_0} \delta(\epsilon' - E_0) A \delta_{\beta, \beta_0} \delta(\epsilon - E_0) \langle \beta' \epsilon' | \beta \epsilon \rangle = \\ &= \sum_{\alpha} |a_\alpha|^2 + \sum_{\beta} \int d\epsilon |A|^2 \delta_{\beta, \beta_0}^2 \delta^2(\epsilon - E_0). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Niestety, autorzy [2], [5], [3] pomijają tę kwestię milczeniem. Sama delta jest związana z zasadą zachowania energii. Prawdopodobnym rozwiązaniem problemu jest zdefiniowanie zagadnienia w skończonym pudle (np. emitowany nukleon jako fala płaska- wzór (2.3.4)). Wtedy nie mamy ciągłej energii nukleonu, tylko dyskretne wartości. To prowadzi do zamiany kwadratu delty Diraca, który daje wynik nieskończony, na kwadrat delty Kroneckera, a poszukiwana normalizacja przyjmuje poniższą postać:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{\alpha} |a_\alpha|^2 + |A|^2. \quad (3.1.17)$$

Konwencja ta zgadza się z techniką obliczeń numerycznych, w których baza funkcji własnych musi być skończona.

3.2 Hamiltonian w reprezentacji drugiego kwantowania i równania Hartreego- Focka

Model Blocha daje bogaty opis dynamiki procesów kwazielastycznych. Niestety, pełna przestrzeń rozwiązań pisująca stany związane oraz jądro+ nukleon w kontinuum jest nadal zbyt złożona. Dla tak prostych jąder, jak chociażby ^{16}O , ilość możliwych dyskretnych

stanów wzbudzonych jest wielka. Poza tym obliczanie za każdym razem elementów macierzowych postaci (3.1.7) jest technicznie trudne (dla ^{16}O występuje tam $16! \approx 4.83 \cdot 10^{12}$ permutacji jednonukleonowych funkcji falowych). Dlatego też ograniczamy klasę rozwiązań do najbardziej prawdopodobnych wzbudzeń typu para cząstka- dziura. W tej sytuacji użycie formalizmu drugiej kwantyzacji, który wprowadza operatory kreacji i anihilacji nukleonów, wydaje się być optymalnym rozwiązaniem. Notacja i rachunki w tym rozdziale oraz związanych z nim dodatkach opierają się na [6], za wyjątkiem opisu stanów kontinuum.

Zacznijmy od zapisu hamiltonianu układu w języku drugiej kwantyzacji oraz objaśnienia stosowanej notacji. Założeniem naszego modelu jest możliwość sprowadzenia pełnego hamiltonianu (3.0.1) do dwóch członów: jednociąłowego i potencjału dwuciąłowego odpowiadającego za oddziaływanie cząstka- dziura, tak więc mamy poniższą formułę:

$$\hat{H} \approx \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha}^{\dagger} \langle \alpha | \hat{T} | \beta \rangle c_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}^{\dagger} \langle \alpha \beta | V | \gamma \delta \rangle c_{\delta} c_{\gamma}. \quad (3.2.1)$$

Greckimi literami oznaczono liczby kwantowe opisujące stan 1-cząstkowy⁴. Operatory $c_{\alpha}^{\dagger}/c_{\alpha}$ odpowiadają za kreację/ anihilację nukleonu o liczbach kwantowych α i spełniają standardową fermionową relację komutacyjną:

$$\{c_{\alpha}^{\dagger}, c_{\beta}\} = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (3.2.2)$$

Dodatkowym założeniem naszego modelu jest możliwość separacji pojedynczego nukleonu. Oznacza to, że przestaje być on stanem związanym o ujemnej energii i zestawie liczb kwantowych $\{n, l, j, m\}$. Możemy go scharakteryzować pewną dodatnią energią ϵ oraz liczbami kwantowymi momentu pędu $\{l, j, m\}$ Tak więc

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\equiv |n_{\alpha}, l_{\alpha}, j_{\alpha}, m_{\alpha}\rangle; \text{ stan dyskretny} \\ |\alpha\rangle &\equiv |\epsilon_{\alpha}, l_{\alpha}, j_{\alpha}, m_{\alpha}\rangle; \text{ stan kontinuum.} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Stąd wynika, iż sumowanie po energiach jest sumą po dyskretnych stanach dla $\epsilon_{\alpha} < 0$ i całką dla stanów kontinuum. Ze względu na czytelność notacji w niektórych miejscach będziemy musieli korzystać z osobnej notacji dla zbioru wszystkich liczb kwantowych za wyjątkiem energii:

$$\sum_{[\alpha]} \equiv \sum_{l_{\alpha}, j_{\alpha}, m_{\alpha}}. \quad (3.2.4)$$

odnoszącej się jedynie do stanów kontinuum.

W dalszej części rozważań dokonamy redukcji równań ze względu na m . Dlatego też wprowadzamy oznaczenie:

$$|\alpha\rangle \equiv |a, m_{\alpha}\rangle. \quad (3.2.5)$$

Dodatkowo oznaczymy $|- \alpha\rangle \equiv |a, -m_{\alpha}\rangle$.

Możemy zadać sobie pytanie, czy podstawowa relacja antykomutacyjna operatorów jest nadal standardowa, pomimo rozdziału przestrzeni na część dyskretną i kontinuum. Możemy to sprawdzić rozpisując komutator względem energii jednej z cząstek:

$$\{c_{\alpha}^{\dagger}, c_{\beta}\} = \delta_{\alpha, \beta} \equiv \delta_{\alpha, \beta}^{dyskr.} \Theta(-\epsilon_{\alpha}) + \delta(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\beta}) \delta_{[\alpha], [\beta]} \Theta(\epsilon_{\alpha}) \quad (3.2.6)$$

⁴ Izospin został chwilowo pominięty dla prostoty obliczeń. Później wyjaśnimy, jak go, w razie potrzeby, w prosty sposób przywrócić.

gdzie rozdzieliliśmy część dyskretną od kontinuum.

Dokonyamy teraz transformacji kanonicznej, definiującej operatory cząstek i dziur (omówionej w dodatku F.1):

$$\begin{aligned} a_\alpha^\dagger &\equiv c_\alpha^\dagger, \quad \alpha > F \\ b_\alpha^\dagger &\equiv S_{-\alpha} c_{-\alpha}, \quad \alpha < F. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Czynnik fazowy $S_{-\alpha}$ wprowadziliśmy w celu zapewnienia, że operator b_α^\dagger kreuje dziurę o określonym momencie pędu. Dowód przedstawiliśmy w tym samym dodatku.

Według naszego założenia układ daje się opisać w bazie niezależnych stanów jedno-cząstkowych. Chcielibyśmy, żeby część jednociąłowa hamiltonianu była diagonalna w tej bazie. Musimy więc rozwiązać zagadnienie własne dla cząstek niezależnych, poruszających się w pewnym potencjale uśrednionym pochodzącym od wszystkich cząstek w układzie (rachunki przedstawiono w dodatku F.1). Diagonalizacja ta prowadzi do równań w postaci:

$$\langle \beta | \hat{T} | \delta \rangle + \sum_{\alpha < F} (\langle \alpha \beta | V | \alpha \delta \rangle - \langle \alpha \beta | V | \delta \alpha \rangle) = \epsilon_\beta \delta_{\beta, \delta}. \quad (3.2.8)$$

Możemy też zapisać równanie Schrödingera dla funkcji jednociąłowej:

$$\begin{aligned} \hat{T} \phi_\delta(\mathbf{x}_2) + \sum_{\alpha < F} \int d^3 x_1 [\phi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_\alpha(\mathbf{x}_1) \phi_\delta(\mathbf{x}_2) + \\ - \phi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_\delta(\mathbf{x}_1) \phi_\alpha(\mathbf{x}_2)] = \epsilon_\delta \phi_\delta(\mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Są to tak zwane równania Hartreego- Focka, w których nukleony poruszają się w uśrednionym potencjale jądra w stanie podstawowym⁵. Potencjał dwuciałowy w ogólności zależy też od liczb kwantowych nukleonów (w jądrach atomowych występuje silne sprzężenie spin-orbita), ale zależność tę pominięto dla skrócenia notacji. Pierwszy z członów energii jest po prostu lokalnym potencjałem uśrednionym pochodzącym od gęstości cząstek w stanach α , tworzących stan podstawowy jądra:

$$v^{dir.} = \sum_{\alpha < F} \int d^3 x_1 |\phi_\alpha(\mathbf{x}_1)|^2 V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (3.2.10)$$

drugi zaś jest nielokalnym potencjałem "wymiany" pomiędzy dwoma różnymi stanami jednocząstkowymi:

$$v^{exch.} = \sum_{\alpha < F} \phi_\alpha(\mathbf{x}_2) \int d^3 x_1 \phi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (3.2.11)$$

gdzie $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ to kwantowomechaniczny unitarny operator translacji przestrzennej z punktu x_2 do punktu x_1 , spełniający równanie

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \phi_\alpha(\mathbf{x}_2) = \phi_\alpha(\mathbf{x}_1). \quad (3.2.12)$$

Generatorem takiego przesunięcia jest, jak nietrudno sprawdzić, operator pędu. Jawna postać operatora translacji zadana jest wzorem:

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \exp(-i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \hat{p}). \quad (3.2.13)$$

⁵ Formalizm ten sprawdza się dobrze w innych kwantowych zagadnieniach wielu ciał, np. w teorii elektronów w metalu, czy też powłok atomów wieloelektronowych.

Możemy powiedzieć, że człon wymiany związany jest z "przeskokami" pomiędzy stanami δ i α ⁶. Oba człony składają się na tzw. potencjał Hartreego- Focka:

$$v^{HF} = v^{dir.} - v^{exch.} \quad (3.2.14)$$

Układ równań (3.2.9) nie jest układem jawnym, rozwiązywalnym w jednej iteracji. Należy go rozwiązywać w sposób samouzgodniony. Startujemy z pewnej bazy $\{\phi_\alpha\}^{(0)}$, rozwiązujemy dla niej układ Hartreego- Focka, otrzymując funkcje $\{\phi_\alpha\}^{(1)}$, te z kolei wkładamy z powrotem do obliczeń itd. Procedura jest powtarzana aż do osiągnięcia zbieżności, tj. do momentu, w którym funkcje $\{\phi_\alpha\}^{(i+1)}$ oraz ich energie własne $\epsilon_\alpha^{(i+1)}$ nie różnią się w znaczący sposób od $\{\phi_\alpha\}^{(i)}$ oraz $\epsilon_\alpha^{(i)}$. Odpowiada to sumowaniu kolejnych poprawek pierwszego rzędu do energii własnej cząstek w układzie wielociałowym: pojedyncza cząstka oddziałuje w sposób uśredniony z resztą, z kolei reszta też oddziałuje sama ze sobą nawzajem itd. Otrzymane w ten sposób rozwiązania posłużą nam do konstrukcji średniopolowego stanu podstawowego oraz energii nieoddziałujących wzajemnie cząstek i dziur.

Hamiltonian w bazie jednocząstkowej zadanej przez (3.2.9), z częścią jednociałową przepisana za pomocą operatorów cząstek i dziur, przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \quad (3.2.15) \\ H_0 &= \sum_{\alpha < F} (T_\alpha + \frac{1}{2} V_\alpha) \\ T_\alpha &\equiv \langle \alpha | \hat{T} | \alpha \rangle, \quad V_\alpha \equiv \sum_{\beta < F} (\langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \beta\alpha \rangle) \\ \hat{H}_1 &= \sum_{\alpha > F} \epsilon_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha - \sum_{\alpha < F} \epsilon_\alpha b_{-\alpha}^\dagger b_{-\alpha} \\ \hat{H}_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : \end{aligned}$$

Uwaga do notacji: zauważmy, że odpowiednio $H_0 + \hat{H}_1 \equiv H^{(0)}$ oraz $\hat{H}_2 \equiv V$ z teorii Blocha. Tutaj $\epsilon_\alpha = T_\alpha + V_\alpha$ to energie własne obliczone w równaniach Hartreego- Focka, odpowiadające energiom cząstek i dziur niezaburzonym przez resztkowe oddziaływanie. Co więcej, stan podstawowy Hartreego- Focka, w którym wszystkie poziomy są obsadzone aż do F , jest stanem własnym jednociałowej części Hamiltonianu. Próżnię Hartreego-Focka w reprezentacji położeniowej możemy zapisać następującym wzorem:

$$|0_{HF}\rangle = N \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \prod_{i=1}^F c_1^\dagger(\mathbf{x}_{\mathcal{P}(1)}) \dots c_F^\dagger(\mathbf{x}_{\mathcal{P}(F)}) |0\rangle \quad (3.2.16)$$

gdzie N to czynnik normalizacyjny, dzięki któremu $\langle 0_{HF} | 0_{HF} \rangle = 1$. Zachowaliśmy wprowadzoną w poprzednim rozdziale konwencję antysymetryzacji funkcji falowej. Operatory $c_i^\dagger(\mathbf{x})$ odpowiadają za kreację nukleonu na i - tym orbitalu. Zauważmy, że ten stan spełnia:

$$a_\alpha |0_{HF}\rangle = b_\alpha |0_{HF}\rangle \equiv 0 \quad (3.2.17)$$

⁶ Ścisła interpretacja tych równań możliwa jest dopiero w obrębie kwantowej teorii wielu ciał, gdzie zaczynamy od równania Dysona, przybliżając nieprzywiedlną energię własną nieskończonym szeregiem poprawek pierwszego rzędu. Nielokalny potencjał wymiany jest właśnie tą nieprzywiedlną energią własną. Szczegółowe wyprowadzenie z komentarzem znajdziemy m.in. w [6].

Zaletą hamiltonianu (3.2.15) jest diagonalność $H_0 + \hat{H}_1$ oraz to, że $\langle 0_{HF} | \hat{H}_2 | 0_{HF} \rangle$ znika. Przytoczona tutaj transformacja pochodzi z [6].

Przybliżenie Hartreego- Focka nie nadaje się, niestety, do opisu wzbudzeń kolektywnych i dlatego musimy wypracować inne podejścia, które przedstawimy w kolejnych rozdziałach.

3.3 Wyprowadzenie równań TDA w ramach formalizmu mechaniki kwantowej

Najprostszym podejściem do opisu wzbudzeń kolektywnych jest TDA. Jego prostota jest tak wielka, że wyprowadzimy go rozważając pewną podklasę przestrzeni rozwiązań uwzględnionej w modelu Blocha, rezygnując z formalizmu drugiej kwantyzacji. W cytowanych pracach nie stosuje się tego podejścia. Zakładamy, że oddziaływanie jednociałowe V_i jest zadane potencjałem samouzgodnionym Hartreego- Focka, tj.:

$$V_i = V_i^{HF} \quad (3.3.1)$$

Stan podstawowy hamiltonianu jednociałowego H_0 będzie wtedy próżnią Hartreego- Focka $|0_{HF}\rangle$ o całkowicie zapelnionych powłokach aż do pewnego poziomu F (wzór (3.2.16)). Jedyne wzbudzenia, które będziemy brali pod uwagę, będą polegały na usunięciu jednego nukleonu ze stanu podstawowego i przeniesieniu go powyżej poziomu F . Stąd notacja \uparrow . Tak, jak uprzednio, stany spełniające ten warunek tworzą 2 przestrzenie konfiguracyjne zawierające tylko stany związane i jeden stan w kontinuum odpowiednio. Zawierają się one w przestrzeni rozpatrywanej przez Blocha. Wprowadźmy notację:

$$\begin{aligned} |m_1^1 \dots m_i^i m_{i+1}^{i+2} \dots m_{A-1}^A m_A^p\rangle &\equiv |\alpha \uparrow\rangle \in \mathbf{1} \uparrow \subset \mathbf{1} \\ |m_1^1 \dots m_i^i m_{i+1}^{i+2} \dots m_{A-1}^A; l j \epsilon\rangle &\equiv |\gamma \uparrow; [p] \epsilon\rangle \equiv |\beta \epsilon \uparrow\rangle \in \mathbf{2} \uparrow \subset \mathbf{2}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Gdzie, jak uprzednio, m oznacza liczby kwantowe opisujące stan jednocząstkowy a dolny indeks oznacza numer nukleonu w jądrze. Dodatkowy górny indeks natomiast numer stanu. Taki zapis oznacza, że jeden z nukleonów został "wyjęty" ze swojego orbitalu i przeniesiony do innego, o wyższej energii, zostawiając po sobie puste miejsce. Indeks p oznacza liczby kwantowe nukleonu na poziomie o wyższej energii, natomiast $\{[p], \epsilon\}$ oznacza moment pędu i energię cząstki w kontinuum. Od tej pory nukleon w stanie wzbudzonym będziemy nazywać cząstką (p jak *particle*), natomiast pozostawioną po nim lukę- dziurą (h jak *hole*). Ponieważ jedyną różnicą pomiędzy wektorami tej przestrzeni są indeksy stanu, z którego wyjęliśmy nukleon oraz stanu, do którego trafił, łatwo wykazać, iż:

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \uparrow | \alpha \uparrow \rangle &\equiv \delta_{\alpha \uparrow, \alpha' \uparrow} \equiv \delta_{p, p'} \delta_{h, h'} \equiv \langle p' h' | p h \rangle \\ \langle \beta' \epsilon' \uparrow | \beta \epsilon \uparrow \rangle &\equiv \delta_{\beta \uparrow, \beta' \uparrow} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) \equiv \delta_{[p], [p']} \delta_{h, h'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) \equiv \langle [p'] \epsilon_{p'} h' | [p] \epsilon_p h \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Do numeracji stanów wystarczy nam znajomość liczb kwantowych p i h (bądź też $[p], \epsilon$ i h). To oznacza, że możemy zmienić notację na:

$$\begin{aligned} |\alpha \uparrow\rangle &\equiv |p h\rangle \\ |\beta \uparrow \epsilon\rangle &\equiv |[p] h \epsilon_p\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Warto też zwrócić uwagę na to, że usuwając ze stanu podstawowego o $J = 0$ cząstkę o momencie pędu j , m powinniśmy uwzględnić pewien czynnik symetrii, aby dziura również

miała moment pędu j, m . Dyskusję tą odłożymy do dodatku F.1, dotyczącego formalizmu CRPA, gdzie czynniki fazowe zostaną wyprowadzone w ramach formalizmu "drugiej kwantyzacji". Na razie zakładamy, że czynnik ten został uwzględniony w definicji funkcji falowych. Łatwo znaleźć energię niezaburzoną stanów $|ph\rangle$:

$$H_0 |ph\rangle = (\epsilon_p - \epsilon_h + E_0) |ph\rangle \quad (3.3.5)$$

gdzie:

$$H_0 |0 \uparrow\rangle = E_0 |0 \uparrow\rangle \quad (3.3.6)$$

to energia stanu podstawowego jądra w przybliżeniu pola średniego. Taka postać energii wzbudzeń stanów niezaburzonych wynika z faktu, że usuwamy jedną z funkcji falowych stanu podstawowego, odejmując niezaburzoną energię ϵ_h , i tworzymy funkcję falową w stanie wzbudzonym, dodając ϵ_p .

Funkcję własną pełnego hamiltonianu zapiszemy w postaci:

$$|\Psi^E \uparrow\rangle = |1 \uparrow\rangle + |2 \uparrow\rangle \equiv \sum_{p,h}^{dysk.} a_{ph}^E |ph\rangle + \sum_{[p],h}^{kont.} \int d\epsilon_p a_{[p]h}^E(\epsilon_p) |[p]h\epsilon_p\rangle \quad (3.3.7)$$

spełniającą równanie Schrödingera:

$$(H_0 + V) |\Psi^E \uparrow\rangle = E |\Psi^E \uparrow\rangle. \quad (3.3.8)$$

Warunek normalizacyjny jest następujący:

$$1 = \sum_{ph} |a_{ph}^E|^2 + \sum_{[p],h}^{kont.} \int d\epsilon_p |a_{[p]h}^E(\epsilon_p)|^2 \quad (3.3.9)$$

Dalej postępujemy podobnie, jak w poprzednim paragrafie, a mianowicie liczymy elementy macierzowe hamiltonianu:

$$\begin{aligned} & (\epsilon_p - \epsilon_h - E + E_0) a_{ph}^E + \sum_{p',h'}^{dysk.} \langle ph | V | p'h'\rangle a_{p'h'}^E + \\ & + \sum_{[p]',h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} \langle ph | V | [p]'h'\epsilon_{p'}\rangle a_{[p]h'}^E(\epsilon_{p'}) = 0 \\ & (\epsilon_p - \epsilon_h - E + E_0) a_{[p]h}^E(\epsilon_p) + \sum_{p',h'}^{dysk.} \langle [p]h\epsilon_p | V | p'h'\rangle a_{p'h'}^E + \\ & + \sum_{[p]',h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} \langle [p]h\epsilon_p | V | [p]'h'\epsilon_{p'}\rangle a_{[p]h'}^E(\epsilon_{p'}) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Ponieważ energia rozwiązania dla pełnego hamiltonianu ma postać $E = E_0 + \omega$, gdzie ω to różnica energii pomiędzy rozwiązaniem w naszym przybliżeniu a stanem podstawowym⁷, podstawiamy $-E + E_0 \equiv \omega$ oraz wszystkie indeksy E w amplitudach na ω .

Kłopot może sprawić interpretacja elementów macierzowych oddziaływania resztkowego. Jak już wiemy, $V = \sum_{i,j} v_{i,j} - \sum_i v_i$, gdzie v_i to potencjał Hartreego-Focka. Wzór (3.1.7) przedstawia jawną postać wzoru na element $\langle ph | V | p'h'\rangle$. Ważnym spostrzeżeniem jest, że elementy macierzowe potencjału są tożsamościowo równe zero dla stanów różniących się stanem więcej, niż dwóch cząstek. W celu określenia, które wyrażenia dadzą

⁷ Może reprezentować np. przekaz energii ν przy rozpraszaniu elektronów

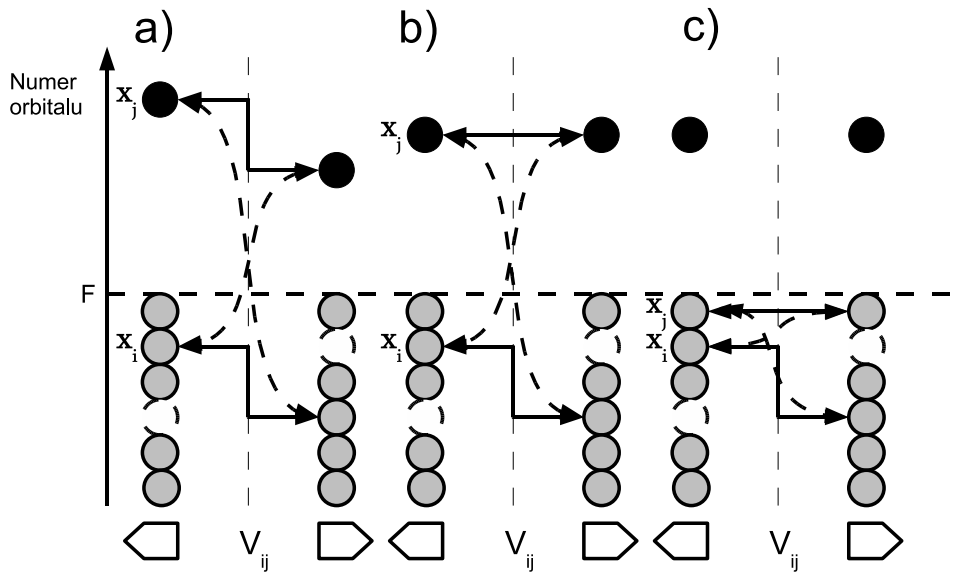


Fig. 3.1: Rysunek pomocniczy do interpretacji elementów macierzowych potencjału resztkowego, związanych z oddziaływaniem dwuciałowym $V_{i,j}$.

niezerowy wkład, skonstruowaliśmy kilka rysunków pomocniczych. Oś y przedstawia numer orbitalu. Zaznaczono tam poziom F , do którego wypełniony jest stan podstawowy. Pełne kółka reprezentują nukleony (dla rozróżnienia ciemniejszym kolorem reprezentujemy cząstkę), natomiast puste miejsca poniżej F reprezentują dziury. Dla ortogonalnych i całkowiec różnych od siebie stanów ($p \neq p'$ i $h \neq h'$) (rys. 3.3 (a)) widzimy, że jedyne niezerowe elementy macierzowe występują, gdy oddziaływanie potencjalne połączy ze sobą funkcje falowe różniące oba stany. Wynika to z ortonormalności układu funkcji jednocząstkowych. Łatwo odczytać, że funkcja falowa h' zawarta jest w $\langle ph |$ (co wynika z jej braku w $|p'h'\rangle$ - to właśnie definiuje dziurę). Kolejne spostrzeżenie- oddziaływanie zaznaczone liniami ciągłymi wiąże się z parzystą permutacją funkcji falowej nukleonów, przerywanymi zaś- z nieparzystą, co definiuje znaki w wyrażeniu. Dostaniemy więc wielkość:

$$a) = \frac{1}{2} \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left[\phi_{p'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \phi_h^\dagger(\mathbf{x}_2) V_{p_1, p_2, h_1, h_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \phi_p(\mathbf{x}_1) \phi_{h'}(\mathbf{x}_2) + \right. \quad (3.3.11) \\ \left. - \phi_{p'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \phi_h^\dagger(\mathbf{x}_2) V_{p_1, p_2, h_1, h_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \phi_{h'}(\mathbf{x}_1) \phi_p(\mathbf{x}_2) \right] + \{ \mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2 \}.$$

Wprowadzimy skrócony zapis powyższego równania:

$$v_{ph;p'h'} \equiv \int d^3x_1 d^3x_2 \left[\phi_{p'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \phi_h^\dagger(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \phi_p(\mathbf{x}_1) \phi_{h'}(\mathbf{x}_2) + \right. \quad (3.3.12) \\ \left. - \phi_{p'}^\dagger(\mathbf{x}_1) \phi_h^\dagger(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \phi_{h'}(\mathbf{x}_1) \phi_p(\mathbf{x}_2) \right]$$

gdzie indeksy cząstek i dziur w potencjale dwuciałowym zostały pominięte dla skrócenia zapisu. Reprezentuje ona efektywne oddziaływanie par cząstka- dziura. Chcielibyśmy sprawdzić, czy inne elementy macierzowe też przyjmują taką formę.

Sytuacja staje się trudniejsza w przypadku 3.3 (b), w którym liczby kwantowe cząstek są równe. Mamy tam niezerowy wkład nie tylko od wyrażenia typu (3.3.11) ale i od oddziaływań pomiędzy cząstkami jądra resztkowego 3.3 (c). A chcielibyśmy, żeby elementy

potencjału resztkowego zależały jedynie od indeksów i funkcji falowych cząstki i dziury. W tym miejscu na pomoc przychodzi potencjał jednociałowy Hartreego- Focka. Okazuje się, że kasuje on wszystkie człony niezwiązane z oddziaływaniem cząstka- dziura. Rysunek przed-

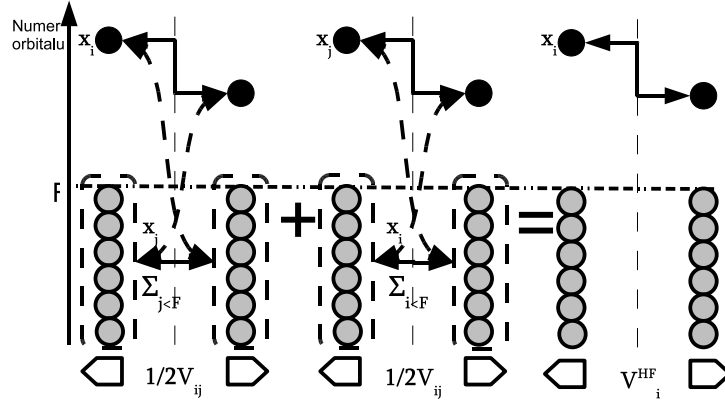


Fig. 3.2: Graficzne przedstawienie konstrukcji elementów macierzowych V^{HF} .

stawia schematyczną konstrukcję elementów macierzowych potencjału Hartreego- Focka w reprezentacji położeniowej. Porównując wzory (3.2.9) i (3.1.7) oraz rysunek, zauważamy, że:

$$\begin{aligned} \langle \beta | V^{HF} | \gamma \rangle &= \sum_{\alpha < F} \int d^3x d^3x' (\phi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}) \phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}')) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \\ &\cdot (\phi_{\delta}(\mathbf{x}) \phi_{\alpha}(\mathbf{x}') - \phi_{\delta}(\mathbf{x}') \phi_{\alpha}(\mathbf{x})) \equiv \sum_{\alpha < F} v_{\beta\alpha; \gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Spostrzeżenie to pozwoli nam pogrupować pozostałe typy wyrazów opisujących elementy macierzowe potencjału resztkowego. Od tej pory zawsze będziemy łączyć parami człony "bezpośrednie" i człony "wymiany" (jak na rys. 3.3).

Policzymy teraz elementy macierzowe $\langle ph | V | p'h' \rangle$, które są diagonalne w indeksach p lub h . Zaczniemy od elementu, w którym $p = p'$ i $h = h'$ ⁸. Zauważmy, że bierzemy pod uwagę tylko niezerowe połączenia funkcji falowych (tj. wybieramy identyczne pary stanów po obu stronach nawiasu Diraca i łączymy je oddziaływaniem bezpośrednim i wymiany). Wtedy widać, że sumujemy elementy $\frac{1}{2}v_{\alpha\beta; \alpha\beta}$ po wszystkich indeksach za wyjątkiem h :

$$\left\langle ph \left| \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{i,j} \right| ph \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta = \{1 \dots F, p\} / h} v_{\alpha\beta; \alpha\beta} \quad (3.3.14)$$

Idea takiego grupowania wyrazów i prowadzenia obliczeń została przedstawiona na rys.

⁸ Zauważmy, że tutaj numer współrzędnej odpowiada bezpośrednio orbitalowi, a więc liczbom kwantowym nukleonu w $\langle |$.

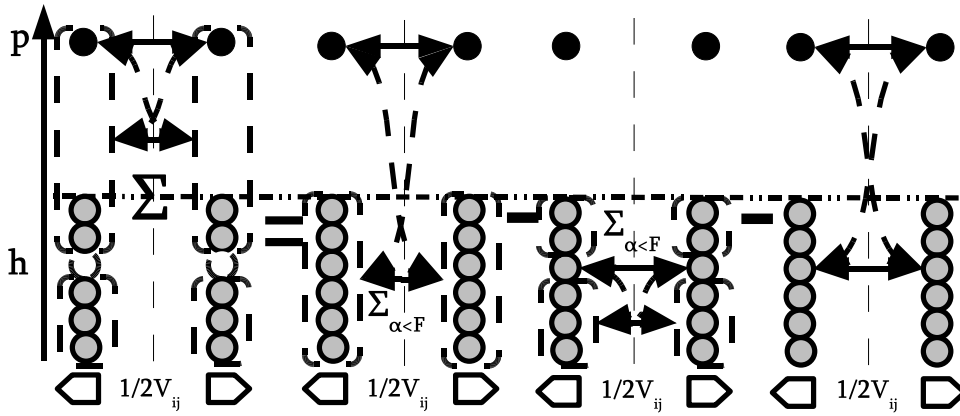


Fig. 3.3: Graf przedstawiający sposób rozwiązania (3.3.15). Suma oddziaływań dwuciałowych pomiędzy wszystkimi nukleonami w stanie $|ph\rangle$ daje się zapisać, jako różnica energii Hartreego- Focka cząstki i dziury oraz elementu macierzowego $v_{ph;ph}$.

3.3. Możemy teraz przystąpić do obliczeń.

(3.3.15)

$$\begin{aligned}
 \left\langle ph \left| \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{i,j} \right| ph \right\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta = \\ \{1 \dots F, p\}/h}} v_{\alpha\beta; \alpha\beta} \pm \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha = \\ \{1 \dots F, p\}/h}} v_{\alpha h; \alpha, h} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha = \{1 \dots F, p\}/h \\ \beta = \{1 \dots F, p\}}} v_{\alpha\beta; \alpha\beta} - \frac{1}{2} v_{ph; ph} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha = \\ \{1 \dots F, p\}/h}} v_{\alpha h; \alpha h} \pm \\
 &\pm \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha = \\ \{1 \dots F, p\}/h}} v_{h\beta; h\beta} = \\
 &= \sum_{\substack{\alpha = \\ \{1 \dots F, p\}}} \langle \alpha | V_{\alpha}^{HF} | \alpha \rangle - \langle h | V_h^{HF} | h \rangle - v_{ph; ph}.
 \end{aligned}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z faktu, że:

$$v_{\alpha\beta; \alpha\beta} = v_{\beta\alpha; \beta\alpha}. \quad (3.3.16)$$

Widać, że pierwsze dwa człony skrócą się z $\langle ph | \sum_i V_i^{HF} | ph \rangle$. Dostaniemy więc równanie:

$$\left\langle ph \left| \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{i,j} - \sum_i V_i^{HF} \right| ph \right\rangle = -v_{ph; ph}. \quad (3.3.17)$$

Policzmy teraz element macierzowy dla $p' = p$ i $h' \neq h$:

$$\begin{aligned} \left\langle ph' \left| \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \right| ph \right\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\{1\dots F,p\}/\{h,h'\}} \langle \alpha h' | V^{(2)} | \alpha h \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\{1\dots F,p\}/\{h,h'\}} \langle h' \alpha | V^{(2)} | h \alpha \rangle + \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\{1\dots F,p\}/\{h,h'\}} \langle \alpha h' | V^{(2)} | h \alpha \rangle + \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\{1\dots F,p\}/\{h,h'\}} \langle h' \alpha | V^{(2)} | \alpha h \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Korzystamy teraz z faktu, że:

$$\langle \alpha \beta | V^{(2)} | \alpha \beta \rangle = \langle \beta \alpha | V^{(2)} | \beta \alpha \rangle \quad (3.3.19)$$

możemy dodać do siebie człony w powyższym równaniu:

$$\begin{aligned} \left\langle ph' \left| \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \right| ph \right\rangle &= \sum_{\alpha=\{1\dots F,p\}/\{h,h'\}} v_{\alpha h; \alpha h'} = \\ &= \langle h' | V_{hh'}^{HF} | h \rangle + v_{ph; ph'}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Znowu człony z potencjałem Hartreego- Focka skrócą się nawzajem. Tak więc:

$$\langle ph | V | ph' \rangle = v_{ph; ph'}. \quad (3.3.21)$$

W analogiczny sposób dostaniemy dla $p \neq p'$ i $h = h'$:

$$\langle ph | V | p'h \rangle = -v_{ph; p'h}. \quad (3.3.22)$$

Tutaj znowu mamy zmianę znaku przy wystąpieniu dwóch identycznych indeksów dziurowych. Ma to prawdopodobnie związek ze współczynnikami symetrii funkcji falowej dziury, które zostaną omówione szerzej w dodatku F.1. Zdefiniujmy:

$$\tilde{v}_{ph; p'h} = (-1)^{\delta_{h,h'}} v_{ph; p'h}. \quad (3.3.23)$$

Dodatkowe znaki "-" wejdą do definicji elementów macierzowych. Równania na współczynniki funkcji falowych przybiorą postać:

$$\begin{aligned} (\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) a_{ph}^\omega + \sum_{p', h'}^{dysk.} \tilde{v}_{ph; p'h} a_{p'h}^\omega + \sum_{[p'], h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} \tilde{v}_{ph; [p']h' \epsilon_{p'}} a_{[p']h'}^\omega(\epsilon_{p'}) &= 0 \\ (\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) a_{[p]h}^\omega(\epsilon_p) + \sum_{p', h'}^{dysk.} \tilde{v}_{[p]h \epsilon_p; p'h'} a_{p'h'}^\omega &+ \\ + \sum_{[p'], h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} \tilde{v}_{[p]h \epsilon_p; [p']h' \epsilon_{p'}} a^\omega(\epsilon_{p'}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

i są to równania CTDA. Rezultat ten jest o tyle ciekawy, że do jego uzyskania wykorzystaliśmy jedynie zwykłą mechanikę kwantową, bez używania formalizmu drugiej kwantyzacji. Metoda zaprezentowana np. w [6] opiera się na równaniach ruchu Heisenberga dla operatora kreacji pary cząstka- dziura.

Układ równań CTDA pozwala na znalezienie funkcji własnych hamiltonianu (3.0.3) w przestrzeni obciętej do wzbudzeń par cząstka dziura ze stanem podstawowym zadanym przez próżnię równań Hartreego- Focka (3.2.9). Szukamy rozwiązań w postaci funkcji falowej (3.3.7) dla danej zmiany energii układu z E_0^{HF} do $E_0^{HF} + \omega$, gdzie ω może oznaczać np. przekaz energii ν w rozpraszaniu elektronów na jądrze.

Inną ciekawą cechą jest brak separacji elementów macierzowych oddziaływania (3.1.6), gdyż z definicji $\tilde{v}_{ph;p'h'}$ wyznacza oddziaływania dla $i = A$ lub $j = A$ (według notacji Blocha). Oznacza to, że nie mamy poprawki od oddziaływań resztkowych do stanu jądra resztkowego (3.1.11), gdyż wyrazy z nią związane skróciły się z oddziaływaniem Hartreego- Focka. Ewentualny rezonans istnieje dla $\epsilon_p = \epsilon_h + \omega$, a stan jądra końcowego wyznaczamy przez określenie orbitalu, z którego usuwamy nukleon.

Wyprowadzenie równań TDA w ramach mechaniki kwantowej jest żmudnym zadaniem. To zapewne zdecydowało o użyciu innej metody przez [6], gdzie całe wyprowadzenie zajmuje 2 strony.

W TDA zakładamy, że nie ma możliwości istnienia wzbudzeń kolektywnych w stanie podstawowym jądra. Zubaża to w dużym stopniu fizykę naszego układu. Zagadnieniem rozszerzonym o ten czynnik zajmuje się kolejny model, a mianowicie RPA.

3.4 Wyprowadzenie równań CRPA

Punktem wyjściowym w tych rozważaniach jest zamiana stanu podstawowego z próżni Hartreego- Focka $|0_{HF}\rangle$ na pewien stan $|\Psi_0\rangle$ zawierający niewielką domieszkę wzbudzeń kolektywnych. Równania wyprowadzać będziemy w formalizmie drugiej kwantyzacji. Rozdział ten bazuje na [6].

Idea tego modelu jest prosta: zakładamy, że podczas rozpraszania elektronu na jądrze następuje usunięcie cząstki ze stanów obsadzonych i przeniesienie jej do jakiegoś stanu wzbudzonego bądź kontinuum. Dlatego też wprowadzamy operator kreacji pary cząstka- dziura w stanach $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$:

$$\hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \equiv a_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger. \quad (3.4.1)$$

Założyliśmy, że stan podstawowy może zawierać pewną liczbę par cząstka- dziura, które mogą zmienić swój stan w trakcie procesu. Stąd też kolejny operator, tym razem anihilujący taką parę⁹:

$$\hat{\zeta}_{\alpha\beta} \equiv b_\beta a_\alpha. \quad (3.4.2)$$

Zmiana stanu próżni pociąga za sobą pewien problem. Musimy stosować przybliżenie stosowane do komutatora tych dwóch operatorów. Zapiszemy ten komutator w jawnej postaci:

$$\left[\hat{\zeta}_{\alpha\beta}, \hat{\zeta}_{\gamma\delta}^\dagger \right] = b_\beta a_\alpha a_\gamma^\dagger b_\delta^\dagger - a_\gamma^\dagger b_\delta^\dagger b_\beta a_\alpha = \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\delta} - \delta_{\beta,\delta} a_\gamma^\dagger a_\alpha - \delta_{\alpha,\gamma} b_\gamma^\dagger b_\beta. \quad (3.4.3)$$

⁹ Uwaga do notacji: pierwszy zestaw liczb kwantowych w operatorze zawsze oznacza cząstkę, drugi- dziurę.

Równania CRPA wyprowadzimy obliczając wartości oczekiwane operatorów w stanie podstawowym¹⁰:

$$\left\langle \Psi_0 \left| \left[\hat{\zeta}_{\alpha\beta}, \hat{\zeta}_{\gamma\delta}^\dagger \right] \right| \Psi_0 \right\rangle = \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\delta} - \delta_{\beta,\delta} \langle \Psi_0 | a_\gamma^\dagger a_\alpha | \Psi_0 \rangle - \delta_{\gamma,\alpha} \langle \Psi_0 | b_\delta^\dagger b_\beta | \Psi_0 \rangle. \quad (3.4.4)$$

Pamiętajmy, że $|\Psi_0\rangle$ nie jest już próżnią jednocząstkową. Pierwszy człon jest typowym bozonowym komutatorem. Przy równych indeksach dwa pozostałe człony odzwierciedlają prawdopodobieństwo znalezienia cząstki i dziury o pewnych ustalonych liczbach kwantowych w stanie podstawowym układu. Przy założeniu, że w stanie podstawowym gęstość cząstek/dziur jest o wiele mniejsza, niż liczba nukleonów w jądrze, stosuje się następujące przybliżenie:

$$\left[\hat{\zeta}_{\alpha\beta}, \hat{\zeta}_{\gamma\delta}^\dagger \right] \approx \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\delta} \equiv \delta_{[\alpha],[\gamma]} \delta_{\beta,\delta} (\Theta(-\epsilon_\alpha) \delta_{n_\alpha, n_\gamma} + \Theta(\epsilon_\alpha) \delta_{\epsilon_\alpha, \epsilon_\gamma}) \quad (3.4.5)$$

gdyż to właśnie ta część komutatora daje istotny wkład do wartości oczekiwanych. Przybliżenie to, nazywane *przybliżeniem kwazibozonowym*, jest słabym punktem teorii CRPA, gdyż wprowadza na starcie pewien błąd do równań. Od tej pory będziemy stosować notację \doteq w celu pozostawienia w równaniach członów dających istotny wkład. Tak więc np.

$$\left[\hat{\zeta}_{\alpha\beta}, \hat{\zeta}_{\gamma\delta}^\dagger \right] \doteq \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\delta}. \quad (3.4.6)$$

Mając wprowadzone podstawowe pojęcia możemy określić postać stanu wzbudzonego o energii $\omega + \epsilon_0$:

$$|\Psi^\omega\rangle \equiv Q^{\dagger\omega} |\Psi_0\rangle \equiv \left[\sum_{\alpha,\beta}^{dysk.} + \sum_{[\alpha],[\beta]}^{kont.} \int_0^\infty d\epsilon_\alpha \right] \left(X_{\alpha\beta}^{*\omega} \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger + Y_{\alpha\beta}^{*\omega} \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \right) |\Psi_0\rangle \quad (3.4.7)$$

gdzie $X_{\alpha\beta}^{*\omega}$ i $Y_{\alpha\beta}^{*\omega}$ to liczby, które określają prawdopodobieństwo znalezienia/ zniszczenia w stanie końcowym pary cząstka-dziura opisanej liczbami kwantowymi p, h ¹¹. Stosując przybliżenie (3.4.5) widzimy, że:

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta}^\omega &= \left\langle \Psi^\omega \left| \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \right| \Psi_0 \right\rangle \\ Y_{\alpha\beta}^\omega &= \left\langle \Psi^\omega \left| \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \right| \Psi_0 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Zwróćmy uwagę na identyczność znaczeń $X_{\alpha\beta}^{*\omega}$ oraz a_{ph}^ω z równań CTDA (3.3.24). Stan podstawowy teorii $|\Psi_0\rangle$ definiujemy w sposób następujący:

$$Q^\omega |\Psi_0\rangle = 0 \quad (3.4.9)$$

przy czym związek ten zachodzi dla dowolnego ω . Można go skonstruować działając kombinacją liniową operatorów $\hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger$ na stan podstawowy przybliżenia Hartreego- Focka. Znalezienie odpowiedniego stanu podstawowego jest skomplikowaną operacją [9]. W tym miejscu musimy o nim wiedzieć, że:

¹⁰ Ze względu na długość notacji od tej pory pomijamy indeks CRPA w nazwach ($|\Psi_0\rangle \equiv |0_{CRPA}\rangle$ itd.).

¹¹ Zastanawiający jest fakt wprowadzenia niezerowych współczynników $Y_{\alpha\beta}^{*\omega}$ dla anihilacji pary cząstka-dziura z cząstką w kontinuum. Stan podstawowy $|0\rangle$ to jądro atomowe i nie ma żadnych swobodnych nukleonów. Jednakże z jakiegoś powodu we wszystkich cytowanych tutaj pracach współczynnik ten występuje. Dlatego i my go (przynajmniej tymczasowo) zachowamy.

1. Jest unormowany: $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$.
2. Nie musi być związany z bezwzględnym minimum energii pełnego hamiltonianu, ale wszystkie wzbudzenia konstruowane na jego podstawie poprzez działanie operatorów $\hat{Q}^{\dagger\omega}$ mają energie wyższe.
3. Gęstość dziur i cząstek jest na tyle mała, że przybliżenie bozonowe (3.4.5) funkcjonuje.
4. Jądro jest sferycznie symetryczne ($J = 0$).

Chwilowo nie musimy wdawać się w szczegóły konstrukcji takich stanów, aczkolwiek według dostępnej literatury [9] wyniki numeryczne obliczeń są czułe na wybór $|\Psi_0\rangle$. Zbadajmy równania ruchu elementów macierzowych:

$$\begin{aligned} \langle \Psi^\omega | [\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger] | \Psi_0 \rangle &= \omega X_{\alpha\beta}^\omega \\ \langle \Psi^\omega | [\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}] | \Psi_0 \rangle &= \omega Y_{\alpha\beta}^\omega \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

wynikające z równań (3.4.5), (3.4.7) oraz (3.4.8). Pewien wysiłek należy włożyć w obliczenie komutatorów $[\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger]$ oraz $[\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}]$ ¹². Szczegółowe rachunki przeprowadziliśmy w dodatku F.2, tutaj podamy tylko końcowe wyniki ([6]):

$$\begin{aligned} [\hat{H}_1, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger] &= (\epsilon_p - \epsilon_{-h}) \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \\ [\hat{H}_1, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}] &= - (\epsilon_p - \epsilon_{-h}) \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

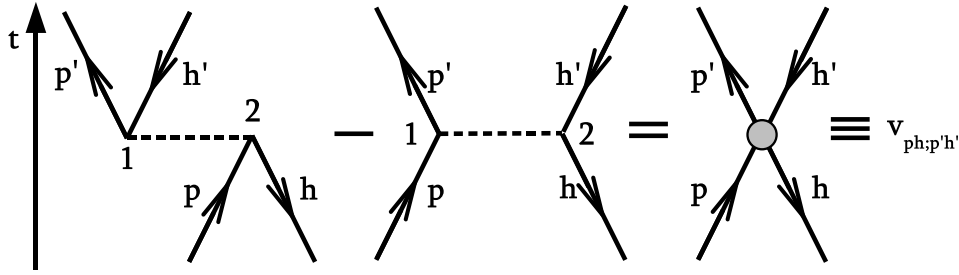
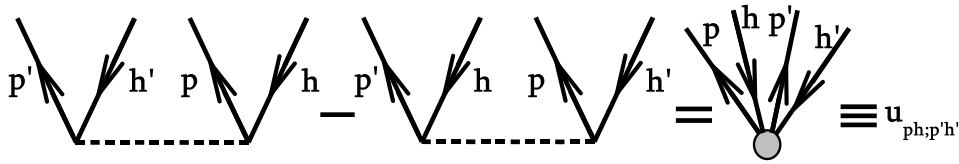
$$\begin{aligned} [\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger] &\doteq \sum_{\mu,\nu} \left(v_{\alpha\beta;\mu\nu} \hat{\zeta}_{\mu\nu}^\dagger + u_{\alpha\beta;\mu\nu} \hat{\zeta}_{\mu\nu} \right) \\ [\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\mu\nu}] &\doteq - \sum_{\mu,\nu} \left(v_{\alpha\beta;\mu\nu}^* \hat{\zeta}_{\mu\nu} + u_{\alpha\beta;\mu\nu}^* \hat{\zeta}_{\mu\nu}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} v_{\alpha\beta;\mu\nu} &\equiv S_{-\beta} S_{-\nu} (\langle \mu - \beta | V | -\nu \alpha \rangle - \langle \mu - \beta | V | \alpha - \nu \rangle) \\ u_{\alpha\beta;\mu\nu} &\equiv S_{-\beta} S_{-\nu} (\langle -\beta - \nu | V | \alpha \mu \rangle - \langle -\beta - \nu | V | \mu \alpha \rangle). \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Rysunek 3.4 wyjaśnia znaczenie fizyczne elementu macierzowego $v_{ph;p'h'}$. Dla jasności dodano kierunek upływu czasu. Pierwszy z członów ("człon bezpośredni") reprezentuje anihilację pary ph i kreację nowej $p'h'$. Drugi ("człon wymiany")- rozproszenie pary ph do pary $p'h'$. Linia przerywana reprezentuje wymianę wirtualnego pionu. Pierwszy graf można interpretować jako wytworzenie pionu w wyniku anihilacji pary ph a następnie jego rozpad i kreację pary $p'h'$, drugi- wymianę wirtualnego pionu w obrębie pary. Jest to

¹² Drugi z nich dostajemy korzystając z pierwszego, wykorzystując następujący związek: $[\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}] = - [\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger]^\dagger$, co zaoszczędza nam sporo czasu.

Fig. 3.4: Graficzna reprezentacja elementów macierzowych $v_{ph;p'h'}$.Fig. 3.5: Graficzna reprezentacja elementów macierzowych $u_{ph;p'h'}$.

dokładnie ten sam człon, który pojawił się w równaniach TDA (3.3.24), tylko narzuciliśmy wymaganie, żeby dziura przenosiła moment pędu j_h, m_h . Stąd dodatkowe czynniki symetrii. Formalizm (C)RPA wnosi dodatkowe człony macierzowe $u_{ph;p'h'}$ ([9]). We wzorze (3.4.12) stoją one, w przeciwieństwie do $v_{ph;p'h'}$, przy operatorze $\hat{\zeta}_{\alpha\beta}$. Możemy powiedzieć, że odpowiadają za kreację wirtualnych wzbudzeń składających się z dwóch cząstek i dwóch dziur, co przedstawiliśmy na rys. 3.4.

Równania (3.4.11) i (3.4.12) pozwalają natychmiastowo zapisać równania ruchu (3.4.10):

$$\begin{aligned} (\epsilon_\alpha - \epsilon_{-\beta} - \omega) X_{\alpha\beta}^\omega + \sum_{\mu,\nu} (v_{\alpha\beta;\mu\nu} X_{\mu\nu}^\omega + u_{\alpha\beta;\mu\nu} Y_{\mu\nu}^\omega) &= 0 \\ (\epsilon_\alpha - \epsilon_{-\beta} + \omega) Y_{\alpha\beta}^\omega + \sum_{\mu,\nu} (v_{\alpha\beta;\mu\nu}^* Y_{\mu\nu}^\omega + u_{\alpha\beta;\mu\nu}^* X_{\mu\nu}^\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Ten układ równań nazywamy *równaniami (C)RPA* ([6]). Energie $\epsilon_{\alpha/\beta}$ oraz ω (za ω możemy podstawić przekaz energii w procesie rozpraszania, czyli $\omega \equiv \nu$) są ustalone. Ustaliliśmy też bazę funkcji falowych średniopolowych, danych równaniami Hartreego- Focka (3.2.8). Poszukujemy natomiast amplitud, z jakimi te funkcje wchodzi do stanu własnego pełnego hamiltonianu. Reprezentują one prawdopodobieństwo znalezienia danej pary cząstka-dziura w stanie końcowym. Problem ten jest więc analogiczny do zagadnienia przedstawionego przez Blocha. Zauważmy, że układ równań CRPA jest sformułowany w ograniczonej przestrzeni konfiguracyjnej. Sama konstrukcja teorii pozwala na opisanie stanów układu z co najwyżej jednym nukleonem w kontinuum, co czyni ją odpowiednią do opisu procesów kwazielastycznych oraz semi-inkluzywnych.

Zauważmy również, że kiedy położymy $Y_{\mu\nu}^\omega \equiv 0$ dostaniemy równania CTDA. Ich wprowadzenie różni się tym, że korzystamy z próżni Hartreego- Focka i uwzględniamy jedynie operator kreacji pary cząstka- dziura $\hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger$.

Podział sumowania na część dyskretną i kontinuum (zgodnie z dyskusją z paragrafu

3.3) można wyodrębnić explicite przez:

$$\sum_{\mu,\nu} \equiv \sum_{\mu,\nu}^{dysk.} + \sum_{[\mu],\nu}^{kont.} \int_0^\infty d\epsilon_\mu. \quad (3.4.15)$$

Normalizacja funkcji falowych, z założeniem, że zachodzi (3.4.5), jest następująca:

$$\sum_{\alpha,\beta} \left(|X_{\alpha\beta}^\omega|^2 + |Y_{\alpha\beta}^\omega|^2 \right) = 1. \quad (3.4.16)$$

Równanie to stanowi uzupełnienie układu (3.4.14).

3.4.1 Równania CRPA w zapisie multipolowym

Otrzymaliśmy układ równań opisujący stany końcowe układu jądro + nukleon. Nie są one stanami o określonym momencie pędu (wzór na przekrój czynny (2.3.13)). Poza tym wymiar równań (3.4.14) jest nieskończony. Pierwszym krokiem w stronę uproszczenia równań jest wyeliminowanie zależności od liczby kwantowej m . Niezmienniczość układu względem obrotów pozwala założyć, że $\{\alpha\} \equiv \{nljm\}$. Tutaj nadal $|\alpha\rangle = |a, m_a\rangle$. Za pomocą reguł dodawania momentu pędu możemy skonstruować operator kreacji pary cząstka- dziura o określonym momencie pędu:

$$\hat{\zeta}_{abJM}^\dagger = \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b JM \rangle \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \quad (3.4.17)$$

i jest on równocześnie NOT. Niestety, $\hat{\zeta}_{abJM} = (\hat{\zeta}_{abJM}^\dagger)^\dagger$ już NOT nie jest. Wystarczy sprawdzić komutator z operatorem momentu pędu. Trzeba wziąć kombinację postaci $(-1)^{j_b - m_b} b_{-\beta} (-1)^{j_a - m_a} a_{-\alpha}$, żeby uzyskać pożądaną efekt. Wykorzystamy symetrię współczynnika Clebsha- Gordana:

$$\begin{aligned} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b JM \rangle &= (-1)^{j_a + j_b - J} \langle j_a - m_a; j_b - m_b | j_a j_b J - M \rangle \\ m_a + m_b &= M. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Widzimy, że aby uzyskać odpowiedni czynnik symetrii, musimy pomnożyć całość przez $(-1)^{J-M}$ i otrzymamy sparowany z $\hat{\zeta}_{abJM}^\dagger$ NOT:

$$\begin{aligned} S_J \hat{\zeta}_{abJ-M} &= \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J - M \rangle (-1)^{J-M} \hat{\zeta}_{\alpha\beta} = \\ &= \sum_{-m_a, -m_b} \langle j_a - m_a; j_b - m_b | j_a j_b J - M \rangle (-1)^{J-M} \hat{\zeta}_{-\alpha-\beta} = \\ &= \sum_{-m_a, -m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b JM \rangle (-1)^{j_a + j_b - m_a - m_b} \hat{\zeta}_{-\alpha-\beta}. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Komutator tych wielkości jest zadany poprzez:

$$\begin{aligned} & [S_J \hat{\zeta}_{abJ-M}, \hat{\zeta}_{dgJ'M'}^\dagger] = \\ &= [S_J \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J - M \rangle \hat{\zeta}_{\alpha\beta}, \sum_{m_d, m_g} \langle j_d m_d; j_g m_g | j_d j_g J' M' \rangle \hat{\zeta}_{\delta\gamma}^\dagger] \doteq \\ & \doteq S_J \delta_{J, J'} \delta_{M, -M'} \delta_{a, d} \delta_{b, g} \quad . \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Jak widać komutują one do czynnika fazowego S_J . Chcielibyśmy teraz zapisać funkcję falową stanu o momencie pędu J, M i energii ω w przybliżeniu CRPA. Ponownie wybieramy liniową superpozycję operatorów kreacji i anihilacji par:

$$|\Psi_{JM}^\omega\rangle = \sum_{ab} \left(X_{abJ}^{*\omega} \hat{\zeta}_{abJM}^\dagger + Y_{abJ}^{*\omega} S_J \hat{\zeta}_{abJ-M} \right) |\Psi_0\rangle. \quad (3.4.21)$$

Taka definicja daje nam następujące związki:

$$\begin{aligned} X_{abJ}^\omega &= \langle \Psi_{JM}^\omega | \hat{\zeta}_{abJM}^\dagger | \Psi_0 \rangle = \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle X_{\alpha\beta}^\omega \\ Y_{abJ}^\omega &= S_J \langle \Psi_{JM}^\omega | \hat{\zeta}_{abJ-M} | \Psi_0 \rangle = S_J \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J - M \rangle Y_{\alpha\beta}^\omega. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Z twierdzenia Wignera- Eckarta widać, że te współczynniki istotnie nie zależą od M . To jest efekt redukcji bazy, którego oczekujemy od naszych transformacji. Takie samo przekształcenie możemy przeprowadzić dla operatorów multipolowych. Najogólniejsza postać tego operatora, to

$$\begin{aligned} \hat{T}_{JM} &= \sum_{\alpha, \beta} c_\alpha^\dagger \langle \alpha | T_{JM} | \beta \rangle c_\beta = \sum_{\alpha, \beta} S_J \{ \langle \alpha | T_{JM} | -\beta \rangle \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger + \langle -\beta | T_{JM} | \alpha \rangle \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} S_{-\beta} \frac{\langle j_a m_a; j_b - m_b | j_a j_b J M \rangle}{(2J+1)^{1/2}} \{ \langle a || T_J || b \rangle \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger + \langle b || T_J || a \rangle \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \} = \\ &= \frac{1}{(2J+1)^{1/2}} \sum_{a, b} \{ \langle a || T_J || b \rangle \hat{\zeta}_{abJM}^\dagger + (-1)^{-j_a - j_b - J} \langle b || T_J || a \rangle S_J \hat{\zeta}_{abJ-M} \} \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

gdzie w ostatniej linii skorzystano z symetrii współczynników Clebsha- Gordana i definicji $\hat{\zeta}_{abJ-M}$. To pozwala określić wartość zredukowanego elementu macierzowego takiego operatora:

$$\langle \Psi_J^\omega || \hat{T}_J || \Psi_0 \rangle = \frac{1}{(2J+1)^{1/2}} \sum_{a, b} \{ \langle a || T_J || b \rangle X_{abJ}^\omega + (-1)^{-j_a - j_b - J} \langle b || T_J || a \rangle Y_{abJ}^\omega \}. \quad (3.4.24)$$

Posiadając te informacje możemy przekształcić układ równań CRPA do układu równań na współczynniki multipolowe. Rachunek jest długi i skomplikowany technicznie, tak więc zamieszczono go w dodatku F.3. Tutaj przedstawimy tylko wyniki ([6]). Układ równań CRPA dla bazy J, M przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} (\epsilon_a - \epsilon_b - \omega) X_{abJ}^\omega + \sum_{m, n} (v_{ab;mn}^J X_{mnJ}^\omega + u_{ab;mn}^J Y_{mnJ}^\omega) &= 0 \\ (\epsilon_a - \epsilon_b + \omega) Y_{abJ}^\omega + \sum_{m, n} (v_{ab;mn}^{*J} Y_{mnJ}^\omega + u_{ab;mn}^{*J} X_{mnJ}^\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

gdzie elementy macierzowe oddziaływania dane są wzorem:

$$\begin{aligned} v_{ab;mn}^J &\equiv \sum_{J'} (2J'+1) \left\{ \begin{matrix} j_n & j_a & J' \\ j_b & j_m & J \end{matrix} \right\} \{ \langle mbJ' | V | naJ' \rangle + \\ &- (-1)^{j_a + j_n - J'} \langle mbJ' | V | anJ' \rangle \} \\ u_{ab;mn}^J &= (-1)^{J_n - j_m - J} v_{ab;nm}^J. \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Należy zwrócić uwagę na drugą parę indeksów przy $u_{ab;mn}^J$. W ten sposób udało nam się wyprowadzić równania opisujące model wzbudzeń kolektywnych jądra atomowego. Musimy jeszcze ustalić sposób ich rozwiązywania. Potrzebujemy również sposobu na konstrukcję stanu podstawowego $|0\rangle$. W tym celu należy zaproponować formę oddziaływania dwuciałowego potrzebnego do rozwiązania układu CRPA.

Zwróćmy uwagę na sytuację, gdy $Y_{ph} \equiv$ oraz $u_{ph;p'h'} \equiv 0$. Dostaniemy wtedy równania TDA (3.3.24) w zapisie multipolowym. Rozważając ogólniejszy model RPA otrzymujemy automatycznie wyniki dla prostszego TDA.

3.5 Zachowanie asymptotyczne rozwiązań CRPA. Kanały rozpraszania i osobliwości

Wróćmy do zapisu układu równań (3.4.25) w postaci wyróżniającej część zawierającą sumowanie po stanach dyskretnych i kontinuum oraz indeksy wskazujące na cząstkę (p) lub dziurę (h):

$$\begin{aligned}
& (\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) X_{phJ}^\omega + \sum_{p',h'}^{dysk.} (v_{ph;p'h'}^J X_{p'h'J}^\omega + u_{ph;p'h'} Y_{p'h'J}^\omega) + \\
& + \sum_{[p'],h'}^{kont.} \int_0^\infty d\epsilon_{p'} (v_{ph;p'h'}^J X_{[p']h'J}^\omega(\epsilon_{p'}) + u_{ph;p'h'} Y_{[p']h'J}^\omega(\epsilon_{p'})) = 0 \\
& (\epsilon_p - \epsilon_h + \omega) Y_{phJ}^\omega + \sum_{p',h'}^{dysk.} (v_{ph;p'h'}^{*J} Y_{p'h'J}^\omega + u_{ph;p'h'}^{*J} X_{p'h'J}^\omega) + \\
& + \sum_{[p'],h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} (v_{ph;p'h'}^{*J} Y_{p'h'J}^\omega(\epsilon_{p'}) + u_{ph;p'h'}^{*J} X_{p'h'J}^\omega(\epsilon_{p'})) = 0.
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Wyniki rozważań z paragrafu 3.1, dotyczące rezonansów w kontinuum, zastosujemy do rozwiązania równań CRPA w kontinuum. Wiemy już, że amplitudy $X_{[p]hJ}^\omega(\epsilon_p)$ posiadają bieguny związane z asymptotycznymi energiami nukleonu i jądra resztkowego. Rozwiązania równań CRPA otrzymujemy przy ustalonych J i ω (momencie pędu przejścia i transferze energii), natomiast kanały wyróżnia masa jądra resztkowego M_{A-1} . Musimy zadać sobie pytanie, które zmienne w równaniach RPA definiują nam kanał rozpraszania. Kwestii tej nie omówiono szczegółowo w cytowanej literaturze. Dla danych J, ω jest wiele kanałów rezonansowych, gdyż nie definiują one stanu jądra resztkowego. Wystarczy, że zachodzi (zgodnie z definicją operatora reakcji pary w konkretnym stanie momentu pędu (3.4.17)):

$$j_{p_0} + j_{h_0} \geq J \geq |j_{p_0} - j_{h_0}|. \tag{3.5.2}$$

Według [3] do zdefiniowania kanału wystarczy nam znajomość liczb kwantowych h_0 opisujących orbital, z którego usuwamy nukleon, stanu końcowego cząstki $[p_0]$, przekazu energii ω i multipolowości przejścia J . Wtedy rozwiązanie równań CRPA prowadzi do konkretnego stanu końcowego jądra resztkowego, co pozwala nam zdefiniować kanał rozpraszania. Z zachowania energii możemy wyznaczyć ϵ_p , a więc i położenie bieguna amplitudy $X_{[p]hJ}^\omega(\epsilon_p)$. Amplituda $Y_{[p]hJ}^\omega(\epsilon_p)$ biegunów nie posiada, gdyż wkład stanów kontinuum

do stanu podstawowego jest znikomy. Położenie osłabiwości definiujemy przez wskazanie, który nukleon opuści jądro. Bieguny te mają taką samą naturę, jak te opisane w paragrafie 3.1 i muszą być całkowalne. Dla kanału danego przez p_0, h_0 osłabiwości amplitudy wystąpią dla $\epsilon_p = \epsilon_{h_0} + \omega$.

Zgodnie z naszymi założeniami podstawiamy za $X_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p)$ oraz $Y_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p)$:

$$\begin{aligned} X_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p) &= A_{p_0 h_0; ph} + Vp \frac{\tilde{X}(\epsilon_p)_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}}{\epsilon_p - \epsilon_h - \omega} \\ Y_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p) &= \frac{\tilde{Y}(\epsilon_p)_{[p]hJ}^{\omega}}{\epsilon_p - \epsilon_h + \omega}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Według hipotezy Blocha, można przyjąć:

$$A_{ph, p_0 h_0} \equiv \delta_{p, p_0} \delta_{h, h_0} = \delta_{[p_0], [p]} \delta_{h_0, h} \delta(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) \quad (3.5.4)$$

Część amplitudy zawierająca wartość główną Cauchy'ego odpowiada za wkład od kanałów, dla których nie mamy rezonansu ($\epsilon_{p_0} \neq \epsilon_{h_0} + \omega$ - tzw. część *off-shell*). Ma ona całkowalny biegun w rezonansie. Indeksy p_0 i h_0 oznaczają, że mamy tu do czynienia z wyróżnionym kanałem rozpraszania. Przy obliczaniu przekroju inkluzywnego wykonujemy sumę po wszystkich kanałach,tj:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} &= \sigma_M \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_{[p_0], h_0} \left\{ \frac{q^4}{q^4} \sum_{J \geq 0} \left| \langle J_f^{[p_0]h_0} \| \hat{M}_J(q) \| J_i \rangle \right|^2 + \left(-\frac{q^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right) \right. \\ &\cdot \left. \sum_{J \geq 1} \left[\left| \langle J_f^{[p_0]h_0} \| \hat{T}^{el}(q) \| J_i \rangle \right|^2 + \left| \langle J_f^{[p_0]h_0} \| \hat{T}^{mag}(q) \| J_i \rangle \right|^2 \right] \right\} R^{[p_0]h_0}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Innym problemem jest poprawka do stanu jądra resztkowego pochodząca od oddziaływania resztkowego (3.1.11). W przybliżeniu TDA nie występowała, ponieważ nie zachodziła separacja elementów macierzowych na oddziaływanie tylko pomiędzy nukleonami jądra resztkowego V_r oraz pomiędzy jądrem resztkowym i nukleonem w kontinuum V_d . Człony, z których powstaje V_r , skróciły się z oddziaływaniem Hartreego- Focka. Z drugiej strony separacja taka oznaczałaby kłopot techniczny związany z tym, że energia dziury ϵ_{h_0} byłaby w ogólności inną energią, niż energia Hartreego- Focka obliczana na początku przy ustalaniu bazy jednocząstkowej. Wiązałoby się to z koniecznością rozwiązywania za każdym razem dodatkowego układu równań dyskretnych na energię orbitali w jądrze resztkowym (posiadającym inną liczbę nukleonów, niż pierwotne) i stanowiłoby dużą komplikację techniczną i numeryczną. Jednakże teoria RPA uwzględnia korelacje w jądrze resztkowym przy pomocy amplitud dyskretnych Y_{ph} i X_{ph} , a więc pozostawia bazę jednocząstkową nienaruszoną. Sama konstrukcja elementów macierzowych $v_{ph;p'h'}$ i $u_{ph;p'h'}$ dowodzi, że rozseparowanie ich na V_r i V_d jest niemożliwe.

Użyjemy naszej hipotezy do dalszego przekształcenia równań CRPA. Ponieważ układ rozбивa się na poszczególne kanały rezonansowe opisane liczbami kwantowymi $[p_0], h_0$, zapiszemy te indeksy explicite. Poniższe podstawienie dotyczy amplitud $X_{[p]hJ}^{\omega}(\epsilon_p)$ oraz $Y_{[p]hJ}^{\omega}(\epsilon_p)$, czyli stosujemy je dla części funkcji falowej z nukleonem leżącym w kontinuum.

Stąd inne oznaczenie elementów macierzowych potencjału (wyróżniamy zmienne cząstek w kontinuum):

$$\begin{aligned}
& (\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) (A_{ph,p_0h_0} + Vp \frac{\tilde{X}_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p)}{\epsilon_p - \epsilon_h - \omega}) + \\
& + \sum_{p',h'}^{dysk.} (v_{[p]h;p'h'}^J(\epsilon_p) X_{p'h'J}^\omega + u_{[p]h;p'h'}(\epsilon_p) Y_{p'h'J}^\omega) + \\
& + \sum_{[p'],h'}^{kont.} \int_0^\infty d\epsilon_{p'} \left[v_{[p]h;[p']h'}^J(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) (A_{ph,p_0h_0} + Vp \frac{\tilde{X}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} - \omega}) + \right. \\
& \quad \left. + u_{[p]h;p'h'}(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) \frac{\tilde{Y}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} + \omega} \right] = 0 \\
& (\epsilon_p - \epsilon_h + \omega) \frac{\tilde{Y}_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p)}{\epsilon_p - \epsilon_h + \omega} + \\
& + \sum_{p',h'}^{dysk.} (v_{[p]h;p'h'}^{*J}(\epsilon_p) Y_{p'h'J}^\omega + u_{[p]h;p'h'}^{*J}(\epsilon_p) X_{p'h'J}^\omega) + \\
& + \sum_{[p'],h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} \left[v_{[p]h;[p']h'}^{*J}(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) \frac{\tilde{Y}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} + \omega} + \right. \\
& \left. + u_{[p]h;[p']h'}^{*J}(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) (A_{ph,p_0h_0} + Vp \frac{\tilde{X}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} - \omega}) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

W celu uproszczenia równań skorzystamy z własności dystrybucji:

$$\begin{aligned}
x\delta(x) &\equiv 0 \\
xVp \frac{1}{x} &\equiv 1
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

a także z faktu, że $\epsilon_{p_0} - \epsilon_{h_0} = \omega$. To zmienia postać naszego układu równań na:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{X}_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_p) + \sum_{p', h'}^{dysk.} \left(v_{[p]h; [p']h'}^J(\epsilon_p) X_{p'h'J}^{\omega p_0 h_0} + \right. \\
 & \quad \left. + u_{[p]h; [p']h'}(\epsilon_p) Y_{p'h'J}^{\omega p_0 h_0} \right) + \\
 & + \sum_{[p'], h'}^{kont.} \int_0^\infty d\epsilon_{p'} \left[v_{[p]h; [p']h'}^J(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) V p \frac{\tilde{X}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} - \omega} + \right. \\
 & \quad \left. + u_{[p]h; [p']h'}(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) \frac{\tilde{Y}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} + \omega} \right] = -v_{[p]h; [p_0]h_0}^J(\epsilon_p, \epsilon_{h_0} + \omega) \tag{3.5.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{Y}(\epsilon_p)_{[p]hJ}^{\omega p_0 h_0} + \sum_{p', h'}^{dysk.} \left(v_{[p]h; [p']h'}^{*J}(\epsilon_p) Y_{p'h'J}^{\omega p_0 h_0} + \right. \\
 & \quad \left. + u_{[p]h; [p']h'}^*(\epsilon_p) X_{p'h'J}^{\omega p_0 h_0} \right) + \\
 & + \sum_{[p'], h'}^{kont.} \int d\epsilon_{p'} \left[v_{[p]h; [p']h'}^{*J}(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) \frac{\tilde{Y}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} + \omega} + \right. \\
 & \quad \left. + u_{[p]h; [p']h'}^*(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) V p \frac{\tilde{X}_{[p']h'J}^{\omega p_0 h_0}(\epsilon_{p'})}{\epsilon_{p'} - \epsilon_{h'} - \omega} \right] = -u_{[p]h; [p_0]h_0}^{*J}(\epsilon_p, \epsilon_{h_0} + \omega).
 \end{aligned}$$

W tym układzie równań nie mamy już żadnych osobliwości (taki wynik otrzymał m.in. [3]), co umożliwia nam przeprowadzenie obliczeń numerycznych¹³. Musimy jeszcze zastanowić się nad potencjałem resztkowym pary cząstka- dziura. W tym miejscu możemy przyjrzeć się oddziaływaniom między nukleonami. Wiemy, że dla nukleonów w jądrze istnieje zależność od izospinu (proton/neutron), spinu (sprzężenie momentów magnetycznych) oraz pewien potencjał modelowy pochodzący z wymiany wirtualnych mezonów. Podobne zależności powinny istnieć dla potencjału resztkowego. Przy czym siła tych potencjałów powinna zależeć od odległości dzielącej składniki pary. Dlatego też wg. [3] możemy przyjąć:

$$\begin{aligned}
 V^{ph}(1, 2) = f(r_{12}) + f'(r_{12})\boldsymbol{\tau}(1)\boldsymbol{\tau}(2) + g(r_{12})\boldsymbol{\sigma}(1)\boldsymbol{\sigma}(2) + \\
 + g'(r_{12})\boldsymbol{\sigma}(1)\boldsymbol{\sigma}(2)\boldsymbol{\tau}(1)\boldsymbol{\tau}(2). \tag{3.5.9}
 \end{aligned}$$

Dokładne postacie funkcji f , f' , g , g' zależą od przyjętego modelu oddziaływań.

¹³ Niestety, złożoność problemu jest zbyt duża, by rozwiązać ten układ analitycznie. Jak przy większości problemów kilku(-nastu; -dziesięciu) ciał. Wiemy, że jakieś rozwiązanie istnieje, nie potrafimy tylko go obliczyć.

4. MODEL PRĄDU JĄDROWEGO

Do tej pory wyprowadziliśmy ogólną postać prądu jądrowego w zapisie multipolowym (2.3.2), (2.3.12), sposób obliczenia przekroju czynnego (2.3.13) oraz funkcji falowych układu w ujęciu CRPA. Nasz model dynamiczny sprowadza wszystko do elementów macierzowych multipolowych operatorów jednociałowych (3.4.23). Niestety, nadal nie wiemy, jaką postać mają jednociałowe operatory elektromagnetycznego prądu jądrowego. Okazuje się, że można je wprowadzić, niejako "od ręki", przyglądając się uproszczonej strukturze jądra atomowego. Metoda ta bazuje na najbardziej elementarnych własnościach fizycznych nukleonów i jest stosowana w wielu pracach dotyczących rozpraszania leptonów na jądrach atomowych. Zaprezentowano ją z detalami m.in. w [11].

W klasycznym opisie możemy powiedzieć, że jądro atomowe składa się z dwóch rodzajów cząstek: protonów i neutronów. Nukleony te obdarzone są pewnymi ładunkami elektrycznymi oraz momentami magnetycznymi. Uwzględniając ich ruch wewnątrz jądra możemy zapisać kwantowomechaniczny model prądów jądrowych. Konstruujemy więc operatory gęstości ładunku, gęstości prądu konwekcyjnego (ruch protonów wewnątrz jądra) oraz gęstości wewnętrznej magnetyzacji nukleonów ([6]):

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_N(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^A e(j) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\
 \hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^A e(j) \left\{ \frac{\hat{\mathbf{p}}(j)}{m}, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} \\
 \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^A \mu(j) \frac{\boldsymbol{\sigma}(j)}{2m} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j).
 \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

Model ten wykorzystuje podstawowe zasady mechaniki kwantowej. Dla jasności notacji $\hat{\mathbf{p}} \equiv -i\nabla$ i $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, gdzie σ_i to macierze Pauliego. Antykomutator w prądzie ładunkowym wprowadziliśmy ze względu na brak komutacji operatorów pędu i położenia. Można to łatwo sprawdzić dla pojedynczej cząstki:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) \rangle &= \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}_p) \frac{1}{2im} [\nabla_p \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \nabla_p] \psi(\mathbf{x}_p) = \\
 &= \frac{1}{2im} \{ \psi^\dagger(\mathbf{x}_p) \nabla \psi(\mathbf{x}_p) - [\nabla \psi^\dagger(\mathbf{x}_p)] \psi(\mathbf{x}_p) \}
 \end{aligned} \tag{4.0.2}$$

co jest prawidłową definicją kwantowomechanicznego prądu.

Aby zapisać ładunek i moment magnetyczny nukleonu musimy znaleźć prosty sposób na rozróżnianie, czy mamy do czynienia z protonem, czy też neutronem. W tym celu wprowadzamy dodatkową zmienną izospinową τ_3 , oznaczającą rzut izospinu na oś z . Wtedy

możemy zapisać ładunek i moment magnetyczny, jako:

$$\begin{aligned} e(j) &\equiv \frac{1}{2}[1 + \tau_3(j)] \\ \mu(j) &\equiv \lambda_p \frac{1}{2}[1 + \tau_3(j)] + \lambda_n \frac{1}{2}[1 - \tau_3(j)] \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

gdzie odpowiednio λ_p i λ_n to momenty magnetyczne protonu i neutronu. Dodatkowym czynnikiem potrzebnym do obliczenia $\boldsymbol{\mu}$ jest anomalny moment magnetyczny nukleonu:

$$\begin{aligned} \lambda'(j) &= \lambda'_p \frac{1}{2}[1 + \tau_3(j)] + \lambda'_n \frac{1}{2}[1 - \tau_3(j)] \\ \mu(j) &= e(j) + \lambda'(j). \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

Wzór (2.3.2) mówi, że wektorowa część operatorów gęstości jest dzielona pomiędzy dwa typy operatorów multipolowych: elektryczny $\hat{T}_{J,\lambda}^{el}(q)$ oraz magnetyczny $\hat{T}_{J,\lambda}^{mag}(q)$. W celu podzielenia wkładów od $\hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x})$ i $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})$ pomiędzy multipolowe operatory wektorowe musimy zrobić niewielką dygresję i wprowadzić modelowy hamiltonian oddziaływania jądra z polem elektromagnetycznym.

4.1 Dopasowanie wektorowych operatorów gęstości do struktury multipolowych operatorów elektrycznych i magnetycznych

Najprostszy model oddziaływania wektorowego prądu jądrowego z potencjałem wektorowym pola elektromagnetycznego opisuje poniższy hamiltonian ([11]):

$$H = -e \int \hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) \mathbf{A}(x) d^3x - e \int \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) [\nabla \times \mathbf{A}(x)] d^3x. \quad (4.1.1)$$

Jak widzimy w powyższym wzorze, jest to klasyczna energia oddziaływania gęstości prądu jądrowego ładunków ($\hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x})$) oraz momentów magnetycznych ($\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})$) z polem ($\mathbf{A}(x)$). Oczywiście w tym sformułowaniu trudno dostrzec strukturę rozwinięcia multipolowego (2.3.2). Przekształcenie go do użytecznej postaci wymaga skorzystania z tożsamości wektorowych:

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b}) \quad (4.1.2)$$

oraz zanikania pól fizycznych w ∞ . Wykonując całkowanie przez części dostajemy poniższy wzór:

$$H' = -e \int \left(\hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) + \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{A}(x) d^3x. \quad (4.1.3)$$

Pierwszy człon daje się łatwo użyć w rozwinięciu multipolowym, opisanym w rozdziale 2.3 oraz dodatku E.5. Drugi z nich wymaga większej uwagi. Musimy najpierw rozwinąć $\mathbf{A}(x)$ w szereg wektorowych harmonik sferycznych, a następnie całkować przez części:

$$\int \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) [\nabla \times j_J(kx) \mathbf{Y}_{M,M}^J] d^3x = \int \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \nabla \times [\nabla \times j_J(kx) \mathbf{Y}_{M,M}^J] d^3x. \quad (4.1.4)$$

Dodatkowy zestaw tożsamości będzie tutaj przydatny:

$$\begin{aligned} \int (\nabla \times \mathbf{a})(\nabla \times \mathbf{b}) d^3x &= \int (\mathbf{a} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \times \nabla \mathbf{b})) d^3x \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Ostatecznie otrzymujemy następujący wynik:

$$\int \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) [\nabla \times j_J(kx) \mathbf{Y}_{M,M}^J] d^3x = k^2 \int \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) [j_J(kx) \mathbf{Y}_{M,M}^J] d^3x. \quad (4.1.6)$$

Wykorzystując techniki zaprezentowane w dodatku E.5 otrzymujemy ostateczny wynik:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{J,\lambda}^{el}(k) &= \frac{1}{k} \int \left\{ [\nabla \times j_J(kx) \mathbf{Y}_{J,J}^\lambda(\Omega)] \hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) + k^2 j_J(kx) \mathbf{Y}_{J,J}^\lambda(\Omega) \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \right\} d^3x \\ \hat{\mathbf{T}}_{J,\lambda}^{mag}(k) &= \int \left\{ j_J(kx) \mathbf{Y}_{J,J}^\lambda(\Omega) \hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) + [\nabla \times j_J(kx) \mathbf{Y}_{J,J}^\lambda(\Omega)] \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Dzięki niemu wiemy, w jaki sposób poszczególne operatory gęstości wektorowej (4.0.2) wchodzą do operatorów multipolowych.

4.2 Poprawki relatywistyczne. Redukcja nierelatywistyczna wierzchołka oddziaływania i reprezentacja drugiego kwantowania

W tym modelu trzymaliśmy się konsekwentnie nierelatywistycznego opisu prądu hadronowego. Pęd nukleonów w jądrze nie przekracza paruset MeV, tak więc opis nierelatywistyczny jest jak najbardziej stosowny. Jednakże w przekroju inkluzywnym mamy do czynienia z pędami q^2 nawet przekraczającymi rząd M^2 . Dlatego też musimy znaleźć sposób na dodanie poprawki do nierelatywistycznych operatorów prądu. Metodą na to, aby mieć kontrolę nad dopasowaniem opisu kwantowomechanicznego do wyprowadzonego w sposób kowariantny przekroju czynnego jest redukcja nierelatywistyczna elementu macierzowego prądu nukleonowego związanego z wierzchołkiem oddziaływania elektromagnetycznego. Procedura ta przedstawiona została w [5] oraz [11] i prowadzi do połączenia elektromagnetycznego czynnika postaci nukleonu z naszymi operatorami w granicy nierelatywistycznej oraz dodania dodatkowych członów (niewystępujących w (4.0.2)), związanych z poprawką relatywistyczną.

Najogólniejsza struktura wierzchołka oddziaływania elektromagnetycznego dla swobodnego nukleonu wygląda następująco:

$$\langle \mathbf{p}', s', t' | J_\mu(q) | \mathbf{p}, s, t \rangle = \frac{m}{\sqrt{EE'}} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \eta_t^\dagger (F_1(q^2) \gamma_\mu + i F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu) \eta_t u_s(\mathbf{p}) \quad (4.2.1)$$

gdzie przez η_t oznaczamy izospinor spełniający równanie $\tau_3 \cdot \eta_t = t \cdot \eta_t$, natomiast:

$$\sqrt{\frac{m}{E}} u_s(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}_p}{(E+m)} \phi_s \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Przez $\sigma_{\mu\nu}$ oznaczamy komutator dwóch macierzy Diraca:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i(\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu}) \quad (4.2.3)$$

natomiast przekaz pędu definiujemy zgodnie z naszą notacją przez $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. Funkcje $F_1(q^2)$ i $F_2(q^2)$ nazywamy czynnikami postaci nukleonu (*form factors*). Rozwinięcie

procedurę konsekwentnie do rzędu $\frac{|\mathbf{p}|}{m}$. Szczegóły obliczeń umieszczono w dodatku F.4. Wynikiem jest poniższa zależność:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', s', t' | J_0(\mathbf{q}) | \mathbf{p}, s, t \rangle &= (F_1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m^2}(4mF_2 + F_1))\delta_{s,s'}\delta_{t,t'} + \\ &- \chi_{s'}^\dagger \eta_{t'}^\dagger \frac{i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})}{4m^2} \eta_t \chi_s (F_1 + 4mF_2) \\ \langle \mathbf{p}', s', t' | \mathbf{J}(\mathbf{q}) | \mathbf{p}, s, t \rangle &= \frac{\mathbf{p}}{m} \delta_{s,s'} \delta_{t,t'} F_1 + \frac{\mathbf{q}}{2m} \delta_{s,s'} \delta_{t,t'} F_1 + \\ &+ \chi_{s'}^\dagger \eta_{t'}^\dagger \frac{i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q})}{2m} \left[F_1 + \left(1 - \frac{\nu}{2m}\right) F_2 \right] \eta_t \chi_s. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Posiadając tę wiedzę przeprowadzamy konstrukcję operatora prądu jądrowego w postaci sumy prądów pojedynczych nukleonów, danych równaniem (4.2.1):

$$\hat{J}_\mu(0) = \sum_{\mathbf{p}', s', t'} \sum_{\mathbf{p}, s, t} c_{\mathbf{p}', s', t'}^\dagger \langle \mathbf{p}', s', t' | J_\mu(0) | \mathbf{p}, s, t \rangle c_{\mathbf{p}, s, t}. \quad (4.2.5)$$

Jak nietrudno odgadnąć, jednociałowy operator gęstości dla jądra w reprezentacji pierwszego kwantowania ma postać:

$$\hat{J}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A \{ J_\mu(i) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \}. \quad (4.2.6)$$

Dla drugiego kwantowania dostaniemy wówczas:

$$\hat{J}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}', s', t'} \sum_{\mathbf{p}, s, t} c_{\mathbf{p}', s', t'}^\dagger \langle \mathbf{p}', s', t' | J_\mu(\mathbf{x}) | \mathbf{p}, s, t \rangle c_{\mathbf{p}, s, t} \quad (4.2.7)$$

gdzie element macierzowy wyrażamy poprzez:

$$\langle \mathbf{p}', s', t' | J_\mu(\mathbf{x}) | \mathbf{p}, s, t \rangle = \int d^3y \Phi_{\mathbf{p}', s', t'}^\dagger \{ J_\mu(i) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \} \Phi_{\mathbf{p}, s, t}. \quad (4.2.8)$$

W rozdziale 2.1 wykazaliśmy, że obserwabie fizyczne i przekroje czynne dają się wyrazić przy użyciu transformacji Fouriera elementów macierzy przejścia:

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \langle f | \hat{J}_\mu(\mathbf{x}) | i \rangle. \quad (4.2.9)$$

Dlatego też możemy podstawić: $\nabla \leftrightarrow -i\mathbf{q}$. Patrząc na strukturę (4.2.4) oraz (4.0.2), możemy zidentyfikować poszczególne fragmenty prądu nukleonowego z zapostulowanymi operatorami gęstości.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} &\leftrightarrow \left\{ \frac{\hat{\mathbf{p}}_j}{2m}, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} (\hat{J}_C(\mathbf{x})) \\ \frac{-\mathbf{q}^2}{8m^2} &\leftrightarrow \Delta \cdot \text{skalar}(\hat{\rho}/8m^2) \\ i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}) &\leftrightarrow \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \\ i\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}) &\leftrightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \left\{ \frac{\hat{\mathbf{p}}_j}{2m}, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\} \\ &\text{itd.} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

To daje nam następujące definicje operatorów prądu:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{J}}_C(\mathbf{x}) + \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) \\ \hat{\rho}(\mathbf{x}) &= \hat{\rho}_N(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) + \Delta \hat{\phi}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

Okazuje się, że poprawka nierelatywistyczna daje 2 człony, których model kwantowomechaniczny nie przewiduje, a mianowicie:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^A s(j) \frac{1}{8m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\ \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^A s(j) \frac{1}{4m^2} \boldsymbol{\sigma}(j) \times \left\{ \frac{\hat{\mathbf{p}}_j}{2m}, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right\}.\end{aligned}\quad (4.2.12)$$

Przez $s(j)$ oznaczamy:

$$s(j) = e(j) + \lambda'(j). \quad (4.2.13)$$

Jest to interesujący rezultat. Okazuje się, że wiodąca poprawka relatywistyczna jest o rząd m^2 mniejsza, niż kwantowomechaniczne operatory postulowane w (4.0.2). Dlatego też autor [11] je pominął.

Kolejnym miejscem, w którym, według [11], dokonać możemy korekty, jest założenie punktowości nukleonów. Rezultatem empirycznym dla czynników postaci w materii jądrowej jest:

$$\begin{aligned}\frac{F_1(q^2)}{F_1(0)} &\approx f_{SN}(q^2) \approx \frac{F_2(q^2)}{F_2(0)} \\ f_{SN}(q^2) &= \frac{1}{(1 + q^2/0.71 \text{ GeV}^2)^2}\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

dla niewielkich q^2 wielkość $f_{SN}(q^2)$ wchodzi jako czynnik multiplikatywny do wierzchołka oddziaływania elektromagnetycznego. Wtedy możemy zdefiniować efektywny przekrój Motta:

$$\bar{\sigma}_M \equiv \sigma_M |f_{SN}(q^2)|^2. \quad (4.2.15)$$

W ten sposób dostajemy przybliżoną poprawkę na "rozmycie" przestrzenne ładunków elektrycznych i momentów magnetycznych nukleonów w materii jądrowej.

Składając razem wyniki (4.0.2), (4.2.11), (4.1.7) oraz dyskusje z rozdziałów o analizie multipolowej, możemy wreszcie zapisać postać jednocząstkowych operatorów multipolowych, rozwiniętych do rzędu $\frac{|\mathbf{p}|}{m}$:

$$\begin{aligned}M_{JM}(\nu) &= M_J^M(\nu \mathbf{x}) \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \\ iT_{JM}^{mag}(\nu) &= \frac{\nu}{m} \left\{ \mathbf{M}_{JJ}^M(\nu \mathbf{x}) \cdot \frac{1}{\nu} \nabla \frac{1}{2} (1 + \tau_3) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\nu} \nabla \times \mathbf{M}_{JJ}^M(\nu \mathbf{x}) \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \left[\frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) + \frac{1}{2} \tau_2 (\mu_p - \mu_n) \right] \right\} \\ T_{JM}^{el}(\nu) &= \frac{\nu}{m} \left\{ \left[\frac{1}{i\nu} \nabla \times \mathbf{M}_{JJ}^M(\nu \mathbf{x}) \right] \frac{1}{\nu} \nabla \frac{1}{2} (1 + \tau_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{M}_{JJ}^M(\nu \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \left[\frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) + \frac{1}{2} \tau_3 (\mu_p - \mu_n) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.2.16)$$

Tutaj przyjęliśmy:

$$\begin{aligned}M_J^M(\nu\mathbf{x})(\nu\mathbf{x}) &\equiv j_J(\nu x)Y_{JM}(\omega_{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{M}_{JJ}^M(\nu\mathbf{x}) &\equiv j_J(\nu x)\mathbf{Y}_{JJ}^M(\omega_{\mathbf{x}})\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

5. PODSUMOWANIE

Rozpraszanie kwazielastyczne przy niskich przekazach energii i pędu jest zagadnieniem, w którym trzeba wykorzystywać wiedzę z wielu dziedzin fizyki. Zaczęliśmy od kwantowej teorii pola, potrzebnej do opisu podstawowej obserwabli fizycznej, jaką jest inkluzywny przekrój czynny na rozpraszanie elektronów (2.1.18) na jądrach atomowych. Pomimo użycia jedynie pierwszego rzędu rachunku zaburzeń (pominięto FSI, elektrony opisujemy falą płaską) udało się nam pokazać najważniejsze cechy przekroju inkluzywnego. Opisaliśmy także w sposób zrozumiały zasady konstrukcji przekroju czynnego na rozpraszanie leptonów na obiektach o złożonej budowie. Ze względu na wygodę opisu jąder sferycznie symetrycznych musieliśmy skorzystać z zaawansowanych metod opisu momentu pędu w mechanice kwantowej, aby uzyskać opis przekroju czynnego w bazie multipolowej (2.3.13).

Zaproponowaliśmy dwa modele dynamiki jądra atomowego: CTDA oraz CRPA, przy czym uwagę skupiliśmy na CRPA. Punktem wyjścia do rozważań był model kwantowo-mechaniczny Blocha [2], w którym przestrzeń możliwych rozwiązań obcięto do stanów związanych nukleonów, tworzących wzbudzone jądro końcowe, oraz jądra resztkowego z jednym nukleonem wybitym do kontinuum. Za pełny hamiltonian przyjęto (3.0.3), zawierający energię kinetyczną nukleonów oraz oddziaływanie dwuciałowe. Pomimo względnej prostoty, model ten pozwala na omówienie kilku ważnych zagadnień, takich jak rezonanse związane z rozpraszaniem do kontinuum, czy też asymptotyczne zachowanie układu jądro + wybity nukleon. W ramach tej kwantowomechanicznej teorii wyprowadziliśmy przybliżenie, w którym ograniczamy się do wzbudzeń cząstka-dziura powstających ze stanu podstawowego hamiltonianu średniopolowego. Jest to model TDA. Założyliśmy, że oddziaływanie jednociałowe jest oddziaływaniem Hartreego- Focka, a stan podstawowy układu próżnią Hartreego- Focka. Okazało się, że rozwiązanie pełnego hamiltonianu w tej bazie prowadzi do równań Tamma- Dancoffa (3.3.24) i zależy ono jedynie od liczb kwantowych cząstek i dziur oraz oddziaływania resztkowego między nimi. Wynik ten jest o tyle ciekawy, że nie posłużyliśmy się formalizmem kwantowej teorii wielu ciał, a jedynie mechaniką kwantową. Można go porównać z formułą wyprowadzoną w standardowy sposób w [6].

Formalizm TDA zakłada brak korelacji w stanie podstawowym, gdyż każdy stan bazy powstaje ze wzbudzenia pary z próżni Hartreego- Focka. Rozwiązania te nie uwzględniają poprawki oddziaływania dwuciałowego do jądra resztkowego, o której pisał Bloch (3.1.11). Zubaża to opis fizyczny wzbudzeń jądra atomowego. Jednym ze sposobów na poprawę tej sytuacji jest rozważenie stanu podstawowego składającego się z próżni Hartreego- Focka oraz pewnej domieszki wzbudzeń cząstka- dziura. W ten sposób możemy nie tylko wzbudzać nowe pary ze stanu podstawowego, ale też anihilować wcześniej istniejące. Dzięki temu możemy uzyskać bogatsze spektrum stanów kolektywnych jądra resztkowego, co znacznie poprawia opis układu. To doprowadziło nas do równań CRPA (3.4.14), które wyprowadziliśmy już w ramach kwantowej teorii układów wielu ciał ([6]). Dzięki nim możemy obliczać współczynniki funkcji falowej stanu końcowego układu w bazie wzbudzeń cząstka-

dziura (3.4.7). Docelowo mamy liczyć wartości oczekiwane nieprzywiedlnych operatorów tensorowych (czyli multipolowych operatorów prądu jądrowego). Dlatego też, posługując się metodą opisaną w [6], dokonaliśmy redukcji bazy równań CRPA, grupując wszystkie elementy do pewnych stanów własnych momentu pędu (3.4.25). Dzięki temu pokazaliśmy, że do liczenia obserwabli w układzie wielociałowym wystarczy znajomość funkcji jedno-cząstkowych oraz współczynników $X_{ph;J}^\omega$ oraz $Y_{ph;J}^\omega$. W ten oto sposób całą wielociałową naturę zagadnienia możemy "ukryć" we współczynnikach funkcji falowej będącej rozwiązaniem zagadnienia na wartości własne pełnego hamiltonianu w modelowej, ograniczonej przestrzeni. To pozwoliło nam na obliczenie żądanych amplitud, a także na znalezienie wartości oczekiwanych jednociałowych operatorów multipolowych (3.4.24), co umożliwia nam obliczenie przekroju czynnego pod warunkiem, że znajdziemy postać oddziaływania resztkowego, skonstruujemy właściwy stan podstawowy jądra oraz znajdziemy postać jednociałowych prądów jądrowych.

W rozdziale 3.5 omówiliśmy też sposób definiowania kanałów rozpraszania, które prowadzą do powstawania biegunów w amplitudach funkcji falowych. Podstawienie zaproponowane przez Blocha umożliwiło nam na pozbycie się członów osobliwych z równań. Ostatecznie otrzymaliśmy równania (3.5.8), opisujące amplitudy związane z emisją nukleonu do kontinuum.

Konstrukcja podstawowych operatorów jednociałowych prądu elektromagnetycznego została omówiona w rozdziale 4 i oparta jest na rozważaniach z [11]. Punktem wyjściowym był kwantowomechaniczny opis prądu jądrowego, pochodzącego od ruchu nukleonów posiadających ładunki elektryczne i momenty magnetyczne (4.0.2). Ponieważ operator prądu jądrowego w zapisie multipolowym dzieli się na część magnetyczną i elektryczną (2.3.2), w rozdziale 4.1 zaproponowaliśmy postać hamiltonianu oddziaływania prądu jądrowego z polem wektorowym, aby rozdzielić składniki dające wkład do $\hat{T}_{JM}^{el.}$ oraz $\hat{T}_{JM}^{mag.}$ (4.1.7). Nasz model prądu jest z założenia nierelatywistyczny. Dlatego też rozwinęliśmy element prądu nukleonowego, związanego z oddziaływaniem elektromagnetycznym, w potęgach $\frac{|p|}{M}$. Porównując strukturę elementów związanych z czynnikami postaci nukleonu oraz modelowym prądem otrzymaliśmy wzór (4.2.11). Okazało się, że wiodąca poprawka relatywistyczna jest o rząd M^2 mniejsza od członów nierelatywistycznych, dlatego też w rozważanym tutaj przedziale energii możemy ją spokojnie pominąć. Ostatecznie rozwinęliśmy operatory prądu w bazie multipolowej (4.2.16).

W taki oto sposób dostaliśmy ostatecznie przepis na obliczenie przekroju czynnego na rozpraszanie elektronów na lekkich jądrach przy przekazach pędu i energii rzędu kilkudziesięciu MeV . Osobną kwestią pozostaje rozwiązanie równań CRPA, co wymaga znacznego wysiłku programistycznego i numerycznego. Niektóre techniki wykorzystywane przy tych obliczeniach zostały zaprezentowane w [5] i [3]. Wymagają one czasochłonnego przygotowania analitycznego wzorów oraz uczynienia pewnych założeń teoretycznych dotyczących osobliwości w amplitudach rozpraszania do kontinuum, na które zwrócił uwagę Bloch.

PODZIĘKOWANIA

Chciałbym bardzo podziękować mojemu promotorowi, profesorowi Janowi Sobczykowi, za pomoc okazaną przy tworzeniu pracy. Zakres zaprezentowanego tu materiału jest ogromny i zawiera problemy wykraczające poza standardowy zakres kursów fizyki na studiach. Bez naszych owocnych dyskusji i uwag prof. Sobczyka nie udałooby mi się złożyć tego wszystkiego w logiczną i czytelną całość. Prof. Jan Sobczyk pomógł mi zrozumieć wiele problematycznych kwestii. Dzięki dostarczeniu niedostępnych w naszej bibliotece materiałów, takich jak [11] i [9], miałem znacznie ułatwione zadanie przy formułowaniu opisu kinematycznego procesów rozpraszania oraz przy zrozumieniu niektórych aspektów modelu RPA. Chciałbym podziękować też doktorowi Krzysztofowi Graczykowi za cenne uwagi dotyczące pracy. Konsultacje zaowocowały pełniejszym opisem przeprowadzonych obliczeń oraz poprawiły jakość pracy.

DODATEK

A. JEDNOSTKI I KONWENCJE

A.1 Układ jednostek

Ze względu na większą czytelność i skrócenie zapisu wzorów przyjęty układ jednostek to układ z $\hbar = c = 1$. Aby uzyskać konkretne wartości liczbowe wystarczy przywrócić odpowiednie potęgi stałej Plancka i prędkości światła we wzorach. W tym układzie długość ma ten sam wymiar, co czas, a masa- odwrotność długości.

A.2 Przestrzeń Minkowskiego

W całej pracy użyto notacji kowariantnej z metryką $(+, -, -, -)$. Standardowy sposób zapisu 4-wektorów to:

$$x^\mu = (x_0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -\mathbf{x}). \quad (\text{A.2.1})$$

Gdzie $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} \equiv (x, y, z)$, $x_0 = ct$ przy czym prędkość światła w zapisie pomijamy, patrz: dodatekA.1. Iloczyn skalarny zadany jest przez:

$$x^\mu y_\mu \equiv x \cdot y \equiv x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (\text{A.2.2})$$

Wszędzie obowiązuje standardowa konwencja sumacyjna Einsteina dla indeksów kontra- i kowariantnych.

A.3 Algebra i spinory Diraca

Czterowymiarowa algebra Diraca ma nieskończoną ilość równoważnych reprezentacji. Tutaj przyjęto konwencję z [1]. Tak więc macierze Diraca definiujemy następująco:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i. \quad (\text{A.3.1})$$

Macierze γ spełniają następujące związki antykomutacyjne (to właśnie definiuje elementy tej algebry- relacja jest niezależna od reprezentacji, jedynie czynnik przy metryce zależy od wymiarowości przestrzeni):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.3.2})$$

Dodatkowa macierz γ^5 , która antykomutuje z pozostałymi: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, zdefiniowana jest następująco:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.3.3})$$

Służy ona do konstrukcji operatorów rzutowych na stany lewo- i prawoskrętne cząstek:

$$P_{R/L} = \frac{(1 \pm \gamma^5)}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.3.4})$$

Kolejne ważne dla obliczeń fizycznych własności tych macierzy to ślady ich iloczynów:

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbb{1}) &= 4 & (A.3.5) \\
Tr(\text{nieparzysta ilość } \gamma) &= 0 \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
Tr(\gamma^5) &= 0 \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}$$

gdzie $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ jest kompletnie antysymetrycznym tensorem, ($\epsilon^{0123} = -1$). Dla iloczynu 4-wektora z macierzami Diraca wprowadzono skróconą notację:

$$\gamma^\mu k_\mu = \not{k}. \quad (A.3.6)$$

Rozwiązania równania Diraca dla cząstek swobodnych w postaci fal płaskich opisane są przez bispinory:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\text{cząstka}}(p, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_s(p) e^{ip \cdot x} & (A.3.7) \\
\Psi_{\text{antycząstka}}(p, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} v_s(p) e^{-ip \cdot x}.
\end{aligned}$$

Definicja u i v jest następująca:

$$\begin{aligned}
u_s(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \phi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E_p+m)}} \phi_s \end{pmatrix} & (A.3.8) \\
v_s(p) &= \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E_p+m)}} \phi_s \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \phi_s \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ϕ_s to funkcja własna spinu. Spełniają one następujące związki ortogonalności:

$$\begin{aligned}
u_s^\dagger(p) u_{s'}(p) &= v_s^\dagger(p) v_{s'}(p) = \frac{E_p}{m} \delta_{s,s'} & (A.3.9) \\
\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) &= -\bar{v}_s(p) v_{s'}(p) = \delta_{s,s'} \\
\bar{v}_s(p) u_{s'}(p) &= v_s^\dagger(p) u_{s'}(-p) = 0
\end{aligned}$$

które wraz z definicją (A.3.8) dają poniższą regułę sumacyjną:

$$\begin{aligned}
\sum_s u_{\alpha s}(p) \bar{u}_{\beta s}(p) &= \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} & (A.3.10) \\
\sum_s v_{\alpha s}(p) \bar{v}_{\beta s}(p) &= \left(\frac{\not{p} - m}{2m} \right)_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

A.4 Kwantowanie w pudle

Zasadnicze różnice pomiędzy obliczeniami prowadzonymi w układzie kwantowanym w "pudle" o objętości przestrzennej V i czasowej T są opisane w [12]. Tutaj omówimy je skrótowo. Dla funkcji falowych N_i cząstek w **pędowych** stanach początkowych *initial* i N_f końcowych *final* relacja jest następująca:

$$\Psi_{i/f}^{\text{pudło}} = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{\frac{1}{2}N_{i/f}} \Psi_{i/f} \quad (\text{A.4.1})$$

np. dla funkcji falowej elektronu zadanej wzorem (A.3.7):

$$\Psi^{\text{pudło}}(p, s) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_s(p) e^{ip \cdot x}. \quad (\text{A.4.2})$$

Z tej reguły wynika, że dla elementów macierzy S w procesie z N_i cząstek początkowych i N_f końcowych mamy transformację:

$$S_{fi}^{\text{pudło}} = \left[\frac{(2\pi)^3}{V} \right]^{(N_i+N_f)/2} S_{fi}. \quad (\text{A.4.3})$$

Jeżeli chodzi o sumowanie po pędach, to w granicy $V \rightarrow \infty$ przechodzi ono w całkę:

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.4.4})$$

Kolejnym ważnym zagadnieniem jest definicja funkcji delta Diraca. Chcemy, aby dla stanów pędowych spełniona była równość:

$$\langle p', s' | p, s \rangle = \begin{cases} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \delta_{s, s'} & \text{pudło o obj. } V \\ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') & \text{granica } V \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (\text{A.4.5})$$

Łatwo sprawdzić, że podstawiając za stany własne $|p, s\rangle$ i $|p', s'\rangle$ funkcje falowe zdefiniowane wzorem (A.3.7) dla funkcji zdefiniowanej w przestrzeni o $V \rightarrow \infty$ oraz (A.4.2) dla funkcji zdefiniowanej w pudle o skończonej objętości otrzymamy poniższe relacje:

$$\begin{aligned} \int_V d^3 x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} &= V \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \\ \int d^3 x e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (\text{A.4.6})$$

Wzory te definiują konwencję unormowania wszystkich transformacji Fouriera i umożliwiają zdefiniowanie chociażby takiej wielkości, jak $|S_{fi}|^2$ potrzebnej do obliczenia przekroju czynnego.

Dla stanów własnych **momentu pędu** konwencja normalizacyjna jest odmienna. Z definicji są one unormowane tak, aby:

$$\langle JM | J' M' \rangle = \delta_{J, J'} \delta_{M, M'}. \quad (\text{A.4.7})$$

Nie ma więc czynników typu $\frac{(2\pi)^3}{V}$ pochodzących od normalizacji w skończonej objętości.

B. REGULY FEYNMANA W ELEKTRODYNAMICE KWANTOWEJ

Poniższy zestaw reguł Feynmana został użyty w obliczaniu przekroju czynnego:

1. Dodać czynnik $(-i)$ na każdy rząd rachunku zaburzeń.
2. Dla każdego wierzchołka uwzględnić czynnik $(-ieJ^\mu)$, gdzie J_μ opisuje prąd cząstek naładowanych (np. $-ie\gamma^\mu$ dla elektronów).

3. Każdy wchodzący/wychodzący z diagramu elektron wnosi czynnik

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_s(p) e^{ip \cdot x} / \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}_s(p) e^{-ip \cdot x}.$$

4. Dla propagatora wirtualnego fotonu uwzględniamy:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \tag{B.0.1}$$

gdzie q^μ to przekaz czteropędu w procesie.

5. Każdy wierzchołek to dodatkowy czynnik $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_m p_m)$ wynikający z zasady zachowania pędu.
6. Przecałkować $\int d^4p$ po wszystkich liniach wewnętrznych diagramu.

C. MOMENT PĘDU

C.1 Podstawowe definicje

Definicje i obliczenia w tym rozdziale zaczerpnięto z [6] i [10]. Operator momentu pędu zdefiniowany jest przez związek komutacyjny:

$$\left[\hat{J}_k, \hat{J}_l \right] = i\epsilon_{klm} \hat{J}_m \quad (\text{C.1.1})$$

przy czym może być związany np. ze sumą orbitalnego i spinowego momentu pędu:

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{s}}. \quad (\text{C.1.2})$$

Bez względu na wybraną reprezentację związek (C.1.1) jest zawsze spełniony. W naszych rozważaniach wybieramy dla wygody następujący zupełny zbiór komutujących ze sobą operatorów: $\hat{\mathbf{J}}^2$ i \hat{J}_3 i definiujemy dla nich funkcje własne:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 |JM\rangle = J(J+1) |JM\rangle \quad (\text{C.1.3})$$

$$\hat{J}_z |JM\rangle = M |JM\rangle. \quad (\text{C.1.4})$$

Dla tej reprezentacji funkcji własnych możemy zdefiniować operatory podnoszące i obniżające trzecią składową momentu pędu:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y, \quad (\text{C.1.5})$$

których własności jasno wynikają ze związków komutacyjnych:

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm \right] = \pm \hat{J}_\pm, \quad \left[\hat{J}_+, \hat{J}_- \right] = 2\hat{J}_z. \quad (\text{C.1.6})$$

Warunek ortonormalności stanów pomaga znaleźć:

$$\hat{J}_\pm |JM\rangle = [J(J+1) - M(M \pm 1)]^{1/2} |JM \pm 1\rangle. \quad (\text{C.1.7})$$

C.2 Dodawanie dwóch momentów pędu. Współczynniki Clebscha- Gordana

Dane mamy 2 **komutujące** operatory momentu pędu $\hat{\mathbf{J}}_1$ i $\hat{\mathbf{J}}_2$ wraz ze stanami własnymi $\hat{\mathbf{J}}_i^2$ i \hat{J}_{iz}^2 danymi odpowiednio $|J_1 M_1\rangle$ i $|J_2 M_2\rangle$. Definiujemy $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$. Baza nowej reprezentacji dana jest przez:

$$|J_1 J_2 JM\rangle = \sum_{M_1 M_2} |J_1 M_1; J_2 M_2\rangle \langle J_1 M_1; J_2 M_2 | J_1 J_2 JM\rangle. \quad (\text{C.2.1})$$

Tutaj $|J_1M_1; J_2M_2\rangle \equiv |J_1M_1\rangle \otimes |J_2M_2\rangle$ jest iloczynem tensorowym stanów z dwóch wyjściowych reprezentacji. Momenty pędu muszą spełniać $M = M_1 + M_2$. Ta transformacja jest odwracalna:

$$|J_1M_1; J_2M_2\rangle = \sum_{JM} \langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle^* |JM\rangle. \quad (\text{C.2.2})$$

Współczynnik $\langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle$ nazywamy współczynnikiem Clebscha- Gordana. Można założyć, że jest on rzeczywisty, tj.

$$\langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2; JM \rangle = \langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle^*. \quad (\text{C.2.3})$$

Z zupełności i ortogonalność stanów $|J_1M_1; J_2M_2\rangle$ oraz $|J_1J_2; JM\rangle$ wynikają poniższe relacje:

$$\begin{aligned} \langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1M'_1; J_2M'_2 \rangle &= \delta_{M_1, M'_1} \delta_{M_2, M'_2} \\ \langle J_1J_2JM | J_1J_2J'M' \rangle &= \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} \\ \sum_{J, M} |J_1J_2JM\rangle \langle J_1J_2JM| &= \sum_{\substack{M_1, M_2 \\ J_1, J_2}} |J_1M_1; J_2M_2\rangle \langle J_1M_1; J_2M_2| = \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.4})$$

Te wzory pozwalają na zapisanie:

$$\begin{aligned} \sum_{M_1, M_2} \langle J_1J_2J'M' | J_1M_1; J_2M_2 \rangle \langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle &= \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} \\ \sum_{J, M} \langle J_1M'_1; J_2M'_2 | J_1J_2JM \rangle \langle J_1J_2JM | J_1M_1; J_2M_2 \rangle &= \delta_{M_1, M'_1} \delta_{M_2, M'_2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.5})$$

Postać tych współczynników znajduje się diagonalizując operatory $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$ oraz $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_1\hat{J}_2$. Szczegóły obliczeń są zawarte m.in. w [10]. Wynikiem tej operacji jest następujący układ równań:

$$\begin{aligned} (2M_1M_2 - \alpha_J) \langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle &+ \\ + A(J_1, M_1 + 1)A(J_2, -M_2 + 1) \langle J_1M_1 + 1; J_2M_2 - 1 | J_1J_2JM \rangle &+ \\ + A(J_1, -M_1 + 1)A(J_2, M_2 + 1) \langle J_1M_1 - 1; J_2M_2 + 1 | J_1J_2JM \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

Tutaj $A(J, M) = [(J + M)(J_M + 1)]^{1/2}$, $\alpha_J = J(J + 1) - J_1(J_1 + 1) - J_2(J_2 + 1)$. Ten układ na wartości własne α_J ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$, tj. gdy momenty pędu spełniają regułę trójkąta. Współczynniki CG można określić z dokładnością do ogólnego współczynnika fazowego, tak więc kwestią wyboru pozostaje ustalenie konkretnej konwencji fazowej. W tej pracy zakładamy, że faza daje współczynniki rzeczywiste. To prowadzi do dodatkowych związków symetrii:

$$\langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle = (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_1 - M_1; J_2 - M_2 | J_1J_2J - M \rangle \quad (\text{C.2.7})$$

$$\langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle = (-1)^{J_1+J_2-J} \langle J_2M_2; J_1M_1 | J_2J_1JM \rangle \quad (\text{C.2.8})$$

$$\langle J_1M_1; J_2M_2 | J_1J_2JM \rangle = \quad (\text{C.2.9})$$

$$= (-1)^{J_2+M_2} \left(\frac{2J + 1}{2J_1 + 1} \right)^{1/2} \langle J_2 - M_2; JM | J_2J_1M_1 \rangle.$$

Poniższe dwa współczynniki są szczególnie przydatne podczas obliczeń:

$$\langle J_1 M_1; 00 | J_1 0 J_1 M_1 \rangle = 1 \quad (\text{C.2.10})$$

$$\langle J_1 M_1; J_1 - M_1 | J_1 J_1 00 \rangle = (-1)^{J_1 - M_1} (2J_1 + 1)^{-1/2}. \quad (\text{C.2.11})$$

Kiedy zależy nam na szybkich obliczeniach ze zmianami symetrii współczynników CG bardziej efektywną formą są symbole $3-j$ Wignera zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \equiv (-1)^{J_1 - J_2 - M_3} (2J_3 + 1)^{-1/2} \langle J_1 M_1; J_2 M_2 | J_1 J_2 J_3 - M_3 \rangle. \quad (\text{C.2.12})$$

Ich własności są następujące:

1.

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (\text{C.2.13})$$

2.

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ -M_1 & -M_2 & -M_3 \end{pmatrix} = (-1)^{J_1 + J_2 + J_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_3 & M_2 & M_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2.14})$$

3. Dowolna *parzysta* liczba przestawień kolumn nie zmienia współczynnika $3-j$.

4. Dowolna *nieparzysta* liczba przestawień kolumn zmienia współczynnik $3-j$ o czynnik $(-1)^{J_1 + J_2 + J_3}$.

C.3 Dodawanie trzech momentów pędu. Symbole $6-j$

W obliczeniach związanych ze wzbudzeniami kolektywnymi w jądrach atomowych potrzebne będzie dodanie do siebie trzech komutujących ze sobą momentów pędu. Zaczniemy od dodania J_1 i J_2 tworząc J_{12} a potem dodamy J_3 :

$$\begin{aligned} |(J_1 J_2) J_{12} J_3 J M \rangle &= \sum_{\substack{M_1, M_2 \\ M_3, M_{12}}} |J_1 M_1; J_2 M_2; J_3 M_3 \rangle \langle J_1 M_1; J_2 M_2 | J_1 J_2 J_{12} M_{12} \rangle \cdot \\ &\cdot \langle J_{12} M_{12}; J_3 M_3 | J_{12} J_3 J M \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.3.1})$$

Równoważnym sposobem jest dodanie do siebie J_2 i J_3 a potem J_1 do J_{23} :

$$\begin{aligned} |J_1 (J_2 J_3) J_{23} J M \rangle &= \sum_{\substack{M_1, M_2 \\ M_3, M_{23}}} |J_1 M_1; J_2 M_2; J_3 M_3 \rangle \langle J_2 M_2; J_3 M_3 | J_2 J_3 J_{23} M_{23} \rangle \cdot \\ &\cdot \langle J_1 M_1; J_{23} M_{23} | J_1 J_{23} J M \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.3.2})$$

Oczywiście w ten sposób zawsze otrzymujemy ortonormalną bazę zupełną, ponieważ z własności bazy $|J_1 M_1; J_2 M_2; J_3 M_3 \rangle$ oraz współczynników CG wynika, że:

$$\langle (J_1 J_2) J'_{12} J_3 J' M' | (J_1 J_2) J_{12} J_3 J M \rangle = \delta_{J'_{12}, J_{12}} \delta_{J', J} \delta_{M', M} \quad (\text{C.3.3})$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{J'_{12} \\ J', M'}} |(J_1 J_2) J'_{12} J_3 J' M' \rangle \langle (J_1 J_2) J_{12} J_3 J M | &= \\ &= \sum_{\substack{M_1, M_2 \\ M_3}} |J_1 M_1; J_2 M_2; J_3 M_3 \rangle \langle J_1 M_1; J_2 M_2; J_3 M_3|. \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

Dla drugiej bazy otrzymujemy podobne relacje. To oznacza, że transformacje między bazami są unitarne. Teraz możemy zdefiniować symbole $6-j$:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{ccc} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J & J_{23} \end{array} \right\} &= \frac{(-1)^{J_1+J_2+J_3+J}}{[(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)]} \langle (J_1 J_2) J_{12} J_3 J M | J_1 (J_2 J_3) J_{23} J M \rangle = \\
&= \frac{(-1)^{J_1+J_2+J_3+J}}{[(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)]^{1/2}} \sum_{\substack{M_1, M_2, M_3 \\ M_{12}, M_{23}}} \langle J_1 M_1; J_2 M_2 | J_1 J_2 J_{12} M_{12} \rangle \cdot \\
&\cdot \langle J_{12} M_{12}; J_3 M_3 | J_{12} J_3 J M \rangle \langle J_2 M_2; J_3 M_3 | J_2 J_3 J_{23} M_{23} \rangle \cdot \\
&\cdot \langle J_1 M_1; J_{23} M_{23} | J_1 J_{23} J M \rangle.
\end{aligned} \tag{C.3.5}$$

Elementy macierzowe transformacji nie zależą od M . Z definicji wynika, że symbole $6-j$ są niezmiennicze ze względu na permutacje kolumn i zamianę argumentów górnego z dolnym w kolumnie. Ostatnia przydatna własność symboli $6-j$ to:

$$\begin{aligned}
\sum_{J_{23}, M_{23}} (-1)^{J_1+J_2+J_3+J} [(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J & J_{23} \end{array} \right\} \cdot \\
\cdot \langle J_1 M_1; J_{23} M_{23} | J_1 J_{23} J M \rangle \langle J_2 M_2 J_3 M_3 | J_2 J_3 J_{23} M_{23} \rangle = \\
= \sum_{M_{13}} \langle J_1 M_1; J_2 M_2 | J_1 J_2 J_{12} \rangle \langle J_{12} M_{12} J_3 M_3 | J_{12} J_3 J M \rangle.
\end{aligned} \tag{C.3.6}$$

C.4 Nieprzywiedlne operatory tensorowe i twierdzenie Wignera-Eckarta

Nieprzywiedlny operator tensorowy rzędu K $T(K)$ jest operatorem należącym do zbioru $(2K+1)$ operatorów $T(K, Q)$, $Q \in \{-K \cdots K\}$ związanych z określonym momentem pędu i spełniających następujące relacje komutacyjne:

$$\begin{aligned}
[\hat{K}_3, \hat{T}(K, Q)] &= Q \hat{T}(K, Q) \\
[\hat{K}_\pm, \hat{T}(K, Q)] &= [K(K+1) - Q(Q \pm 1)]^{1/2} \hat{T}(K, Q \pm 1).
\end{aligned} \tag{C.4.1}$$

Zależność od M elementu macierzowego NOT można zapisać jawnie za pomocą współczynnika Clebsha-Gordana:

$$\langle J' M' | \hat{T}(K, Q) | J M \rangle = (-1)^{K-J+J'} \frac{\langle K Q; J M | K J J' M' \rangle}{(2J'+1)^{1/2}} \langle J' || \hat{T}(K) || J \rangle. \tag{C.4.2}$$

gdzie zredukowany element macierzowy $\langle J' || \hat{T}(K) || J \rangle$ nie zależy od Q . To jest treścią twierdzenia Wignera-Eckarta. Dowód twierdzenia można znaleźć w [10] i [6].

Dwa NOT rzędów K_1 i K_2 można złożyć w operator rzędu k na zasadzie identycznej ze składaniem stanów własnych momentu pędu:

$$\hat{T}(K, Q) = \sum_{\substack{Q_1, Q_2 \\ Q_1+Q_2=Q}} \hat{T}_1(K_1, Q_1) \hat{T}_2(K_2, Q_2) \langle K_1 Q_1; K_2 Q_2 | K_1 K_2 K Q \rangle. \tag{C.4.3}$$

Szczególnym przypadkiem jest tutaj iloczyn skalarny dwóch NOT:

$$(2K+1)^{1/2} (-1)^J \hat{X}(0) = \hat{T}(K) \cdot \hat{U}(K) = \sum_K (-1)^K \hat{T}(K, Q) \hat{U}(K-Q). \tag{C.4.4}$$

\hat{X} jest operatorem rzędu zerowego, tak więc komutuje z $\hat{\mathbf{J}}$. Wstawiając tu $\mathbb{1}$ w zupełnej bazie stanów, stosując twierdzenie Wignera-Eckarta i symbol $6-j$ można pokazać, że:

$$\begin{aligned} & \langle J'_1 J'_2 J' M' | \hat{T}(K) \hat{U}(K) | J_1 J_2 J M \rangle = \\ & = (-1)^{J_1 + J'_2 + J} \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} \left\{ \begin{matrix} J & J'_2 & J'_1 \\ K & J_1 & J_2 \end{matrix} \right\} \langle J'_1 | \hat{T}(K) | J_1 \rangle \langle J'_2 | \hat{U}(K) | J_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.4.5})$$

Ta metoda pozwala na zapisanie elementów macierzowych każdego z operatorów w postaci:

$$\begin{aligned} & \langle J'_1 J_2 J' | \hat{T}(K) | J_1 J_2 J \rangle = \\ & = (-1)^{J'_1 + J_2 + J + K} [(2J' + 1)(2J + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} J'_1 & J' & J_2 \\ J & J_1 & K \end{matrix} \right\} \langle J'_1 | \hat{T}(K) | J_1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.4.6})$$

$$\begin{aligned} & \langle J'_1 J_2 J' | \hat{U}(K) | J_1 J_2 J \rangle = \\ & = (-1)^{J_1 + J_2 + J' + K} [(2J' + 1)(2J + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} J'_2 & J' & J_1 \\ J & J_2 & K \end{matrix} \right\} \langle J'_2 | \hat{U}(K) | J_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.4.7})$$

Tutaj oba operatory działają na odpowiednie części funkcji falowej.

D. FUNKCJE SPECJALNE

W rozdziale tym zawarte są jedynie podstawowe wzory i własności użytych w pracy funkcji specjalnych. Szczegółowe wyprowadzenia i dowody można znaleźć w szeroko dostępnej literaturze. Własności harmonik sferycznych, wielomianów Legendre'a i funkcji Bessela pochodzą z [7], natomiast wektorowe harmoniki sferyczne są dobrze omówione w skrypcie online [4].

D.1 Wielomiany Legendre'a i harmoniki sferyczne

Wielomiany Legendre'a $P_l^m(x)$ są rozwiązaniami równania:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0 \quad m, l \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.1.1})$$

Ich unormowaną postać wygodnie jest zapisać za pomocą tzw. wzoru Rodrigueza:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m (l-m)!}{2^l l! (l+m)!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (\text{D.1.2})$$

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Rozwiązania te są zdefiniowane na odcinku $[-1, 1]$, ortogonalne dla różnych m i l oraz istnieją jedynie dla $m \in [-l, l]$. To nasuwa prawidłowe skojarzenia z funkcjami własnymi momentu pędu. Jeżeli zapiszemy operator orbitalnego momentu \hat{L} pędu we współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_y &= i \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

wtedy możemy znaleźć unormowane funkcje własne operatorów \hat{L}^2 i \hat{L}_z w postaci:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (\text{D.1.4})$$

Tworzą one bazę zupełną i ortogonalną:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) &= \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) &= \delta(\phi - \phi') \delta(\theta - \theta'). \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

Ciekawym i użytecznym w naszych rozważaniach wzorem jest wzór sumacyjny dla wielomianu Legendre'a:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (\text{D.1.6})$$

gdzie $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$. Tzn. γ jest kątem pomiędzy jednostkowymi wektorami związanymi z kierunkami (θ, ϕ) oraz (θ', ϕ') .

D.2 Spinorowe harmoniki sferyczne

Istnieją funkcje mające własności jednocześnie spinorów i harmonik sferycznych. Nazywamy je *spinorowymi harmonikami sferycznymi (SHS)*. Umożliwiają one nam analizę pól spinorowych w wydajny sposób. SHS są funkcjami własnymi $\hat{\mathbf{J}}$, \hat{J}_z i $\hat{\mathbf{L}}$, gdzie $\hat{\mathbf{L}}$ oznacza orbitalny, a $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ całkowity moment pędu:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 \mathcal{Y}_{j,l;s}^m &= j(j+1) \mathcal{Y}_{j,l;s}^m \\ \mathcal{L}^2 \mathcal{Y}_{j,l;s}^m &= l(l+1) \mathcal{Y}_{j,l;s}^m \\ \mathcal{J}_3 \mathcal{Y}_{j,l;s}^m &= m \mathcal{Y}_{j,l;s}^m. \end{aligned} \quad (\text{D.2.1})$$

Tworzą one układ ortonormalny:

$$\int \mathcal{Y}_{j,l;s}^{m*} \mathcal{Y}_{j',l';s}^{m'} d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{D.2.2})$$

Konstrukcja ta jest bardzo ogólna i umożliwia nam tworzenie wektorowej harmoniki sferycznej związanej z dowolnym spinem cząstek:

$$\mathcal{Y}_{J,L;s}^M = \sum_{m,m_s} \langle lm; sm_s | l s J M \rangle Y_{l,m}(\Omega_x) \chi_{s,m_s}. \quad (\text{D.2.3})$$

Tutaj χ_{s,m_s} oznacza funkcję własną operatora spinu związaną z wartością własną m_s .

Dla multipletu o spinie 1 (np. dla $\mathbf{e}_{q,\lambda}$ będących funkcjami własnymi \hat{S}^2 i \hat{S}_z operatora spinu postaci¹ $\hat{S}_i \equiv \mathbf{e}_i \times$) możemy je skonstruować z wektorów i zwyczajnych harmonik sferycznych posługując się regułami dodawania momentu pędu:

$$\mathbf{Y}_{J,L}^M = \sum_{m,\lambda} \langle lm 1 \lambda | l 1 J M \rangle Y_{l,m}(\Omega_x) \mathbf{e}_\lambda. \quad (\text{D.2.4})$$

Tak więc $\mathbf{Y}_{J,L}^M \equiv \mathcal{Y}_{J,L;1}^M$. Warto zwrócić uwagę na fakt, że te harmoniki mają dokładnie tyle składowych, ile wymiarów ma reprezentacja użytego do jej konstrukcji spinora. Np. $\mathbf{Y}_{J,L}^M$ ma 3 składowe, stąd "pogrubiony" zapis jak dla wektora.

Harmoniki wektorowe mają następującą postać jawną ([4]):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{j,j}^m &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \left[\hat{\mathbf{L}} Y_{j,m} \right] \\ \mathbf{Y}_{j,j-1}^m &= -\frac{1}{\sqrt{j(2j+1)}} \left[-j \hat{\mathbf{r}} + i \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{L}} \right] Y_{l,m} \\ \mathbf{Y}_{j,j+1}^m &= -\frac{1}{\sqrt{(j+1)(2j+1)}} \left[(j+1) \hat{\mathbf{r}} + i \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{L}} \right] Y_{l,m}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.5})$$

¹ Prosty rachunek pozwala sprawdzić, że to jest rzeczywiście operator spinu dla 3-wymiarowych wektorów [4].

D.3 Sferyczne funkcje Bessela

Sferyczne funkcje Bessela są rozwiązaniem równania:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(kr) = 0 \quad (\text{D.3.1})$$

stanowiącego radialną część równania Helmholtza $(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{x}, \omega) = 0$. Funkcje te dają się wyrazić poprzez zwykłe funkcje Bessela:

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(x) \\ n_l(x) &= \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{1/2} N_{l+1/2}(x) \\ h_l^{(1,2)}(x) &= \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{1/2} [J_{l+1/2}(x) \pm iN_{l+1/2}(x)]. \end{aligned} \quad (\text{D.3.2})$$

Ich unormowana postać daje się zapisać również, jako:

$$\begin{aligned} j_l(x) &= (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ n_l(x) &= -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\cos x}{x} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.3.3})$$

W tej postaci są ortonormalne:

$$\int_0^\infty dr r^2 j_l(r) j_{l'}(r) = \int_0^\infty dr r^2 n_l(r) n_{l'}(r) = \delta_{l,l'}. \quad (\text{D.3.4})$$

Złożone z harmoniką sferyczną dają pełną funkcję sferyczną $f_{l,m}(r, \theta, \phi)$ i rozwiązanie równania Helmholtza w trzech wymiarach. Tworzą wtedy przestrzeń zupełną ortonormalnych rozwiązań.

E. OBLICZENIA POMOCNICZE DOTYCZĄCE KINEMATYKI ROZPRASZANIA

Większość obliczeń zaprezentowanych w tym rozdziale bazuje na [11].

E.1 Tensor jądrowy i funkcje struktury

Chcielibyśmy znaleźć najbardziej ogólną postać tensora jądrowego dla procesów rozpraszania elektronów na jądrze. Możemy założyć, że składa się ona z kilku funkcji skalarnych zależnych od Lorentzowskich niezmienników $p^2, p \cdot q, q^2$ pomnożonych przez kombinacje czterowektorów. Funkcje te nazywamy *funkcjami struktury*. Najprostszy i naturalny wybór niezmienników i czterowektorów jest związany z pędami obiektów biorących udział w procesie, dlatego też:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= W_1 g_{\mu\nu} + W_2 \frac{p_\mu p_\nu}{M_T^2} + A \frac{q_\mu q_\nu}{M_T^2} + B \frac{1}{M_T^2} (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + \\ &+ C \frac{1}{M_T^2} (p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu). \end{aligned} \quad (\text{E.1.1})$$

Możliwe, że nie wszystkie funkcje struktury są niezależne. Żeby to sprawdzić korzystamy z zachowania prądu i mnożymy tensor jądrowy przez q^μ i q^ν .

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} q^\nu &= W_1 q_\mu + W_2 \frac{p_\mu (p \cdot q)}{M_T^2} + A q_\mu \frac{q^2}{M_T^2} + B \frac{1}{M_T^2} (q^2 p_\mu + (q \cdot p) q_\mu) + \\ &+ C \frac{1}{M_T^2} (q^2 p_\mu - (q \cdot p) q_\mu) = 0 \\ W_{\mu\nu} q^\mu &= W_1 q_\nu + W_2 \frac{p_\nu (p \cdot q)}{M_T^2} + A q_\nu \frac{q^2}{M_T^2} + B \frac{1}{M_T^2} (q^2 p_\nu + (q \cdot p) q_\nu) + \\ &+ C \frac{1}{M_T^2} ((q \cdot p) q_\nu - q^2 p_\nu) = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.1.2})$$

Wektory p_μ i q_μ są niezależne, więc dla członów zawierających p_μ i q_μ współczynniki powinny się kasować niezależnie.

$$\begin{aligned}
W_1 + A \frac{q^2}{M_T^2} + B \frac{p \cdot q}{M_T^2} + C \frac{p \cdot q}{M_T^2} &= 0 \\
W_2 \frac{p \cdot q}{M_T^2} + B \frac{q^2}{M_T^2} - C \frac{p \cdot q}{M_T^2} &= 0 \\
W_1 + A \frac{q^2}{M_T^2} + B \frac{p \cdot q}{M_T^2} - C \frac{p \cdot q}{M_T^2} &= 0 \\
W_2 \frac{p \cdot q}{M_T^2} + B \frac{q^2}{M_T^2} + C \frac{q^2}{M_T^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{E.1.3}$$

Ten układ równań dowodzi, że niektóre z tych członów nie są niezależne:

$$\begin{aligned}
A &= -W_1 \frac{M_T^2}{q^2} + W_2 \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 \\
B &= -W_2 \frac{p \cdot q}{q^2} \\
C &= 0.
\end{aligned} \tag{E.1.4}$$

stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu} &= W_1 (q^2, q \cdot p) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \\
&+ W_2 (q^2, q \cdot p) \frac{1}{M_T^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right).
\end{aligned} \tag{E.1.5}$$

E.2 Przekrój czynny- ogólna postać

Tutaj umieszczono część obliczeń związanych z przekrojem czynnym ze względu na przejrzystość głównego toku rozumowania. Rozpoczynamy obliczenia ze wzoru:

$$d\sigma = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\sqrt{(k \cdot p)^2}} \frac{e^4}{q^{\mu 4}} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \frac{d^3 k'}{E_{k'}}. \tag{E.2.1}$$

Zakładamy, że w układzie laboratoryjnym jądro spoczywa ($p^\mu = (M_T, \mathbf{0})$). Wtedy $\frac{1}{\sqrt{(k \cdot p)^2}} = \frac{1}{E_k M}$. Wzór na przekrój czynny przyjmie wtedy postać:

$$\sigma = \int d^3 k' \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{1}{(2\pi)^2 E_k E_{k'}} \frac{1}{M_T} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \tag{E.2.2}$$

Przypominamy ogólną postać tensora jądrowego:

$$W_{\mu\nu} = W_1 \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{W_2}{M_T^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \tag{E.2.3}$$

oraz leptonowego (2.1.12):

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k \cdot k'). \tag{E.2.4}$$

Podstawiamy to do wzoru na przekrój czynny:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{M_T} \int d^3k' \frac{e^4}{q^{\mu 4}} \frac{1}{(2\pi)^2 E_k E_{k'}} \left\{ W_1(q^2, q \cdot p) k \cdot k' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{M_T^2} W_2(q^2, q \cdot p) \left[(k \cdot p)(k \cdot p') - \frac{1}{2} p^2 k \cdot k' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.2.5})$$

Używając relacji $q_\mu = k_\mu - k'_\mu$ i wykonując pewne przekształcenia algebraiczne można znacznie uprościć nasze równanie:

$$\begin{aligned} q^2 &= E_k^2 + E_{k'}^2 - 2E_k E_{k'} - \mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \Theta = -4E_k E_{k'} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (\text{E.2.6}) \\ p &= (M_T, \mathbf{0}), \quad p^2 = M_T^2 \\ q^{\mu 4} &= 16(E_k E_{k'})^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}, \quad p \cdot k_i = M_T E_i \\ k \cdot k' &= E_k E_{k'} - E_k E_{k'} \cos \Theta = 2E_k E_{k'} \sin^2 \frac{\Theta}{2}. \end{aligned}$$

W naszej notacji $q^2 < 0$! Podstawmy te zależności do przekroju czynnego:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d^3k' \frac{e^4}{16M_T (E_k E_{k'})^3 \sin^4 \frac{\Theta}{2} (2\pi)^2} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ 2E_k E_{k'} \sin^2 \frac{\Theta}{2} W_1 + W_2 \left(E_k E_{k'} - E_k E_{k'} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right) \right\} = \\ &= \int d^3k' \frac{e^4}{16M_T (E_k E_{k'})^3 \sin^4 \frac{\Theta}{2} (2\pi)^2} \left\{ 2W_1 E_k E_{k'} \sin^2 \frac{\Theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.2.7})$$

Standardowo oznaczamy stałą struktury subtelnej, jako:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (\text{E.2.8})$$

i przekrój Motta:

$$\sigma_{Mott} = \sigma_M = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}}{4E_k^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \quad (\text{E.2.9})$$

W ten sposób dostajemy wzór na przekrój czynny w zwartej formie:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{\sigma_M}{M_T} \left(W_2 + 2W_1 \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right). \quad (\text{E.2.10})$$

To wyrażenie jest bardzo ogólne i prawdziwe dla wszystkich przypadków, w których obserwuje się jedynie końcowy pęd elektronów. Oznacza to, że można je stosować nawet do rozpraszania nieelastycznego. Taki sam wzór otrzymano w [11].

E.3 Dyskusja tensora jądrowego dla rozpraszania kwazielastycznego

Tensor jądrowy dla procesów inkluzywnych ma postać:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \sum_X \delta(E_X - E_i - \nu) \overline{\sum_{h.s.} \frac{(2\pi)^3}{V}} \langle X | \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\mu(\mathbf{x}) | i \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \langle X | \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\nu(\mathbf{x}) | i \rangle^* E_i. \end{aligned} \quad (\text{E.3.1})$$

Ten tensor nadal spełnia zasadę zachowania prądu (2.1.15). Argument jest następujący: własności transformacyjne tensora leptonowego i reszty pozostałych czynników nie uległy zmianie a przekrój czynny nadal jest lorentzowskim skalarem. Pomimo, że wewnętrzna struktura obiektu ulega zmianie to brak pomiaru dodatkowych stopni swobody układu oznacza, że musi on mieć te same własności transformacyjne, co $W_{\mu\nu}$ dla rozpraszania elastycznego. W wypadku przekroju kwazielastycznego (stan końcowy składa się z jądra i wybitego nukleonu o określonych pędach p'_j i p_n), tensor ten ma postać:

$$W_{\mu\nu} = \overline{\sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{końcowe}}}} \int d^3 p'_j d^3 p_n \delta(E'_j + E'_n - E_i - \nu) \overline{\sum_{\substack{\text{spiny} \\ \text{jądra}}}} \frac{(2\pi)^3}{V} \cdot \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\mu(\mathbf{x}) | i \rangle \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\nu(\mathbf{x}) | i \rangle^* E_i. \quad (\text{E.3.2})$$

Zgodnie z założeniami wykonujemy tutaj uśrednienie po spinach stanu końcowego. Stan $|X\rangle$ zapisać można jako:

$$|X\rangle = |p'_j, p_n\rangle \quad (\text{E.3.3})$$

i jest on stanem o określonym pędzie $p_n + p'_j$. W celu uzyskania bardziej "przyjaznej" do obliczeń postaci tensora jądrowego należy dokonać kilku przekształceń. Najpierw przegrupujemy sumy po stopniach swobody układu jądro+ wybity nukleon:

$$W_{\mu\nu} = \int d^3 p_n \int d^3 p'_j \delta(E'_j + E'_n - E_i - \nu) \cdot \overline{\sum_{\text{spiny}}} \left(\frac{E_i (2\pi)^3}{V} \right)^{1/2} \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\mu(\mathbf{x}) | i \rangle \cdot \overline{\sum_{\text{spiny}}} \left(\frac{E_i (2\pi)^3}{V} \right)^{1/2} \langle X | \int d^3 x e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{J}_\nu(\mathbf{x}) | i \rangle^*. \quad (\text{E.3.4})$$

Przeprowadzimy teraz analizę liczby stopni swobody różniczkowego przekroju czynnego. Końcowe stany jądra, nukleonu i rozproszonego elektronu dają 9 stopni swobody związanych z kinematyką + stopnie spinowe. Cztery stopnie swobody kinematyczne dają się wyeliminować z zasad zachowania energii i pędu (bądź też zachowania energii i reguł wyboru momentu pędu- tę bazę będziemy głównie rozważać w naszych obliczeniach). Za pozostałe 5 najwygodniej wybrać przekaz energii ν (1 stopień swobody), kąt rozproszenia elektronu Ω (2 stopnie swobody) i kąt rozproszenia nukleonu Ω_p (ostatnie 2 stopnie). Całkę po energii nukleonu można wykonać używając delty Diraca związanej z zasadą zachowania energii. Tensor jądrowy przyjmuje wówczas postać:

$$W_{\mu\nu} = R \overline{\sum_i} \sum_f \int p_f^2 d\Omega_{p_f} J_\mu(\mathbf{q}) J_\nu(\mathbf{q})^*. \quad (\text{E.3.5})$$

Sumy w tym wzorze oznaczają, że uśredniamy po stanach początkowych jądra (w bazie momentu pędu $\overline{\sum_i} \equiv \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i}$) i sumujemy po końcowych układu jądro + nukleon ($\sum_f \equiv \sum_{J_f, M_f}$). Prąd jądrowy zapisano, jako:

$$J_\mu(\mathbf{q}) = \langle f | \int d^3 x \hat{J}_\mu(\mathbf{x}) | i \rangle. \quad (\text{E.3.6})$$

Patrząc się kolejny raz na stopnie swobody w równaniu (E.3.5) widzimy, że wszystko się sumuje do sześciu z ogólnej liczby dziewięciu stopni¹: prawa strona zawiera całkę po 2, 4 odpadają z zasad zachowania. Elementy macierzowe liczone są teraz pomiędzy stanem początkowym $|i\rangle$ a kolektywnym stanem końcowym jądro+ nukleon $|f\rangle$. Może on posiadać określony pęd sumaryczny p_f^μ lub też (bardziej użyteczne przy opisie wzbudzeń kolektywnych, które są głównym celem tej pracy) z nukleonu o pędzie p_f i i spinie s oraz jądra resztkowego o momencie pędu opisanym liczbami kwantowymi J_r, M_r . Całość daje się złożyć w funkcję własną momentu pędu o liczbach kwantowych J, M . Wtedy oprócz całki po kącie bryłowym występuje suma po dozwolonych stanach momentu pędu. Na mocy dyskusji normalizacji w dodatku A.4 baza stanów momentu pędu nie generuje czynników $\frac{1}{V}$ podczas obliczeń. Wykonując część całek i absorbując wiele czynników z równania (E.3.4) do elementów $J_\mu(\mathbf{q})$ otrzymaliśmy o wiele bardziej zwartą i czytelną postać tensora jądrowego. Przez R oznaczamy odrzut jądra, obliczony dla przykładu w rozpraszaniu elastycznym do stanów wzbudzonych w dodatku E.4. Jego postać to:

$$R^{-1} = \left[1 + \frac{2E_k \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{M_T} \right]. \quad (\text{E.3.7})$$

E.4 Rozpraszanie do stanów wzbudzonych- współczynnik odrzutu

Najprostszy przypadek takiego rozpraszania to proces elastyczny, w którym jądro po oddziaływaniu przechodzi w stan wzbudzony. Sytuacja ta charakteryzuje się zmianą masy spoczynkowej jądra: $M_T \rightarrow M_T' \geq M_T$ (w układzie spoczynkowym jądra).

$$q^\mu = (k - k')^\mu = (\nu, \mathbf{q}) \quad (\text{E.4.1})$$

$$E_{p'} = \sqrt{M_T'^2 + \mathbf{p}'^2} = M_T + \nu. \quad (\text{E.4.2})$$

Użyjemy tej samej metody, co przy obliczeniu przekroju czynnego, tylko tym razem musimy uwzględnić zmianę masy. Technika ta została przedstawiona w [11]. Całka po $E_{k'}$ może zostać obliczona za pomocą energetycznej delty Diraca.

$$\begin{aligned} \int dE_{k'} \delta(E_{p'} - M_T - \nu) &= \int dE_{k'} \delta(W_f - W_i) = \\ &= \int dW_f \delta(W_f - W_i) \frac{\partial E_{k'}}{\partial W_f} = \frac{\partial E_{k'}}{\partial W_f}. \\ W_i &= \sum E_i = M_T + \nu \\ W_f &= \sum E_f = E_{k'} + E_{p'}. \end{aligned} \quad (\text{E.4.3})$$

Do ukończenia obliczeń potrzebny jest nam Jakobian.

$$\begin{aligned} W_f &= \sqrt{\mathbf{p}'^2 + M_T'^2} + E_{k'} = \left[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + M_T^{*2} \right]^{1/2} + E_{k'} = \\ &= \left[E_k^2 + E_{k'}^2 - 2E_k E_{k'} \cos \Theta + M_T^{*2} \right]^{1/2} + E_{k'}. \end{aligned} \quad (\text{E.4.4})$$

¹ W tensorze jądrowym nie ma stopni związanych z elektronem- różniczkujemy całkę po energii i kącie bryłowym rozproszanego elektronu.

Różniczkowanie po $E_{k'}$ da się wykonać z wykorzystaniem zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_f}{\partial E_{k'}} &= \frac{E_{k'} - E_k \cos \theta}{E_{p'}} + 1 = \frac{E_{k'} + E_{p'} - E_k \cos \Theta}{E_{p'}} = \\ &= \frac{M_T + E_k (1 - \cos \Theta)}{E_{p'}} = \frac{M_T}{E_{p'}} \left[1 + \frac{2E_k \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)}{M_T} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4.5})$$

Wielkość w nawiasie jest odwrotnością *czynnika odrzutu* (w przypadku, gdy masa jądra jest dużo większa od przekazu energii, czynnik ten można zaniedbać):

$$R^{-1} = \left[1 + \frac{2E_k \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)}{M_T} \right]. \quad (\text{E.4.6})$$

Nasz Jakobian przyjmuje postać:

$$\frac{\partial E_{k'}}{\partial W_f} = \frac{E_{p'}}{M_T} r. \quad (\text{E.4.7})$$

Możemy też zmienić definicje jądrowych elementów macierzowych:

$$W_i(q^2, q \cdot p) = w_i(q^2) \frac{M_T^2}{E_{p'}} \delta(p_0 - p'_0 + q_0). \quad (\text{E.4.8})$$

Zależą one jedynie od q^2 a przekrój czynny przyjmuje postać:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{wzbudzenia}}} = \sigma_{Mott} \left(w_2 + 2w_1 \tan^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right) R. \quad (\text{E.4.9})$$

Tutaj nasuwa się pytanie, czy $w_{\mu\nu}$ jest nadal tensorem. Czynniki $\frac{M_T^2}{E_{p'}} \delta(p_0 - p'_0 - q_0)$ jest Lorentzowskim skalarem (stany in i out są zawsze na powłoce masy) tak więc $w_{\mu\nu}$ jest dobrym tensorem. Przy tych założeniach jawna postać tensora jądrowego jest następująca:

$$w_{\mu\nu}(q^2) = \overline{\sum_i} \sum_f \frac{E_p E_{p'}^f}{M_T^2} (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}) \langle i | \hat{J}_\nu(0) | f \rangle \langle f | \hat{J}_\mu(0) | i \rangle. \quad (\text{E.4.10})$$

Cały efekt zmiany masy został zaabsorbowany w prosty sposób do tensora jądrowego. W celu otrzymania przekroju całkowitego należy wysumować wkłady od wszystkich dozwolonych wzbudzeń jądra. Trudności mogą pojawić się w momencie, kiedy potrzebujemy konkretnego modelu jądra. Masy stanów wzbudzonych są wyznaczone doświadczalnie, ale funkcje falowe i rzeczywiste poziomy energetyczne są trudne do odtworzenia. W przypadku rozpraszania inkluzywnego można postąpić w podobny sposób. Jeżeli interesujemy się sytuacją, w której nie obserwujemy stanu końcowego wybitego do kontinuum nukleonu można z ogólnych zasad zachowania uzyskać analogiczny wzór:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega d\nu_{\text{inkluzywny}}} &= \sigma_M \sum_{\text{wzbudzenia}} \left(W_2 + 2W_1 \tan^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right) R + \\ &+ \sigma_M \sum_{\text{kontinuum}} \left(W_2 + 2W_1 \tan^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right) R. \end{aligned} \quad (\text{E.4.11})$$

Tutaj mamy więcej stopni swobody, tak więc zasady zachowania pozwalają obliczyć jedynie $\frac{d\sigma}{d\Omega d\nu}$ (więcej szczegółów w dodatku E.3 i w rozdziale 2.2). Tensor jądrowy dla stanów w kontinuum zawiera dodatkowe całkowanie po kącie bryłowym uciekającego nukleonu. Problem stanowi obliczenie $\langle f | \hat{J}_\mu | i \rangle$ i w tym celu musimy zapostulować konkretny model jądra.

E.5 Rozwinięcie operatorów \hat{J}_{\pm} w bazie NOT.

Ta analiza doprowadzi nas do redukcji operatora przejścia do zbioru NOT. Została przedstawiona ze szczegółami w [11]. Rozważania są dość skomplikowane ze względów technicznych. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, potrzebna nam jest transformacja z bazy fal płaskich do bazy funkcji sferycznych. ogólny wzór na rozwinięcie $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$ w tej bazie wygląda następująco:

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qr) Y_{l0}(\Omega_x). \quad (\text{E.5.1})$$

Koniecznym staje się wprowadzenie kilku funkcji specjalnych: sferycznych funkcji Bessela $j_l(kr)$ i harmonik sferycznych (omówionych w dodatku D). W całce fourierowskiej opisującej operator prądu występują kombinacje dwóch obiektów: eksponenty $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$ oraz wektora polaryzacji wirtualnego fotonu \mathbf{e}_{λ} . Żeby zwinąć rozwinięcie $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$ z \mathbf{e}_{λ} w funkcję własną momentu pędu trzeba użyć definicji spinorowych harmonik sferycznych opisanych w dodatku D.2 a konkretnie wektorowych harmonik sferycznych opisanych równaniem (D.2.4). Używając odwracalności transformacji opisanej tym równaniem otrzymujemy:

$$Y_{l,m}(\Omega_x) \mathbf{e}_{\lambda} = \sum_{J,M} \langle lm1\lambda | l1JM \rangle \mathbf{Y}_{J,L}^M. \quad (\text{E.5.2})$$

Co umożliwia rozpisanie funkcji podcałkowej w postaci:

$$\mathbf{e}_{q,\lambda} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = \sum_l \sum_J i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qr) \langle lm1\lambda | l1JM \rangle \mathbf{Y}_{J,L}^M. \quad (\text{E.5.3})$$

Ta suma wydaje się być skomplikowana, ale reguły wyboru momentu pędu pozostawiają jedynie elementy z $J = l$ i $J = l \pm 1$. Stąd też podstawiając jawną postać współczynników Clebsha- Gordana otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{q,\lambda} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} &= \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \left\{ -\lambda j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J+1}^{\lambda}(\Omega) + \right. \\ &\left. - i \left[\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(qx) \mathbf{Y}_{J,J-1}^{\lambda}(\Omega) - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(qx) \mathbf{Y}_{J,J+1}^{\lambda}(\Omega) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.5.4})$$

Do dalszych obliczeń potrzebne będą pewne wzory matematyczne. Pierwszy z nich definiuje rotację z iloczynu WHS z funkcją zależną od r:

$$\begin{aligned} i\mathbf{\nabla} \times (\mathbf{Y}_{j,j}^m f(r)) &= \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left[(j+1) \frac{f}{r} + \frac{df}{dr} \right] \mathbf{Y}_{j,j-1}^m + \\ &+ \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left[-j \frac{f}{r} + \frac{df}{dr} \right] \mathbf{Y}_{j,j+1}^m. \end{aligned} \quad (\text{E.5.5})$$

Drugi z nich określa operatory podnoszące i opuszczające indeks sferycznych funkcji Bessela (odpowiednik operatorów "drabinkowych" kwantowego oscylatora harmonicznego):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right) j_J(r) &= -j_{J+1}(r) \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right) j_J(r) &= j_{J-1}(r). \end{aligned} \quad (\text{E.5.6})$$

Zastosowanie tych wzorów przekształci (E.5.4) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{q,\lambda} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} &= \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \left\{ -\lambda j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda(\Omega) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{q} \nabla \times [j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda(\Omega)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.5.7})$$

Te równania zmieniają się w trywialny sposób wraz ze zmianą polaryzacji fotonu, ponieważ:

$$\mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda = -(-1)^\lambda \mathbf{Y}_{J,J;1}^{-\lambda}(\Omega). \quad (\text{E.5.8})$$

Dzięki tym matematycznym przekształceniom otrzymujemy rozwinięcie operatorów prądu jądrowego w bazie NOT:

$$\int \mathbf{e}_{q,\lambda} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \mathbf{J}(x) d^3x = \sum_{J \geq 1} (-i)^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \left[-\hat{T}_{J,-\lambda}^{el}(q) + \lambda \hat{T}_{J,-\lambda}^{mag}(q) \right]. \quad (\text{E.5.9})$$

Operatory elektryczne i magnetyczne zdefiniowane są w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{J,\lambda}^{el}(q) &= \frac{1}{q} \int [\nabla \times j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda(\Omega)] \hat{\mathbf{J}}(x) d^3x \\ \hat{T}_{J,\lambda}^{mag}(q) &= \int j_J(qx) \mathbf{Y}_{J,J;1}^\lambda(\Omega) \hat{\mathbf{J}}(x) d^3x. \end{aligned} \quad (\text{E.5.10})$$

E.6 Rozwinięcie multipolowe elementów macierzowych operatora gęstości $\hat{\rho}(\mathbf{x})$

Dla operatora J_0 stosujemy następujące rozwinięcie:

$$\begin{aligned} & \overline{\sum_i} \sum_f \left| \langle i | \int d^3x e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \hat{\rho}(x) | f \rangle \right|^2 = \\ & = \overline{\sum_i} \sum_f \left| \langle i | \int d^3x \sum_J (i)^J \sqrt{4\pi(2J+1)} j_J(kx) Y_{J0}(\Omega) \hat{\rho}(x) | f \rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{E.6.1})$$

Żeby zapisać to równanie w dobrej multipolowej formie należy użyć pewnych własności harmonik sferycznych i wielomianów Legendre'a:

$$\begin{aligned} Y_{JM}(\Theta, \Phi) &= \sqrt{\frac{(2J+1)(J-M)!}{4\pi(J+M)!}} P_{JM}(\cos \Theta) e^{iM\Phi} \\ P_{J0}(\cos \alpha) &= \frac{4\pi}{2J+1} \sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\Theta', \phi') Y_{JM}(\Theta, \phi); \quad \alpha = \angle(\mathbf{e}_{\Theta, \phi}, \mathbf{e}_{\Theta', \phi'}) \\ Y_{JM}(0, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{E.6.2})$$

To pozwala nam obliczyć poszukiwane rozwinięcie multipolowe:

$$\begin{aligned}
 & \overline{\sum}_i \sum_f \left| \langle i | \int d^3x e^{iqx} \hat{\rho}(x) | f \rangle \right|^2 = \tag{E.6.3} \\
 & = \overline{\sum}_i \sum_f \left| \langle i | \int d^3x \hat{\rho}(x) \sum_{JM} (i)^J (2J+1) j_J(qx) \frac{4\pi}{2M+1} Y_{JM}(\Omega) | f \rangle \right|^2 = \\
 & = \overline{\sum}_i \sum_f \left| \sum_{JM} (i)^J 4\pi \langle M_f J_f | \hat{T}_{JM}^c | J_i M_i \rangle \right|^2 = \\
 & = \frac{4\pi}{2J_i+1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left| \sum_J \frac{(-1)^{J_i-M_i}}{\sqrt{2J+1}} \langle J_f M_f J_i - M_i | J_f J_i J M \rangle \langle J_f || \hat{M}_J^c || J_i \rangle \right|^2 = \\
 & = \frac{4\pi}{2J_i+1} \left| \sum_J \frac{(-1)^{J_i-M_i}}{\sqrt{2J+1}} \langle J_f || \hat{M}_J^c || J_i \rangle \right|^2.
 \end{aligned}$$

Tutaj zdefiniowano \hat{M}_J :

$$\hat{M}_{JM} = \int d^3x \hat{\rho}(x) j_J(qx) Y_{JM}(\Omega). \tag{E.6.4}$$

E.7 Całka po kącie emisji nukleonu. Moment pędu a obroty przestrzenne

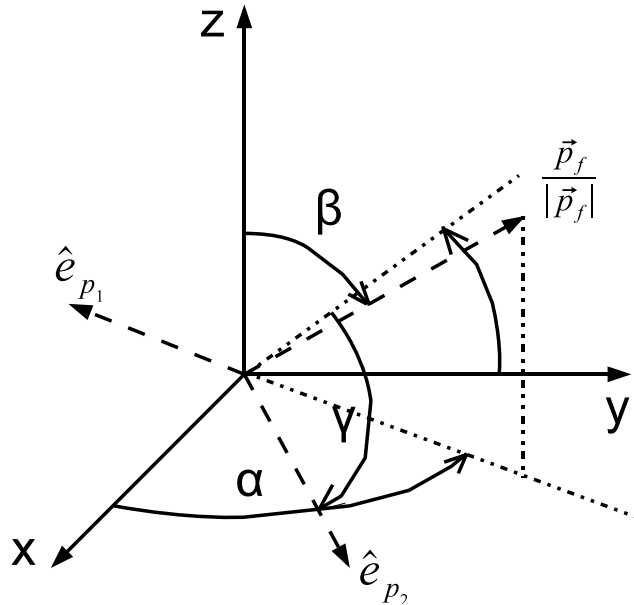


Fig. E.1: Obrót osi emisji nukleonu względem układu laboratoryjnego.

Chcemy wykonać końcową całkę po kącie bryłowym emisji nukleonu w celu uzyskania końcowej formy funkcji postaci.

$$\int d\Omega_n \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left| \sum_J (-i)^J \sqrt{2J+1} \langle J_f M_f(\Omega_n) | \hat{T}_{JM}(q) | J_i M_i(\Omega_n) \rangle \right|^2 = \quad (E.7.1)$$

$$= ?$$

To zagadnienie wymaga rozpatrzenia ogólnej własności rotacji stanów własnych operatora momentu pędu, co zostało zaprezentowane w jednym z rozdziałów [11]. Załóżmy, że układem odniesienia będzie układ laboratoryjny, a obracać będziemy kątami emisji nukleonu. Najpierw musimy znaleźć operator łączący stany własne operatorów momentu pędu w dwóch układach obróconych względem siebie o kąt β . Analizując własności komutacji operatorów momentu pędu można wykazać, że obrót ten realizowany jest przez operator $\hat{R}_{-\beta} \equiv e^{-i\beta \hat{J}_y}$. Dowód można przeprowadzić robiąc obrót osi i patrząc się, co się stanie np. z \hat{J}_z . Osie nowego układu są połączone ze starym poprzez równanie:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{z'} &= \mathbf{e}_z \cos \beta + \mathbf{e}_x \sin \beta \\ \mathbf{e}_{z'} \hat{\mathbf{J}} &= \hat{J}_z \cos \beta + \hat{J}_x \sin \beta. \end{aligned} \quad (E.7.2)$$

Używając reguł komutacyjnych operatorów momentu pędu można pokazać, że

$$\begin{aligned} e^{-i\beta \hat{J}_y} \hat{J}_z e^{i\beta \hat{J}_y} &= \hat{J}_z + (-i\beta) [\hat{J}_y, \hat{J}_z] + \frac{(-i\beta)^2}{2!} [\hat{J}_y, [\hat{J}_y, \hat{J}_z]] + \dots \\ [\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k \end{aligned} \quad (E.7.3)$$

skąd w prosty sposób wynika relacja:

$$\begin{aligned} e^{-i\beta \hat{J}_y} \hat{J}_z e^{i\beta \hat{J}_y} &= \hat{J}_z \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \dots \right) + \hat{J}_x \left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \hat{J}_z \cos \beta + \hat{J}_x \sin \beta = \\ &= \mathbf{e}_{z'} \hat{\mathbf{J}}. \end{aligned} \quad (E.7.4)$$

Stąd też wynika następująca identyczność:

$$(\mathbf{e}_{z'} \hat{\mathbf{J}}) e^{-i\beta \hat{J}_y} = \hat{J}_{z'} e^{-i\beta \hat{J}_y} = e^{-i\beta \hat{J}_y} \hat{J}_z. \quad (E.7.5)$$

Działając tym operatorem na stan własny momentu pędu $|JM\rangle$ otrzymujemy:

$$(\mathbf{e}_{z'} \hat{\mathbf{J}}) [e^{-i\beta \hat{J}_y} |JM\rangle] = M [e^{-i\beta \hat{J}_y} |JM\rangle]. \quad (E.7.6)$$

Znaleźliśmy więc sposób na obracanie stanów własnych i operatorów multipolowych względem wybranej osi układu współrzędnych.

Jak obrócić teraz stan $|J_f M_f\rangle$ skwantowany wzdłuż osi układu emisji nukleonu do stanu $|J_f M_f(\Omega_n)\rangle$ skwantowanego w układzie laboratoryjnym. Trzeba wykonać 3 obroty Eulera:

1. $-\alpha$ wokół \mathbf{e}_{p_f}
 2. $-\beta$ wokół \mathbf{e}_{p_2}
 3. $-\gamma$ wokół \mathbf{e}_{p_f}
- (E.7.7)

gdzie $\mathbf{e}_{\mathbf{p}_2}$ wyznacza oś y układu emisji nukleonu. Operatorem, który spełni to zadanie jest:

$$\hat{R}_{+\alpha,+\beta,+\gamma} = \exp \left\{ i\gamma \hat{J}_3 \right\} \exp \left\{ i\beta \hat{J}_2 \right\} \exp \left\{ i\alpha \hat{J}_3 \right\}. \quad (\text{E.7.8})$$

Osie $\{2, 3\}$ są teraz ustalonymi w laboratorium osiami $\{\mathbf{e}_{\mathbf{p}_f}, \mathbf{e}_{\mathbf{p}_2}\}$. Tak więc:

$$|J_f M_f(\Omega_n)\rangle = \hat{R}_{\gamma,\beta,\alpha} |J_i M_i\rangle = \sum_{M_k} \mathcal{D}_{M_k M_i}^{J_f} |J_f M_k\rangle. \quad (\text{E.7.9})$$

Wprowadziliśmy macierze rotacji $\mathcal{D}_{M_k M_i}^{J_i}$, które charakteryzują zachowanie stanów własnych momentu pędu pod wpływem obrotów. Możliwość takiego podstawienia wynika bezpośrednio z własności nieprzywiedlnych operatorów tensorowych (dodatek C.4). Najpierw przyglądamy się relacjom komutacyjnym NOT z operatorami momentu pędu:

$$\left[\hat{J}_i, \hat{T}_{J,M}(q) \right] = \sum_{M'} \langle JM' | \hat{J}_i | JM \rangle \hat{T}_{J,M'}(q). \quad (\text{E.7.10})$$

Analogiem tego równania jest transformacja ciągła:

$$\hat{R}_{\alpha,\beta,\gamma} \hat{T}_{J,M}(q) \hat{R}_{\alpha,\beta,\gamma}^{-1} = \sum_{M'} \mathcal{D}_{MM'}^J(\alpha\beta\gamma) \hat{T}_{J,M'}(q), \quad (\text{E.7.11})$$

gdzie:

$$\mathcal{D}_{MM'}^J(\alpha\beta\gamma) = \langle JM' | \exp \left\{ i\gamma \hat{J}_3 \right\} \exp \left\{ i\beta \hat{J}_2 \right\} \exp \left\{ i\alpha \hat{J}_3 \right\} | JM \rangle. \quad (\text{E.7.12})$$

Taki sam tok rozumowania jest prawdziwy dla rotacji stanów własnych. Istnieje jeszcze zespolona faza związana z dowolnym kątem obrotu osi $\mathbf{e}_{\mathbf{p}_2}$ i $\mathbf{e}_{\mathbf{p}_2}$ wokół $\mathbf{e}_{\mathbf{p}_f}$, ale podczas obliczania kwadratu modułów elementów macierzowych i tak by znikła. Dlatego też możemy ją pominąć.

Elementy macierzowe operatorów multipolowych przejść promienistych związanych z transmisją fotonu o polaryzacji λ transformują się w następujący sposób:

$$\langle J_f M_f(\Omega_n) | \hat{T}_{J,-\lambda}(q) | J_i M_i(\Omega_n) \rangle = \langle J_f M_f | \hat{R}_{\gamma,\beta,\alpha}^{-1} \hat{T}_{J,-\lambda}(q) \hat{R}_{\gamma,\beta,\alpha} | J_i M_i \rangle. \quad (\text{E.7.13})$$

Z własności operatorów rotacji możemy otrzymać równość:

$$\hat{R}_{\gamma,\beta,\alpha}^{-1} = \hat{R}_{-\alpha,-\beta,-\gamma}. \quad (\text{E.7.14})$$

Wykorzystanie własności NOT daje nam wynik:

$$\hat{R}_{-\alpha,-\beta,-\gamma} \hat{T}_{J,-\lambda}(q) \hat{R}_{-\alpha,-\beta,-\gamma}^{-1} = \sum_{M'} \mathcal{D}_{M',-\lambda}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma) \hat{T}_{J,M'}(q). \quad (\text{E.7.15})$$

Ostatecznie reguła transformacyjna elementów macierzowych dla wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \langle J_f M_f(\Omega_n) | \hat{T}_{J,-\lambda}(q) | J_i M_i(\Omega_n) \rangle &= \quad (\text{E.7.16}) \\ &= \sum_{M'} \mathcal{D}_{M',-\lambda}^J(-\alpha, -\beta, -\gamma) \langle J_f M_f | \hat{T}_{J,M'}(q) | J_i M_i \rangle. \end{aligned}$$

Chcemy teraz zastąpić kąty Eulera kątami emisji nukleonu w układzie laboratoryjnym. Okazuje się, iż:

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv \phi_n \\ \beta &\equiv \theta_n \\ \gamma &\equiv -\phi_n.\end{aligned}\tag{E.7.17}$$

Znając argument macierzy obrotu możemy wykonać w końcu całkę (E.7.1):

$$\begin{aligned}\int d\Omega_n \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left| \sum_J (-i)^J \sqrt{2J + 1} \langle J_f M_f(\Omega_n) | \hat{T}_{JM}(q) | J_i M_i(\Omega_n) \rangle \right|^2 &= \\ &= \int d\Omega_n \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \sum_{M_1, M_2} \sum_J (2J + 1) \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{D}_{M_1, -\lambda}^J(-\phi_n, -\theta_n, \phi_n) \langle J_f M_f | \hat{T}_{J, M_1}(q) | J_i M_i \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{D}_{M_2, -\lambda}^J(-\phi_n, -\theta_n, \phi_n)^* \langle J_f M_f | \hat{T}_{J, M_2}(q) | J_i M_i \rangle^*.\end{aligned}\tag{E.7.18}$$

Reguły ortogonalności macierzy obrotu w naszej konwencji są następujące:

$$\int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathcal{D}_{M, -\lambda}^J(-\phi, -\Theta, \phi)^* \mathcal{D}_{M', -\lambda}^{J'}(-\phi, -\Theta, \phi) = \frac{4\pi}{2J + 1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}.\tag{E.7.19}$$

Możemy to wstawić do naszej całki i zastosować twierdzenie Wignera-Eckarta:

$$\begin{aligned}\int d\Omega_n (\dots) &= \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_{J, M} \sum_{M_i, M_f} \left| \langle J_f M_f(\Omega_n) | \hat{T}_{JM}(q) | J_i M_i(\Omega_n) \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \sum_{J, M} \frac{1}{(2J + 1)} \left| \langle J_f M_f J_i - M_i | J_f J_i J M \rangle \langle J_f | \hat{T}_J(q) | J_i \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_J \left| \langle J_f | \hat{T}_J(q) | J_i \rangle \right|^2.\end{aligned}\tag{E.7.20}$$

Ostatnia równość wynika z $\sum_{M_i} \sum_{M_f} |\langle J_f M_f J_i - M_i | J_f J_i J M \rangle|^2 = 1$. Okazuje się, że całkowanie po kącie emisji nukleonu daje stałą multiplikatywną 4π . Taki wynik otrzymali [5] i [11].

F. OBLICZENIA POMOCNICZE DOTYCZĄCE CRPA

Dodatki F.1- F.3 bazują na [6]. Uzupełniłem pośrednie kroki obliczeniowe, odtwarzając podane w tej książce wyniki.

Dodatek F.4 bazuje na pracy [3], gdzie zaprezentowano identyczne rachunki.

F.1 Przekształcenie hamiltonianu do bazy operatorów cząstek i dziur

Hamiltonian dwuciałowy, używany m.in. w CRPA, ma postać:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha}^{\dagger} \langle \alpha | \hat{T} | \beta \rangle c_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}^{\dagger} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle c_{\delta} c_{\gamma} \quad (\text{F.1.1})$$

gdzie operatory kreacji i anihilacji spełniają związek antykomutacyjny:

$$\begin{aligned} \{c_{\alpha}^{\dagger}, c_{\beta}\} = \delta_{\alpha,\beta} &\equiv \delta_{n_{\alpha},n_{\beta}} \delta_{l_{\alpha},l_{\beta}} \delta_{j_{\alpha},j_{\beta}} \delta_{m_{\alpha},m_{\beta}} \Theta(-\epsilon_{\alpha}) + \\ &+ \delta(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\beta}) \delta_{l_{\alpha},l_{\beta}} \delta_{j_{\alpha},j_{\beta}} \delta_{m_{\alpha},m_{\beta}} \Theta(\epsilon_{\alpha}). \end{aligned} \quad (\text{F.1.2})$$

Zakładamy, że układ daje się opisać liczbami kwantowymi $|\alpha\rangle = |nlsjm_j\rangle$, a jego stan podstawowy jest obsadzony do pewnego poziomu energetycznego F . Wtedy możemy zdefiniować operatory cząstek i dziur za pomocą relacji:

$$\begin{aligned} a_{\alpha}^{\dagger} &\equiv c_{\alpha}^{\dagger}, \quad \alpha > F \\ b_{\alpha}^{\dagger} &\equiv S_{-\alpha} c_{-\alpha}, \quad \alpha < F. \end{aligned} \quad (\text{F.1.3})$$

Czynnik fazowy

$$S_{\alpha} \equiv (-1)^{j_{\alpha} - m_{\alpha}} \quad (\text{F.1.4})$$

sprawia, że operator b_{α}^{\dagger} jest operatorem kreacji dziury o określonym momencie pędu $|j_{\alpha} m_{\alpha}\rangle$. Transformacja ta jest kanoniczna, co można sprawdzić na podstawie niezmienniczości reguł antykomutacyjnych:

$$\begin{aligned} \{a_{\alpha}^{\dagger}, a_{\alpha'}\} &= \{b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha,\alpha'} \\ \delta_{\alpha,\alpha'} &\equiv \delta_{n_{\alpha},n_{\alpha'}} \delta_{[l_{\alpha}], [l_{\alpha'}]} \Theta(-\epsilon_{\alpha}) + \delta_{\epsilon_{\alpha}, \epsilon_{\alpha'}} \delta_{[l_{\alpha}], [l_{\alpha'}]} \Theta(\epsilon_{\alpha}). \end{aligned} \quad (\text{F.1.5})$$

Pozostałe antykomutatory są zerowe. Oczywiście dla cząstek musimy rozróżniać sytuacje, czy operator dotyczy kontinuum, czy też stanu związanego i użyć relacji typu (3.2.6).

Konieczność wprowadzenia czynnika fazowego (F.1.4) dla operatorów dziurowych można sprawdzić wykazując, że b_{α}^{\dagger} jest składową m_{α} nieprzywiedlnego operatora tensorowego rzędu j_{α} . Moment pędu powinien tworzyć w bazie $\{n, l, j\}$ macierz diagonalną i nie zależeć

od n i l . Operator momentu pędu postulujemy w postaci:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}} &= \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha}^{\dagger} \langle \alpha | \mathbf{J} | \beta \rangle = & (F.1.6) \\
&= \sum_{n,l,j,m,m' < F} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle (-1)^{2j-m-m'} b_{nlj-m} b_{nlj-m'}^{\dagger} + \\
&+ \sum_{F < nljmm' < 0} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle a_{nljm}^{\dagger} a_{nljm'} + \\
&+ \int_0^{\infty} d\epsilon \sum_{l,j,m,m'} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle a_{\epsilon ljm}^{\dagger} a_{\epsilon ljm'} = \\
&= \sum_{n,l,j,m,m' < F} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle (-1)^{m+m'} (\delta_{m,m'} - b_{nlj-m}^{\dagger} b_{nlj-m}) + \\
&+ \sum_{F < nljmm' < 0} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle a_{nljm}^{\dagger} a_{nljm'} + \\
&+ \int_0^{\infty} d\epsilon \sum_{l,j,m,m'} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle a_{\epsilon ljm}^{\dagger} a_{\epsilon ljm'}.
\end{aligned}$$

Człon zawierający $\delta_{m,m'}$ odpadnie, ponieważ $\sum_{m=-j}^j m = 0$. Z twierdzenia Wignera-Eckarta dostajemy relację dla elementów macierzy $\hat{J}_{1,q}$

$$\langle jm | \mathbf{J}_{1,q} | j, m' \rangle = (-1)^{m-m'+1} \langle j-m | \mathbf{J}_{1,q} | j, -m' \rangle. \quad (F.1.7)$$

Następnie możemy zamienić zmienne sumowania z m, m' na $-m, -m'$ w celu otrzymania ostatecznego wzoru na moment pędu postaci:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}} &= \sum_{n,l,j,m,m' < F} b_{nljm}^{\dagger} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle b_{nljm} + & (F.1.8) \\
&+ \sum_{F < nljmm' < 0} a_{nljm}^{\dagger} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle a_{nljm'} + \\
&+ \int_0^{\infty} d\epsilon \sum_{l,j,m,m'} a_{\epsilon ljm}^{\dagger} \langle jm | \mathbf{J} | jm' \rangle a_{\epsilon ljm'}.
\end{aligned}$$

Dowód na to, że b_{α}^{\dagger} jest operatorem tensorowym przeprowadzamy obliczając komutator z momentem pędu:

$$\left[\hat{\mathbf{J}}, b_{a,m_{\alpha}}^{\dagger} \right] = \sum_{\beta,\gamma} \langle \beta | \mathbf{J} | \gamma \rangle \delta_{\alpha,\gamma} b_{\beta}^{\dagger} = \sum_{m'_{\alpha}} \langle j_{\alpha}, m_{\alpha} | \mathbf{J} | j_{\alpha}, m'_{\alpha} \rangle b_{a,m'_{\alpha}}^{\dagger}. \quad (F.1.9)$$

To kończy dowód.

Teraz chcielibyśmy przepisać hamiltonian (F.1.1) za pomocą iloczynów normalnych operatorów cząstek i dziur. Stan próżni naszej teorii definiujemy, jako:

$$a_{\alpha} |0\rangle = b_{\alpha} |0\rangle = 0 \quad (F.1.10)$$

wtedy naturalną definicją kontrakcji $\underbrace{c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}}$ i iloczynu normalnego $: c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} :$ operatorów fermionowych jest:

$$\begin{aligned}
\underbrace{c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}} &= \langle 0 | c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} | 0 \rangle = \Theta(F - \alpha) \delta_{\alpha,\beta} & (F.1.11) \\
: c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} : &= c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} - \underbrace{c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}}.
\end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Wicka oraz korzystając z symetrii $\langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle = \langle \beta\alpha | V | \delta\gamma \rangle$, przepisuujemy iloczyn operatorów z hamiltonianu, jako:

$$\begin{aligned} c_\alpha^\dagger c_\beta &= \Theta(F - \alpha) \delta_{\alpha,\beta} + : c_\alpha^\dagger c_\beta : \\ c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma &= (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \Theta(F - \alpha) \Theta(F - \beta) + \\ &+ 2\delta_{\alpha\gamma} \Theta(F - \alpha) : c_\alpha^\dagger c_\delta : - 2\delta_{\alpha\delta} \Theta(F - \alpha) : c_\beta^\dagger c_\gamma : + : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : . \end{aligned} \quad (\text{F.1.12})$$

Przetransformowany hamiltonian przyjmie wtedy postać:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\alpha,\beta} \langle \alpha | \hat{T} | \beta \rangle (\delta_{\alpha,\beta} \Theta(F - \alpha) + : c_\alpha^\dagger c_\beta :) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle \{ (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \Theta(F - \alpha) \Theta(F - \beta) + \\ &+ 2\delta_{\alpha\gamma} \Theta(F - \alpha) : c_\beta^\dagger c_\delta : - 2\delta_{\alpha\delta} \Theta(F - \alpha) : c_\beta^\dagger c_\gamma : + : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : \} = \\ &= \sum_{\alpha < F} \langle \alpha | \hat{T} | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\alpha < F} (\langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle) + \\ &+ \sum_{\beta,\delta} \left(\langle \beta | \hat{T} | \delta \rangle - \sum_{\alpha < F} (\langle \alpha\beta | V | \alpha\delta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \delta\alpha \rangle) \right) : c_\beta^\dagger c_\delta : + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : . \end{aligned} \quad (\text{F.1.13})$$

W tym momencie dobrze jest wybrać definicję bazy funkcji 1-cząstkowych, które będą użyte w dalszych obliczeniach. Korzystnym rozwiązaniem jest żądanie, by 1-cząstkowa część hamiltonianu stała się diagonalna. Wtedy spełnione musi być równanie:

$$\langle \beta | \hat{T} | \delta \rangle + \sum_{\alpha < F} (\langle \alpha\beta | V | \alpha\delta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \delta\alpha \rangle) = \epsilon_\beta \delta_{\beta,\delta} \quad (\text{F.1.14})$$

które jest równaniem na wartości własne energii cząstek nieoddziałujących w uśrednionym potencjale. Innymi słowy, są to równania Hartreego-Focka zadające wyjściową bazę funkcji 1-cząstkowych i można je zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \hat{T} \phi_\delta(x_2) + \sum_{\alpha < F} \int d^3 x_1 [\phi_\alpha^\dagger(x_1) V(x_1, x_2) \phi_\alpha(x_1) \phi_\delta(x_2) + \\ - \phi_\alpha^\dagger(x_1) V(x_1, x_2) \phi_\delta(x_1) \phi_\alpha(x_2)] = \epsilon_\delta \phi_\delta(x_2). \end{aligned} \quad (\text{F.1.15})$$

Cały hamiltonian daje się wtedy zapisać w eleganckiej postaci:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \\ H_0 &= \sum_{\alpha < F} (T_\alpha + \frac{1}{2} V_\alpha) \\ T_\alpha &\equiv \langle \alpha | \hat{T} | \alpha \rangle, \quad V_\alpha \equiv \sum_{\beta < F} (\langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \beta\alpha \rangle) \\ \hat{H}_1 &= \sum_{\alpha > F} \epsilon_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha - \sum_{\alpha < F} \epsilon_\alpha b_{-\alpha}^\dagger b_{-\alpha} \\ \hat{H}_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : . \end{aligned} \quad (\text{F.1.16})$$

Wartości własne energii w tych wzorach to:

$$\epsilon_\alpha = T_\alpha + V_\alpha. \quad (\text{F.1.17})$$

Należy pamiętać, że sumowanie po stanach wzbudzonych zawiera sumę zarówno po energiach dyskretnych jak i po kontinuum. Ten wynik jest ogólny, gdyż stosuje się do każdego układu jednocząstkowych liczb kwantowych $|\alpha\rangle$. Przy symetrii sferycznej rdzenia zyskujemy dodatkowe uproszczenie, gdyż wtedy energie jednocząstkowe nie zależą od m ($T_\alpha = T_a$, $V_\alpha = V_a$).

Dodatkową kwestią jest uogólnienie powyższego podejścia do układów jądrowych, gdzie mamy dwa rodzaje nukleonów: neutrony i protony. Najprostszym uogólnieniem jest rozszerzenie układu jednocząstkowych liczb kwantowych o izospin, np.

$$|\alpha\rangle \equiv \left| nl \frac{1}{2} j m_j; \frac{1}{2} m_t \right\rangle; \quad m_t = \pm \frac{1}{2} \quad (\text{F.1.18})$$

przy czym czynnik symetrii dla operatorów dziurowych również ulega zmianie:

$$S_\alpha \equiv (-1)^{j_\alpha - m_\alpha} (-1)^{\frac{1}{2} - m_{t\alpha}}. \quad (\text{F.1.19})$$

Równania od (F.1.14) do (F.1.17) nadal pozostają w mocy i nadają się do opisu jąder o skończonych rozmiarach.

F.2 Komutator $[\hat{H}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger]$

Zacznijmy od prostszego członu:

$$[\hat{H}_1, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger] = \left[\sum_{\eta < F} \epsilon_\eta (a_\eta^\dagger a_\eta - b_{-\eta}^\dagger b_{-\eta}), \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \right] = (\epsilon_\alpha - \epsilon_{-\beta}) \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \quad (\text{F.2.1})$$

(komutator z H_0 daje 0). Trudniej jest oszacować człon zawierający \hat{H}_2 . Zawsze możemy jednak odnaleźć część dającą niezerowy wkład do równań (3.4.10):

$$\begin{aligned} \left[: c_\gamma^\dagger c_\delta^\dagger c_\mu c_\nu :, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \right] &\doteq \left[S_\delta S_\mu : a_\gamma^\dagger b_{-\delta} b_{-\mu}^\dagger a_\nu : + S_\delta S_\nu : a_\gamma^\dagger b_{-\delta} a_\mu b_{-\nu}^\dagger : + \right. \\ &+ S_\gamma S_\mu : b_{-\gamma} a_\delta^\dagger b_{-\mu}^\dagger a_\nu : + S_\gamma S_\nu : b_{-\gamma} a_\delta^\dagger a_\mu b_{-\nu}^\dagger : + \\ &+ \left. S_\gamma S_\delta : b_{-\gamma} b_{-\delta} a_\mu a_\nu :, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \right] = \\ &= \left[-S_\delta S_\mu a_\gamma^\dagger b_{-\mu}^\dagger b_{-\delta} a_\nu + S_\delta S_\nu a_\gamma^\dagger b_{-\nu}^\dagger b_{-\delta} a_\mu + \right. \\ &+ S_\gamma S_\mu a_\delta^\dagger b_{-\mu}^\dagger b_{-\gamma} a_\nu - S_\gamma S_\nu a_\delta^\dagger b_{-\nu}^\dagger b_{-\gamma} a_\mu + \\ &+ \left. S_\gamma S_\delta b_{-\gamma} b_{-\delta} a_\mu a_\nu, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.2.2})$$

Musimy obliczyć wkłady od poszczególnych członów. Pierwszy typ zawierający po 2 operatory kreacji i anihilacji jest w miarę prosty. Wystarczy obliczyć korzystając z (3.4.5):

$$\left[b_\mu^\dagger a_\nu, a_p^\dagger b_h^\dagger \right] \doteq \delta_{p,\nu} \delta_{h,\mu}. \quad (\text{F.2.3})$$

Natomiast człon z czterema operatorami anihilacji wygląda następująco:

$$\left[b_{-\gamma} b_{-\delta} a_{\mu} a_{\nu}, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^{\dagger} \right] = \delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,-\delta} \hat{\zeta}_{\mu-\gamma} + \delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,-\gamma} \delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,-\gamma} \hat{\zeta}_{\mu-\delta} - \delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,-\delta} \hat{\zeta}_{\nu-\gamma}. \quad (\text{F.2.4})$$

Teraz możemy podstawić te relacje do komutatora¹. Otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^{\dagger} \right] &\doteq \frac{1}{2} \sum_{\gamma\nu} S_{\beta} S_{\nu} \langle \gamma - \beta | V | \nu \alpha \rangle \hat{\zeta}_{\gamma-\nu}^{\dagger} + \frac{1}{2} \sum_{\delta\mu} S_{\beta} S_{\mu} \langle \beta \delta | V | \alpha \mu \rangle \hat{\zeta}_{\delta-\mu}^{\dagger} + \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\gamma\mu} S_{\beta} S_{\mu} \langle \gamma - \beta | V | \alpha \mu \rangle \hat{\zeta}_{\gamma-\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \sum_{\delta\nu} S_{\beta} S_{\nu} \langle -\beta \delta | V | \nu \alpha \rangle \hat{\zeta}_{\delta-\nu}^{\dagger} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\delta\mu} S_{\beta} S_{\delta} \langle -\beta \delta | V | \alpha \mu \rangle \hat{\zeta}_{\mu-\delta} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma\nu} S_{\beta} S_{\gamma} \langle \gamma - \beta | V | \nu \alpha \rangle \hat{\zeta}_{\nu-\gamma} + \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\delta\nu} S_{\beta} S_{\delta} \langle -\beta \delta | V | \nu \alpha \rangle \hat{\zeta}_{\nu-\delta} - \frac{1}{2} \sum_{\gamma\mu} S_{\beta} S_{\gamma} \langle \gamma - \beta | V | \alpha \mu \rangle \hat{\zeta}_{\mu-\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{F.2.5})$$

To równanie upraszcza się, jeżeli skorzystamy z symetrii elementów macierzowych potencjału:

$$\begin{aligned} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle &= \langle \beta\alpha | V | \delta\gamma \rangle \\ \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle &= S_{\alpha} S_{\beta} S_{\gamma} S_{\delta} \langle -\gamma - \delta | V | -\alpha - \beta \rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.2.6})$$

Zamieniając odpowiednie czynniki dostajemy:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^{\dagger} \right] &\doteq \sum_{\mu\nu} S_{-\beta} S_{-\nu} \left[(\langle \mu - \beta | V | -\nu \alpha \rangle - \langle \mu - \beta | V | \alpha - \nu \rangle) \hat{\zeta}_{\mu\nu}^{\dagger} + \right. \\ &\left. + (\langle -\beta - \nu | V | \alpha \mu \rangle - \langle -\beta - \nu | V | \mu \alpha \rangle) \hat{\zeta}_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.2.7})$$

Dla prostoty wzorów możemy też wprowadzić jakieś oznaczenia dla członów zależnych od potencjału:

$$\begin{aligned} v_{\alpha\beta;\mu\nu} &\equiv S_{-\beta} S_{-\nu} (\langle \mu - \beta | V | -\nu \alpha \rangle - \langle \mu - \beta | V | \alpha - \nu \rangle) \\ u_{\alpha\beta;\mu\nu} &\equiv S_{-\beta} S_{-\nu} (\langle -\beta - \nu | V | \alpha \mu \rangle - \langle -\beta - \nu | V | \mu \alpha \rangle). \end{aligned} \quad (\text{F.2.8})$$

Korzystając z tożsamości $\left[\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \right] = - \left[\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^{\dagger} \right]^{\dagger}$ dostajemy związki:

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta}^{\dagger} \right] &\doteq \sum_{\mu\nu} (v_{\alpha\beta;\mu\nu} \hat{\zeta}_{\mu\nu}^{\dagger} + u_{\alpha\beta;\mu\nu} \hat{\zeta}_{\mu\nu}) \\ \left[\hat{H}_2, \hat{\zeta}_{\alpha\beta} \right] &\doteq - \sum_{\mu\nu} (v_{\alpha\beta;\mu\nu}^* \hat{\zeta}_{\mu\nu} + u_{\alpha\beta;\mu\nu}^* \hat{\zeta}_{\mu\nu}^{\dagger}). \end{aligned} \quad (\text{F.2.9})$$

¹ Rozdział sumacji po stanach dyskretnych został celowo pominięty na tym etapie. Przyglądając się postaci komutatora (F.1.5), (3.4.5) widać, że tak można zrobić.

F.3 Redukcja bazy równań CRPA

W rozdziale 3.4.1 zdefiniowaliśmy podstawowe pojęcia służące do zamiany bazy równań CRPA na multipolową. Bazę równań (3.4.14) redukujemy wykonując sumowanie, jak we wzorze (3.4.22):

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_\alpha - \epsilon_{-\beta} - \omega) X_{\alpha\beta}^\omega + \sum_{\mu,\nu} (v_{\alpha\beta;\mu\nu} X_{\mu\nu}^\omega + u_{\alpha\beta;\mu\nu} Y_{\mu\nu}^\omega) &= 0 \quad | \quad \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle \\
 (\epsilon_\alpha - \epsilon_{-\beta} + \omega) Y_{\alpha\beta}^\omega + \sum_{\mu,\nu} (v_{\alpha\beta;\mu\nu}^* Y_{\mu\nu}^\omega + u_{\alpha\beta;\mu\nu}^* X_{\mu\nu}^\omega) &= 0 \quad | \quad \sum_{m_a, m_b} S_J \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J - M \rangle.
 \end{aligned} \tag{F.3.1}$$

Dla układów o symetrii sferycznej mamy $\epsilon_\alpha - \epsilon_{-\beta} = \epsilon_a - \epsilon_b$. Pierwsze wyrazy dadzą $(\epsilon_a - \epsilon_b - \omega) X_{abJ}^\omega$ oraz $(\epsilon_a - \epsilon_b + \omega) Y_{abJ}^\omega$. Symetria względem obrotów pozwala zapisać nam elementy macierzowe potencjału, jako:

$$\begin{aligned}
 v_{\alpha\beta;\mu\nu} &= \sum_{J', M'} S_{-\beta} S_{-\nu} \langle j_m m_m; j_b - m_b | j_m j_b J' M' \rangle \langle j_n - m_n; j_a m_a | j_n j_a J' M' \rangle \tag{F.3.2} \\
 &\cdot \{ \langle mb J' | V | na J' \rangle - (-1)^{j_a + j_n - J'} \langle mb J' | V | an J' \rangle \} \\
 u_{\alpha\beta;\mu\nu} &= \sum_{J', M'} S_{-\beta} S_{-\nu} \langle j_n - m_n; j_b - m_b | j_m j_b J' M' \rangle \langle j_m m_m; j_a m_a | j_n j_a J' M' \rangle \cdot \\
 &\cdot \{ \langle nb J' | V | ma J' \rangle - (-1)^{j_a + j_m - J'} \langle nb J' | V | am J' \rangle \}
 \end{aligned}$$

Zapiszemy teraz część sumy z elementami $v_{\alpha\beta;\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle \sum_{\mu,\nu} v_{\alpha\beta;\mu\nu} X_{\mu\nu}^\omega &= \sum_{m_a, m_b} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle \cdot \tag{F.3.3} \\
 \cdot \sum_{\mu,\nu} \sum_{J', M'} S_{-\beta} S_{-\nu} \langle j_m m_m; j_b - m_b | j_m j_b J' M' \rangle \langle j_n - m_n; j_a m_a | j_n j_a J' M' \rangle \cdot \\
 \cdot \{ \langle mb J' | V | na J' \rangle - (-1)^{j_a + j_n - J'} \langle mb J' | V | an J' \rangle \} X_{\mu\nu}^\omega.
 \end{aligned}$$

Problemem jest złożenie tego wyrażenia w obiekt o momencie pędu J i zamianie $X_{\mu\nu}^\omega$ na X_{mnJ}^ω . W tym celu musimy dodać do siebie 3 momenty pędu. Będą potrzebne własności symboli $3-j$ i $6-j$ Wignera z dodatków C.2 i C.3 oraz transformacje nieprzywiedlnych operatorów tensorowych z dodatku C.4.2. Zaczniemy od tożsamości (C.2.7):

$$\langle j_m m_m; j_b - m_b | j_m j_b J' M' \rangle = (-1)^{j_b - m_b} \left(\frac{2J' + 1}{2j_m + 1} \right)^{1/2} \langle j_b m_b; J' M' | j_b J' j_m m_m \rangle \tag{F.3.4}$$

$$\langle j_b m_b; J' M' | j_b J' j_m m_m \rangle = (-1)^{j_b + J' - j_m} \langle J' M'; j_b m_b | J' j_b j_m m_m \rangle. \tag{F.3.5}$$

Skomplikowany iloczyn współczynników Clebsha- Gordana da się wtedy przekształcić do:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{m_a, m_b \\ M'}} S_{-\beta} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle \langle j_m m_m; j_b - m_b | j_m j_b J' M' \rangle \cdot \tag{F.3.6} \\
 \cdot \langle j_n - m_n; j_a m_a | j_n j_a J' M' \rangle = \\
 = \sum_{\substack{m_a, m_b \\ M'}} \langle j_n - m_n; j_a m_a | j_n j_a J' M' \rangle \left(\frac{2J' + 1}{2j_m + 1} \right)^{1/2} (-1)^{4j_b - j_b + J' - j_m} \cdot \\
 \langle j_b m_b; J' M' | j_b J' j_m m_m \rangle \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle.
 \end{aligned}$$

Chcemy teraz jakoś to wszystko zebrać do obiektu o momencie pędu J . Przypomnijmy sobie w tym celu definicję symbolu $6-j$:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{ccc} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J & J_{23} \end{array} \right\} &= \frac{(-1)^{J_1+J_2+J_3+J}}{[(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)]} \langle (J_1 J_2) J_{12} J_3 J M | J_1 (J_2 J_3) J_{23} J M \rangle = \\
 &= \frac{(-1)^{J_1+J_2+J_3+J}}{[(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)]^{1/2}} \sum_{\substack{M_1, M_2, M_3 \\ M_{12}, M_{23}}} \langle J_1 M_1; J_2 M_2 | J_1 J_2 J_{12} M_{12} \rangle \cdot \\
 &\quad \cdot \langle J_{12} M_{12}; J_3 M_3 | J_{12} J_3 J M \rangle \langle J_2 M_2; J_3 M_3 | J_2 J_3 J_{23} M_{23} \rangle \cdot \\
 &\quad \cdot \langle J_1 M_1; J_{23} M_{23} | J_1 J_{23} J M \rangle.
 \end{aligned} \tag{F.3.7}$$

Patrząc na nasze równania możemy założyć związek:

$$\begin{aligned}
 j_n &\equiv j_1 \\
 j_a &\equiv j_2 \\
 j_b &\equiv j_3 \\
 J &\equiv j_{12} \\
 J' &\equiv j_{23} \\
 j_m &\equiv J
 \end{aligned} \tag{F.3.8}$$

innymi słowy dodajemy j_n do j_a by uzyskać J' , potem do j_b dodajemy J' i dostajemy j_m . Do pełnego symbolu $6-j$ brakuje nam $\sum_{m_n, M}$ oraz współczynnika $\langle j_n m_n; J M | j_n J j_m m_m \rangle$. Wstawiamy więc identyczność:

$$\sum_{m_n, M} \langle j_n m_n; J M | j_n J j_m m_m \rangle^2 \equiv 1 \tag{F.3.9}$$

(nasze współczynniki są rzeczywiste) oraz brakujące czynniki normujące. Stosujemy po drodze jeszcze raz transformacje (C.2.7) i otrzymujemy wynik:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{m_a, m_b \\ M'}} S_{-\beta} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle \langle j_m m_m; j_b - m_b | j_m j_b J' M' \rangle \cdot \\
 \cdot \langle j_n - m_n; j_a m_a | j_n j_a J' M' \rangle = \\
 = S_{-\nu} \langle j_m m_m; j_n m_n | j_m j_n J M \rangle (-1)^{j_a+j_n+J'} (2J'+1) \left\{ \begin{array}{ccc} j_n & j_a & J' \\ j_b & j_m & J \end{array} \right\}.
 \end{aligned} \tag{F.3.10}$$

Prostota końcowego wyniku wynagrodzi nam skomplikowane wyprowadzenie:

$$\sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | j_a j_b J M \rangle v_{\alpha\beta; \mu\nu} = v_{ab; mn}^J \langle j_m m_m; j_n m_n | j_m j_n J M \rangle \tag{F.3.11}$$

gdzie

$$v_{ab; mn}^J \equiv \sum_{J'} (2J'+1) \left\{ \begin{array}{ccc} j_n & j_a & J' \\ j_b & j_m & J \end{array} \right\} \{ \langle m_b J' | V | n a J' \rangle - (-1)^{j_a+j_n-J'} \langle m_b J' | V | a n J' \rangle \} \tag{F.3.12}$$

W podobny sposób postępujemy z $u_{ab;mn}^J$. Tym razem dla odpowiednich kombinacji współczynników Clebsha- Gordana otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m_a, m_b \\ M'}} \langle j_a m_a; j_b m_b | j_a j_b J M \rangle \langle j_m m_m; j_a m_a | j_m j_a J' M' \rangle \langle j_n - m_n j_b - m_b | j_n j_b J' M' \rangle S_{-\beta} = \\ & = S_\lambda \langle j_n - m_n j_m - m_m | j_n j_m J M \rangle (-1)^{j_a + j_m + J'} (2J' + 1) \left\{ \begin{matrix} j_m & j_a & J' \\ j_b & j_n & J \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.3.13})$$

Po uwzględnieniu wszystkich czynników fazowych dostajemy transformację:

$$\sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | j_a j_b J M \rangle u_{\alpha\beta; \mu\nu} = u_{ab;mn}^J \langle j_m m_m; j_n m_n | j_m j_n J - M \rangle S_J \quad (\text{F.3.14})$$

gdzie oba typy elementów macierzowych łączy prosta transformacja:

$$u_{ab;mn}^J = (-1)^{J_n - j_m - J} v_{ab;nm}^J. \quad (\text{F.3.15})$$

Stosując te przekształcenia możemy przepisać równania CRPA w postaci:

$$\begin{aligned} (\epsilon_a - \epsilon_b - \omega) X_{abJ}^\omega + \sum_{m,n} (v_{ab;mn}^J X_{mnJ}^\omega + u_{ab;mn} Y_{mnJ}^\omega) &= 0 \\ (\epsilon_a - \epsilon_b + \omega) Y_{abJ}^\omega + \sum_{m,n} (v_{ab;mn}^{*J} Y_{mnJ}^\omega + u_{ab;mn}^{*J} X_{mnJ}^\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.3.16})$$

Ten układ równań ma wartości i wektory własne niezależne od M . Widoczne staje się też rozszczepienie stanów o różnych J . W przypadku jąder z oddziaływaniem niezmienniczym względem obrotów w przestrzeni izospinowej możemy dokonać dalszej redukcji bazy. Niech $\{\alpha\} = \{n, l, j, m; \frac{1}{2}m_t\}$. Izospinowe współczynniki Clebsha- Gordana i czynniki fazowe wchodzi do równań w sposób analogiczny do tych pochodzących od momentu pędu. Tak więc możemy zapisać podwójnie zredukowany (względem momentu pędu i izospinu) element macierzowy:

$$\langle \Psi_{JT}^\omega :: \hat{T}_{JT} :: 0 \rangle = \sum_{ab} \{ \langle a :: T_{JT} :: b \rangle X_{abJT}^\omega + (-1)^{-T} (-1)^{j_b - j_a - J} \langle b :: T_{JT} :: a \rangle Y_{abJT}^\omega \}. \quad (\text{F.3.17})$$

Współczynniki X_{abJT}^ω i Y_{abJT}^ω spełniają te same relacje co ich odpowiedniki z reprezentacji czysto momentowo- pędowej.

$$\begin{aligned} v_{ab;mn}^{JT} &\equiv \sum_{J'T'} (2J' + 1)(2T' + 1) \left\{ \begin{matrix} j_n & j_a & J' \\ j_b & j_m & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \end{matrix} \right\} \\ &\cdot \{ \langle mbJ' | V | naJ' \rangle - (-1)^{j_a + j_n - J' - T'} \langle mbJ' | V | anJ' \rangle \} \\ u_{ab;mn}^{JT} &= (-1)^{J_n - j_m - J - T} v_{ab;nm}^{JT}. \end{aligned} \quad (\text{F.3.18})$$

F.4 Redukcja nierelatywistyczna

Dana jest ogólna struktura elementu macierzowego wierzchołka oddziaływania swobodnego nukleonu z polem elektromagnetycznym:

$$\langle p', s' | J_\mu(q) | p, s \rangle = \frac{m}{\sqrt{EE'}} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') (F_1(q^2) \gamma_\mu + i F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu) u_s(\mathbf{p}). \quad (\text{F.4.1})$$

Zależność izospinową (tymczasowo) pominięto, gdyż wchodzi ona do wzoru w sposób trywialny. Będziemy rozwijać całe wyrażenie konsekwentnie do rzędu $\frac{|\mathbf{p}|}{m}$. Dla bispinora rozwinięcie to wygląda następująco:

$$\begin{aligned} u_s(\mathbf{p}) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 + \mathbf{p}^2/m^2)^{1/2}} \right)^{1/2} \left(\frac{\phi_s}{m(\sqrt{1 + \mathbf{p}^2/m^2 + 1})} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{\phi_s} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \right) \left(\frac{\phi_s}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m} \phi_s} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{F.4.2})$$

Dla iloczynu dwóch bispinorów podstawimy zawsze:

$$\left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{p}'^2}{8m^2} \right) = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right). \quad (\text{F.4.3})$$

Kolejnymi przydatnymi tożsamościami okażą się:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} - i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{a}) \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{F.4.4})$$

gdyż w naszych wzorach występuje spora ilość iloczynów wektorów i macierzy Pauliego. Proces redukcji wygodnie jest podzielić na 2 części: człony czasowe $\langle p', s' | J_0(q) | p, s \rangle$ oraz człony przestrzenne $\langle p', s' | \mathbf{J}_0(q) | p, s \rangle$. Poniższe obliczenia przeprowadzono ze szczegółami w [3].

F.4.1 Składowe czasowe wektorowego prądu jądrowego.

$$\begin{aligned}
\langle p', s' | J_0(q) | p, s \rangle &= \frac{m^2}{\sqrt{EE'}} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') F_1 \gamma_0 + i F_2 \sigma_{0\nu} q^\nu u_s(\mathbf{p}) \approx & (F.4.5) \\
&\approx \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) [F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \gamma_0^2 \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s + \\
&+ F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) (\gamma_0 q_0 - \gamma_0^2 \not{q}') \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s] = \\
&= \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) [F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \mathbf{1} \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s + \\
&+ F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} \\ -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q} & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s] \approx \\
&\approx F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})}{4m^2}\right) \chi_s + \\
&+ F_2 \chi_{s'}^\dagger \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q})}{2m} = \\
&= F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{4m^2} + \frac{i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{p})}{4m^2}\right) \chi_s + \\
&+ 2m F_2 \chi_{s'}^\dagger \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}' + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p} - \mathbf{p}' \times \mathbf{q})}{4m^2} \chi_s = \\
&= F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m^2} - \frac{i \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})}{4m^2}\right) \chi_s + \\
&+ 2m F_2 \chi_{s'}^\dagger \frac{-\mathbf{q}^2 - 2i \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})}{4m^2} \chi_s.
\end{aligned}$$

Przy obliczeniach skorzystano z drugiej i czwartej tożsamości z (F.4.4) oraz podstawienia $\mathbf{p}' = \mathbf{q} + \mathbf{p}$ (ostatnia równość). Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\langle p', s' | J_0(q) | p, s \rangle &= \left(F_1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m^2} (4m F_2 + F_1)\right) \delta_{s,s'} + & (F.4.6) \\
&- \chi_{s'}^\dagger \frac{i \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})}{4m^2} \chi_s (F_1 + 4m F_2).
\end{aligned}$$

F.4.2 Składowe przestrzenne wektorowego prądu jądrowego

$$\begin{aligned}
\langle p', s' | \mathbf{J}(q) | p, s \rangle &= \frac{m^2}{\sqrt{EE'}} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') (F_1 \boldsymbol{\gamma} + F_2 (\mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma} \not{q}')) u_s(\mathbf{p}) \approx & (F.4.7) \\
&\approx \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) [F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s + \\
&+ F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) (\gamma_0 \mathbf{q} - \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \not{q}') \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s] = \\
&= \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) [F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s + \\
&+ F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) & \boldsymbol{\sigma} \nu \\ -\boldsymbol{\sigma} \nu & -\mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m}}\right) \chi_s].
\end{aligned}$$

Ostatnie przekształcenie wynika z:

$$\gamma_0 \mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma} \mathcal{A} = \gamma_0 \mathbf{q} - \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \gamma_0 q_0 + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{q} = \gamma_0 \mathbf{q} + \boldsymbol{\gamma} q_0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{q}. \quad (\text{F.4.8})$$

Z powodu sporej komplikacji technicznej obliczymy człony z F_1 i F_2 osobno:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) F_1 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} \chi_s \approx \\ & \approx F_1 \chi_{s'}^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}') \boldsymbol{\sigma}}{2m} \chi_s = F_1 \chi_{s'}^\dagger \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}' + i \boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} \chi_s = \\ & = F_1 \chi_{s'}^\dagger \frac{2\mathbf{p} + \mathbf{q} + i \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}}{2m} \chi_s \end{aligned} \quad (\text{F.4.9})$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(1 \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) & \boldsymbol{\sigma} \nu \\ -\boldsymbol{\sigma} \nu & -\mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} \chi_s \approx \\ & \approx F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}) + \frac{\boldsymbol{\sigma} \nu(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}') \boldsymbol{\sigma} \nu}{2m} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m} (-\mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{q})) \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{2m} \right) \chi_s \approx \\ & \approx F_2 \chi_{s'}^\dagger \left(i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}) - \frac{\nu}{2m} (\mathbf{q} + i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q})) \right) \chi_s, \end{aligned}$$

Możemy teraz przedstawić te wyniki razem, przywracając jawną zależność izospinową (macierze η_t spełniające $\tau_3 \eta_t = t \eta_t$, czyli funkcje własne operatora izospinu):

$$\begin{aligned} \langle p', s', t' | J_0(q) | p, s, t \rangle &= (F_1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m^2} (4mF_2 + F_1)) \delta_{s,s'} \delta_{t,t'} + \\ & - \chi_{s'}^\dagger \eta_{t'}^\dagger \frac{i \mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})}{4m^2} \eta_t \chi_s (F_1 + 4mF_2) \\ \langle p', s', t' | \mathbf{J}(q) | p, s, t \rangle &= \frac{\mathbf{p}}{m} \delta_{s,s'} \delta_{t,t'} F_1 + \frac{\mathbf{q}}{2m} \delta_{s,s'} \delta_{t,t'} F_1 + \\ & + \chi_{s'}^\dagger \eta_{t'}^\dagger \frac{i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q})}{2m} \left[F_1 + \left(1 - \frac{\nu}{2m}\right) F_2 \right] \eta_t \chi_s. \end{aligned} \quad (\text{F.4.10})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bjorken and Drell, *"The Relativistic Quantum Theory"*.
- [2] C. Bloch, *Proc. XXXVI Int. School of Physics, Enrico Fermi Course Academic* (1966).
- [3] Antonio Botrugno, *"Interazione Neutrino- Nucleo "*, (PhD thesis), Universita Degli Studi dell'Aquila, Facolta di Scienze MM. FF. NN., Dipartimento di Fisica, XVI Ciclo (2003).
- [4] R.G. Brown "Classical Electrodynamics II"
Duke University Physics Department
[http://www.phy.duke.edu/ rgb/Class/phy319.php](http://www.phy.duke.edu/rgb/Class/phy319.php)
- [5] M.Buballa, S. Drożdż, S. Krewald and J. Speth *"Nuclear Electromagnetic Response within Continuum RPA theory"* Ann. Phys. **208**, 346-375 (1991).
- [6] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *"Kwantowa teoria układów wielu cząstek"*, PWN, Warszawa 1982.
- [7] J.D Jackson, *"Elektrodynamika klasyczna"* , PWN, Warszawa (1982).
- [8] J.Raynal, M. A. Melkanoff and T. Sawada *"Nuclear-Spectroscopy Calculations Including Continuum States And Application to the Giant Resonance of ^{16}O "* Nucl. Phys. **A101** 369-407 (1967).
- [9] P. Ring, P. Shuck, *"The Nuclear Many- Body Problem"*, Springer Verlag, Berlin (1980).
- [10] Leonard I. Schiff, *"Mechanika kwantowa"*, PWN, Warszawa 1977.
- [11] John Dirk Walecka, *"Electron Scattering on Nucleus and Nuclear Structure"*, Cambridge University Press.
- [12] Steven Weinberg, *"Teoria pól kwantowych"*, PWN, Warszawa 1999.