Splątanie i inne korelacje kwantowe w układach złożonych

Lech Jakóbczyk

Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet Wrocławski

Formalna definicja splątania

Układ złożony: co najmniej dwa podukłady. Przestrzeń Hilberta

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

- $\mathcal{H}_A$ - przestrzeń Hilberta podukładu A
- $\mathcal{H}_B$ - przestrzeń Hilberta podukładu B

Stan czysty $\psi \in \mathcal{H}_{AB}$ jest separowalny jeśli

$$\psi = \varphi_A \otimes \varphi_B, \quad \varphi_A \in \mathcal{H}_A, \quad \varphi_B \in \mathcal{H}_B$$

Stan czysty jest splątany, jeśli nie jest separowalny.

Jak wykryć stany splątane?

- Kryterium separowalności stanów czystych: stan $\psi \in \mathcal{H}_{AB}$ jest separowalny $\Leftrightarrow$ jego ślady częściowe

$$\mathrm{tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|, \quad \mathrm{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|$$

  są stanami czystymi.

A zatem

- ψ jest splątany, gdy jego ograniczenia do podukładów nie są stanami czystymi.

'Fizyczna' definicja splątania

układ fizyczny $\equiv$ algebra obserwabli $\mathcal{A}$

stan układu $\equiv$ funkcjonał liniowy $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, który jest

- dodatni: $\omega(A^*A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- unormowany: $\omega(\mathbb{1}) = 1$

Przykłady stanów:

- $\omega_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle$ - stan wektorowy
- $\omega_\rho = \mathrm{tr}(\rho A)$ - stan mieszany

układ złożony $\equiv$ algebra obserwabli $\mathcal{A}_{\text{tot}}$ zawiera podalgebry $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ takie że:

- $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są statystycznie niezależne: $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$
- $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ generują $\mathcal{A}_{\text{tot}}$

Stan czysty $\omega : \mathcal{A}_{\text{tot}} \to \mathbb{C}$ jest $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - separowalny, jeśli

$$\omega(AB) = \omega(A)\omega(B), \quad \forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$$

Stan czysty ω jest $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - splątany, jeśli powyższa własność nie zachodzi.

Uwaga:

- pojęcie splątania zależy od mierzonych obserwabli,
- przy wyborze pary $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, splątanie stanu oznacza istnienie korelacji między niezależnymi obserwablami
- każdy stan czysty może być splątany (lub separowalny): zawsze istnieje wybór pary $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, taki że stan ω jest $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - separowalny bądź nie

Separowalność stanów mieszanych - definicja Wernera (1989)

Stan mieszany jest $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - separowalny, jeśli da się przedstawić jako kombinacja wypukła czystych stanów $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - separowalnych.
Stan ω jest $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - splątany, jeśli nie jest separowalny.

Problem: Jak wykryć takie splątanie ?

Kryterium Peresa (1996)

Niech stan ω będzie zadany przez operator stanu ρ. Jeśli ρ jest separowalny, czyli

$$\rho = \sum_j p_j P_j Q_j, \quad P_j \in \mathcal{A},\ Q_j \in \mathcal{B}$$

to po częściowej transpozycji

$$\rho^{PT} = \sum_j p_j P_j^T Q_j \geq 0$$

Mamy więc

$$\rho \quad \text{jest separowaly} \quad \Rightarrow \quad \rho \quad \text{jest PPT}$$

czyli

$$\rho \quad \text{jest NPPT } (\rho^{PT} \ngeq 0) \quad \Rightarrow \quad \rho \quad \text{jest splątany}$$

- dla dwóch qubitów ($\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$), ρ jest NPPT $\Leftrightarrow$ ρ jest splątany,
- dla układów na przestrzeniach $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, $d \geq 3$, istnieją stany splątane, które są PPT,
- są to przykłady stanów o splątaniu związanym, które nie da się wydestylować do splątania stanów czystych,
- nie wiadomo, czy wszystkie stany NPPT są destylowalne

Czy tylko splątanie?

Czy rzeczywiście separowalne stany mieszane nie zawierają żadnych korelacji kwantowych? Odpowiedź Wernera jest raczej formalna. Rozważmy operacyjne podejście do problemu:

$$\{P_k^A\} \quad \text{- zupełny pomiar podukładu } A$$

$$\Updownarrow$$

$$P_k^A \quad \text{- projektory 1 - wymiarowe,} \quad \sum_k P_k^A = \mathbb{1}$$

Podobnie definiujemy zupełny pomiar podukładu B.

Po lokalnym pomiarze

$$\rho \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}_{AB}(\rho) = \sum_{k,l} P_k^A \otimes P_l^B \, \rho \, P_k^A \otimes P_l^B$$

Jeśli wszystkie lokalne pomiary zaburzają stan ρ:

$$\mathbb{P}_{AB}(\rho) \neq \rho$$

dla dowolnych projektorów $\{P_k^A \otimes P_l^B\}$, to naturalne jest stwierdzenie:

Stan ρ jest czysto kwantowy - opisuje kwantowe korelacje między niezależnymi podukładami. W przeciwnym wypadku, stan ρ jest klasyczny.

Stan ρ jest klasyczny $\quad \equiv \quad$ istnieją projektory $P_k^A \otimes P_l^B$:

$$\rho = \sum_{k,l} p_{kl} P_k^A \otimes P_l^B , \quad p_{kl} \geq 0, \sum_{k,l} p_{kl} = 1$$

- wszystkie stany splątane są czysto kwantowe,
- istnieją separowalne stany czysto kwantowe np

$$\rho = \frac{1}{4} \Big[|0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +| + |1\rangle\langle 1| \otimes |-\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +| \otimes |1\rangle\langle 1| + |-\rangle\langle -| \otimes |0\rangle\langle 0| \Big]$$

jest czysto kwantowym stanem dwóch qubitów,

- prawie wszystkie stany są czysto kwantowe.

Rozważa się też 'jednostronne' pomiary lokalne $\{P_k^A \otimes \mathbb{1}\}$ lub $\{\mathbb{1} \otimes P_k^B\}$.

Stan ρ jest klasyczno - kwantowy jeśli istnieje pomiar lokalny (np $P_k^A \otimes \mathbb{1}$), taki że

$$\mathbb{P}_A(\rho) = \sum_k P_k^A \otimes \mathbb{1}\, \rho\, P_k^A \otimes \mathbb{1} = \rho$$

Stany klasyczno - kwantowe są postaci

$$\rho = \sum_k p_k\, P_k^A \otimes \rho_k^B$$

gdzie $\{p_k\}$ jest pewnym rozkładem probabilistycznym, a ρ_k^B są dowolnymi stanami układu B.

Miara kwantowości korelacji: geometryczny 'kwantowy discord' (Dakić, Vedral, Brukner - 2010)

Niech Ω_{AB} - zbiór stanów klasycznych układu złożonego AB.

$$D_G^{AB}(\rho) = \inf_{\chi \in \Omega_{AB}} ||\rho - \chi||_2^2$$ - dwustronny geometryczny 'discord'

gdzie $||m||_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(mm^*)}$.

Równoważna definicja

$$D_G^{AB}(\rho) = \inf_{\mathbb{P}_{AB}} ||\rho - \mathbb{P}_{AB}(\rho)||_2^2$$

Częściej analizuje się jednostronny geometryczny 'discord'

$$D_G^A(\rho) = \inf_{\mathbb{P}_A} ||\rho - \mathbb{P}_A(\rho)||_2^2$$

mający bliski związek z kwantowym 'discordem' (Ollivier, Żurek- 2002), wprowadzonym w kontekście analizy kwantowej miary 'informacji wzajemnej'.

Co wiadomo o D_G^A ?

- W przypadku dwóch qubitów:
  - dla stanów czystych: $\sqrt{D_G^A(\psi)} =$ splątanie ψ
  - dla dowolnych stanów: $\sqrt{D_G^A(\rho)} \geq$ splątanie ρ (Girolami, Adesso - 2011)
  - istnieje zwarta formuła na $D_G(\rho)$ dla dowolnego stanu

- W przypadku dwóch quditów:
  - dla stanów czystych:

$$\sqrt{D_G^A(\psi)} \geq \text{splątanie mierzone przez 'negativity'}$$

  - dla dowolnych stanów ?

Przykład: Stan Wernera

$$\rho_\infty = \frac{1}{4}\mathbb{1}, \quad P \quad \text{- projektor na stan Bella}$$

Definiujemy stan Wernera

$$\rho_W = (1-p)\rho_\infty + p\,P, \quad p \in [0,1]$$

Dla stanu Wernera splątanie mierzone przez 'negativity' $N(\rho_W)$ wynosi

$$N(\rho_W) = \begin{cases} 0, & p \leq 1/3, \\ (3p-1)/2, & p > 1/3 \end{cases}$$

a z drugiej strony

$$D_G^A(\rho_W) = p^2$$

Widać, że:

- $\sqrt{D_G^A(\rho_W)} \geq N(\rho_W)$,
- separowalny stan Wernera ($p \in (0, 1/3]$), ma czysto kwantowe korelacje